Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

С.Г. Лукинова, В.И. Иванов, В.Д. Жданова

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рекомендовано Учебно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования в качестве учебного пособия для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки/специальностям 38.05.01 «Экономическая безопасность», 38.03.01 «Экономика», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 20.03.02 «Природообустройство и водопользование», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», 35.03.06 «Агроинженерия» и 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»

Электронное издание

Красноярск 2024

ББК 22.161.11
Л 84

Рецензенты:
Л.В. Шатохина, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. высшей математики Сибирского государственного университета науки и технологий имени акад. М.Ф. Решетнева
Е.В. Еремин, д-р физ.-мат. наук, проф. каф. физики твердого тела и нанотехнологий Сибирского федерального университета

Л 84 **Лукинова, С. Г.**
Математика. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных: *учебное пособие* [Электронный ресурс] / С. Г. Лукинова, В. И. Иванов, В. Д. Жданова; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2024. – 148 с.

В учебном пособии представлен основной раздел математического анализа – дифференциальное исчисление, необходимый для успешного усвоения дальнейших глав математики, а также общетеоретических специальных дисциплин в области экономики, статистики и бизнеса, менеджмента и информационных технологий. Изложение вопросов дифференциального исчисления функций одной переменной и функции нескольких переменных в данном пособии рассматривается параллельно.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки/специальностям 38.05.01 «Экономическая безопасность», 38.03.01 «Экономика», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 20.03.02 «Природообустройство и водопользование», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», 35.03.06 «Агроинженерия» и 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

ББК 22.161.11

© Лукинова С.Г., Иванов В.И., Жданова В.Д., 2024
© ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет», 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…….... 5
Глава 1. Введение в математический анализ……... 6
1.1. Понятие множества, операции над ними. Множество действительных чисел……. 6
1.2. Понятие функции одной и нескольких переменных……. 10
1.3. Способы задания функций……... 15
1.4. Свойства функции одной переменной…… 20
1.5. Основные элементарные функции, их графики……. 21
1.6. Предел функции в точке……... 27
1.7. Односторонние пределы функции одной переменной. Теорема существования предела…… 31
1.8. Бесконечно малые функции, их классификация…… 32
1.9. Бесконечно большие функции одной переменной, их связь с бесконечно малыми…… 33
1.10. Теоремы о пределах…… 36
1.11. Замечательные пределы……. 37
1.12. Техника вычисления пределов…….. 40
1.13. Непрерывность функции в точке, на отрезке, в области… 42
1.14. Точки разрыва функции одной переменной, их классификация…….. 44
1.15. Свойства функций, непрерывных на отрезке…….. 48
Глава 2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных…… 51
2.1. Понятие производной функции в точке…….. 51
2.2. Непрерывность и дифференцируемость……. 57
2.3. Механический смысл производной……. 58
2.4. Векторная функция скалярного аргумента, ее производная 61
2.5. Производные высших порядков. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных…… 63
2.6. Производные параметрической функции……... 65
2.7. Дифференцирование неявных функций……. 66
2.8. Дифференциал функции, его свойства……... 67
2.9. Дифференциалы высших порядков…… 69
2.10. Основные теоремы дифференциального исчисления……. 70
2.11. Линии уровня и градиент функции двух переменных…… 74
Глава 3. Приложения дифференциального исчисления…… 78
3.1. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях 78

3.2. Дифференциал длины дуги…….. 79
3.3. Геометрические приложения дифференциального исчисления функций одной переменной……... 80
3.4. Геометрические приложения дифференциального исчисления функций двух переменных……. 82
3.5. Экстремум функции одной переменной……. 83
3.6. Точки перегиба. Выпуклость, вогнутость линии……... 85
3.7. Асимптоты функции……. 87
3.8. Исследование функции одной переменной (общая схема)... 88
3.9. Экстремумы функции двух переменных…… 90
3.10. Наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке и в области…… 91
3.11. Условные экстремумы…… 94
3.12. Формула Тейлора…… 95
Глава 4. Приложения в экономике…… 99
4.1. Функции в экономике……... 99
4.2. Производные в экономике…… 102
4.2.1. Экономический смысл производной…….. 102
4.2.2. Экономический смысл производной второго порядка 105
4.2.3. Эластичность функции……. 106
Вопросы и задания для самоконтроля…….. 109
Итоговый тест…… 111
Вопросы к экзамену…….. 114
Конспект-схемы (КС) основных тем лекций……... 116
Заключение…… 135
Литература…… 136
Приложение…… 137

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие является частью учебно-методического комплекса дисциплин «Математика», «Высшая математика», в которой представлены: введение в математический анализ, производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных.

Учебное пособие «Математика. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных» содержит: лекции по основным темам; тесты для самостоятельной работы; вопросы и задания для самоконтроля; экзаменационные вопросы; контрольные задания.

Программа и содержание курса лекций по указанным разделам соответствуют федеральным государственным образовательным стандартами высшего образования (ФГОС ВО) по инженерным, технологическим и экономическим направлениям.

Знания по этим разделам, полученные студентами, необходимы для успешного изучения дальнейших глав математики, а также усвоения общетеоретических и специальных дисциплин в области инженерии, экономики, управления и технологий.

Целью данного пособия является оказание помощи студентам всех форм обучения в организации самостоятельной работы при изучении курсов: «Математика» и «Высшая математика».

Пособие предназначено как для самостоятельной работы студентов, так и для обучения в аудитории.

В учебном пособии приводятся конспект-схемы (КС) основных тем лекций, а также содержатся контрольные задания (см. приложение), которые необходимо выполнить, чтобы получить допуск к экзамену. Задачи итогового теста необходимо выполнить перед сдачей экзамена. Решение типовых задач контрольных заданий подробно рассмотрены в главах данного учебного пособия (см. примеры 1–56).

Защита контрольных заданий осуществляется в письменной форме или в виде собеседования (по решению преподавателя).

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В данном разделе рассмотрены понятия: функции одной и нескольких переменных; предела функции; непрерывность функции.

1.1. Понятие множества, операции над ними. Множество действительных чисел

Под *множеством* понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством. Множества обозначают $A,\ B,\ C,\ ...$

Объекты, объединенные одним общим свойством, называют *элементами множества* и обозначают $a,\ b,\ c,\ ...$. Если элемент «a» принадлежит множеству A, то запись выглядит таким образом: $a \in A$. Множество, число элементов которого конечно, называют конечным и бесконечным в противном случае.

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются *числовыми*. Из школьного курса алгебры известны множества:

R – действительных чисел;

Q – рациональных;

I – иррациональных;

Z – целых $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$;

N – натуральных чисел $\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.

Конечные множества разделяются на *счетные* и *несчетные*. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется *счетным* и *несчетным* в противном случае. Так, множество четных чисел $\{2, 4, ..., 2n, ...\}$ – счетное, множество действительных чисел R – несчетное.

Конечные и счетные множества называются *дискретными* множествами.

Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то множество A называется частью, или *подмножеством* множества B и обозначается $A \subset B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называются *равносильными* и обозначаются $A = B$.

Например, очевидно, что

$$N \subset Z \subset Q \subset R,$$

$$I \subset R,$$

$$R = Q \cup I.$$

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Операции над множествами

1. *Объединением* (или *суммой множеств*) A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B:

$$C = A \cup B = \{c_i : c_i \in A \text{ или } c_i \in B\}.$$

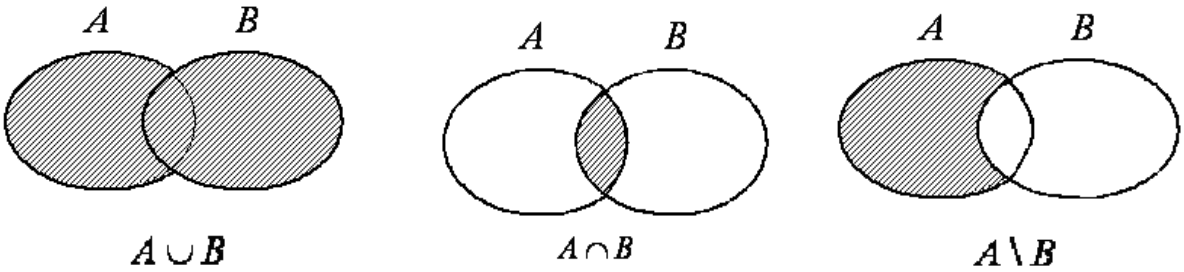
2. *Пересечением множеств* A и B называется множество C, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B:

$$C = A \cap B = \{c_i : c_i \in A \text{ и } c_i \in B\}.$$

3. *Разностью множеств* A и B называется множество D, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, обозначают $D = A \setminus B$:

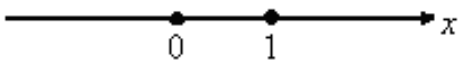
$$D = A \setminus B = \{d_i : d_i \in A \text{ и } d_i \in B\}.$$

Названные операции могут быть проиллюстрированы диаграммами Эйлера-Венна:



Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой* (или *числовой оси*), то есть прямой, на

которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.



Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, то есть каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой – определенное действительное число. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Множество $D \subseteq R$, $x \in D$ называется:

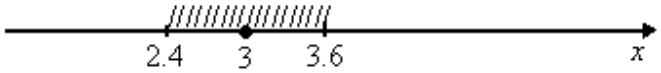
- *отрезком* (или *сегментом*), обозначается $[a;\ b]$, если элементы x удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$;
- *интервалом* $(a;\ b)$, если элементы x удовлетворяют неравенству $a < x < b$;
- *полуинтервалами,* соответственно $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$, если неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$.

Всякий интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью точки a.*

Интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$, то есть множество точек x таких, что $|x-a| < \delta$, где $\delta > 0$, называется δ – ***окрестностью точки*** a.

Неравенство, содержащее абсолютную величину $|x-a| < \delta$, соответствует двойному неравенству $-\delta < x-a < \delta$ или $a-\delta < x < a+\delta$.

Соответствует двойному неравенству $|x-3| < 0,6$: геометрически это неравенство определяет интервал с центром в точке $x_0 = 3$ и длиной $2\delta = 1,2$.



При решении неравенств, содержащих абсолютную величину, полезно иметь в виду следующие свойства:

1. Неравенство $|x| \le a$, где $a > 0$ равносильно двойному неравенству: $-a \le x \le a$.

2. Неравенство $|x| \le a$, где $a < 0$, противоречиво.

3. Неравенство $|x| \ge a$, где $a > 0$, равносильно двум неравенствам:

$$\begin{cases} x \ge a \\ x \le -a \end{cases}.$$

4. Неравенство $|x| \ge a$, где $a < 0$, справедливо для любых x.

Пример 1.

Решить неравенства:

а) $|1+3x| \le 4$;

б) $|2-x| > 3$.

Решение:

а) данное неравенство можно записать в виде

$-4 \le 1+3x \le 4$ или

$-4-1 \le 3x \le 4-1$;

$-5 \le 3x \le 3$ или

$-\frac{5}{3} \le x \le 1$.

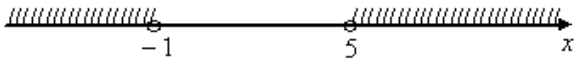
Ответ: $x \in \left[-\frac{5}{3};\ 1\right]$;

б) это неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$2-x > 3$ и $2-x < -3$.

Решая каждое неравенство, получим

$-x > 1$ и $-x < -5$ или $x < -1$ и $x > 5$.



Контрольный тест

Задание 1.

Найти элементы множеств:

а) $A = \{n | n \in N;\ n < 7\}$;

б) $B=\{x|x\in Z;\ -2\le x\le 4\}$.

Задание 2.

Изобразить на числовой прямой множества:

$C\cap D;\ C\cap F;\ D\cap F$,

если $C=\{x|x\in R;\ -2\le x<7\}$;

$F=\{x|x\in R;\ |x|<4\}$;

$D=\{x|x\in R;\ 0<x\le 9\}$.

Решить неравенства:

а) $|2x-4|<0,3$;

б) $|2-3x|>0,7$.

1.2. Понятие функции одной и нескольких переменных

Понятие функции является одним из основных понятий в математике. С ее развитием изменялось и представление о функции. В XVIII и начале XIX вв. понятие функции отождествлялось с формулой, которой она определялась. Однако это сужает и обедняет возможности рассмотрения различных функциональных зависимостей. Позже (почти до наших дней) функция определялась как зависимая переменная величина, то есть некоторый процесс, протекающий во времени. Это удобно для физических приложений, но с точки зрения математики – недостаточно. В современном представлении *функция* – это соответствие между элементами двух множеств.

Пусть точка $\mathrm{M}\in D$, причем $D\neq\varnothing$ (не пустое множество).

Если каждой точке $\mathrm{M}\in D$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное действительное число $u\in E\neq\varnothing$, то f называют **функцией**, причем называют:

D – **область определения** функции;

E – **область изменения** функции;

E – это числовое множество, каждое значение которого определяет точку из одномерного пространства R.

Точка M является аргументом функции. Правило f, однако, применимо не к самой точке, а к ее координатам.

Таким образом, функция $u = f(M)$ устанавливает связь между точками $M \in D$ и точками некоторого множества одномерного пространства R.

В зависимости от числа аргументов, входящих в уравнение $u = f(M)$, различают функции одного, двух и более аргументов.

Будем исходить из того, что аргументы функции образуют линейно упорядоченные наборы. Каждый такой набор из n аргументов определяет точку M пространства R^n:

$$M \in D \subset R^n;$$

1) $u = f(x)$, здесь u – *функция одной переменной* или одного аргумента x; $M(x)$ – точка числовой оси; D – некоторое подмножество множества действительных чисел R, $M \in D \subset R$;

2) $u = f(x,\ y)$, здесь u – *функция двух переменных* или двух аргументов x, y; D – некоторое подмножество множества R^2; $M \in D \subset R^2$; $M(x,\ y)$ – точка плоскости R^2;

3) $u = f(x,\ y,\ z)$, здесь u – функция *трех переменных*; D – некоторое подмножество множества R^3; соответственно, точка $M \in D \subset R^3$; $M(x,\ y,\ z)$ – точка трехмерного пространства R^3;

4) для функции n переменных $u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$:

D – некоторое подмножество n-мерного пространства R^n и точка $M(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \in D \subset R^n$.

Например:

$y = e^{2x-1}$ – функция одного аргумента: x;

$z = 2x^2y - 3x + y^3$ – функция двух аргументов: x, y;

$u = 2z - \sin x - y^3$ – функция трех аргументов: z, x, y.

Геометрически область определения D изображается:

- для функций одной переменной – отрезком, интервалом;
- функций двух переменных – частью плоскости Oxy или всей этой плоскостью;
- функций трех переменных – частью пространства R^3 или всем пространством.

Пример 2.

Найти $f(1);\ f(a);\ f\left(\frac{1}{t}\right)$, если $f(x)=\frac{x^2-1}{x(x+3)}$.

Решение:

$$f(1)=\frac{1-1}{1\cdot(1+3)}=0;\quad f(a)=\frac{a^2-1}{a(a+3)}=\frac{a^2-1}{a^2+3a};$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+3\right)}=\frac{1-t^2}{1+3t}.$$

Пример 3.

Найти область определения функций одной переменной:

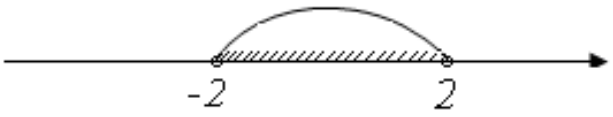
а) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

б) $y=\lg(4-2x)$.

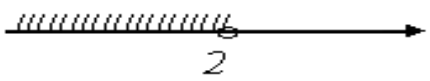
Решение:

а) область определения D определяется неравенством $4-x^2>0;\ x^2<4$ или $|x|<2,\quad -2<x<2$.

Итак, D:



б) D: $4-2x>0$ или $x<2$.



Итак, D: $-\infty<x<2$.

Пример 4.

Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{5}};$

б) $y=\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+3}}+\dfrac{1}{2x-8};$

в) $y=\log_2(x^2-4x).$

Решение:

а) область определения $D(y)$:

$$\left.\begin{array}{l}4-x\ge 0\\ \dfrac{2x-3}{5}\ge 0\end{array}\right\}$$

или $\left.\begin{array}{l}-x\ge -4\\ 2x-3\ge 0\end{array}\right\};\qquad \left.\begin{array}{l}x\ge 4\\ x\ge \dfrac{3}{2}\end{array}\right\}.$

Итак, D: $1{,}5\le x\le 4$;

б) $D(y)$: $\begin{cases}2x-8\ne 0,\\ \dfrac{2x-4}{x+3}\ge 0\end{cases}.$

Решая неравенство методом интервалов, найдем нули:

$2x-4=0$ или $x=2$;

$x+3\ne 0$ или $x\ne -3$ и $x\ne -4$.

Итак, $D(y)$: $x\in(-\infty;-3)\cup[2;4)\cup(4;+\infty)$;

в) $D(y)$: $x^2-4x>0.$

Решим неравенство: $x^2-4x=0;\ x(x-4)=0;\ x=0;$ и $x=4.$

Итак, $D(y)$: $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Пример 5.

Найти область определения функций двух переменных и сделать чертеж:

а) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

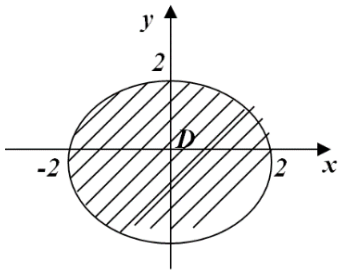
б) $z = \ln\left(1 - x^2 - y\right)$;

в) $z = \arcsin\dfrac{x+y}{2}$.

Решение:

а) очевидно, что область определения D определяется неравенством $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 0$.

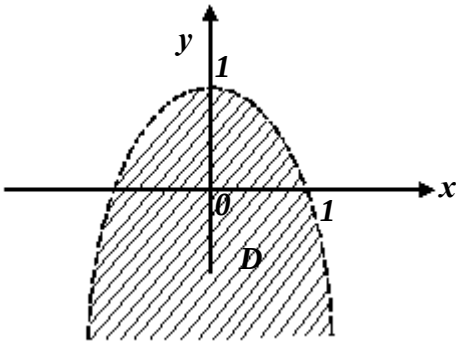
Граница области $x^2 + y^2 = 4$ есть окружность радиуса $r = 2$ с центром в начале координат, а область определения $D: x^2 + y^2 = 4$ есть множество точек плоскости *Oxy*, принадлежащих кругу радиуса $r = 2$ с центром в начале координат:



б) D: $1 - x^2 - y > 0$ или $y < 1 - x^2$.

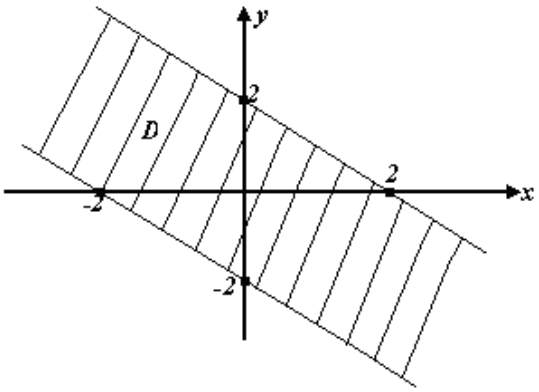
Уравнение $y = 1 - x^2$ определяет границу области D, ею является парабола, ветви которой направлены вниз и вершина в точке $(0; 1)$.

Неравенство $y < 1 - x^2$ определяет все точки плоскости, лежащие внутри параболы и не принадлежащие самой параболе:



в) известно, что функция $\arcsin t$ определена, если ее аргумент t удовлетворяет неравенству $|t| \le 1$, следовательно, функция $z = \arcsin \dfrac{x+y}{z}$ определена, если $\left|\dfrac{x+y}{z}\right| \le 1$. Решая неравенство, найдем $|x+y| \le 2$ или $-x-2 \le y \le 2-x$. Таким образом, границей области D являются прямые $y = 2-x$ и $y = -x-2$.

Изобразим на плоскости множество точек, удовлетворяющих двойному неравенству D: $-x-2 \le y \le 2-x$.



1.3. Способы задания функций

Известны различные способы задания функции:

- *графический*: график функции дает наглядное представление о зависимости между переменными. Например, в медицине это кардиограммы, электроэнцефалограммы, а в экономике графически изображают колебания акций на рынке ценных бумаги и другие экономические процессы;
- *табличный*: с помощью таблицы, в которой указаны значения одного или нескольких аргументов (факторов) и значения зависимой от них функции;
- *аналитический*: с помощью уравнений (формул).

Существуют различные формы ***аналитического задания*** функции:

- функция задана **явно**, то есть она задается уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной:

$y = f(x)$; например, $y = \sqrt{4-x^2}$;

$z = f(x,\ y)$; например, $z = 3x^2 + y^2x^3 + 5$;

$u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$; например, $u = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$;

- функция задана **неявно**, в этом случае она задается уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной:

$F(x,\ y) = 0;\ F(x,\ y,\ z) = 0;\ F(u,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0.$

Например: $x^2 + y^2 = 0;$ $\sin xy + \ln z^2 + z = 0;$

$\sqrt{ln\,u - x_1^3 - x_2^3 - \ldots - x_n^3} = 0;$

- функция задана **параметрически**, в этом случае ее аргументы и зависимая переменная выражается через некоторый параметр t:

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ – параметрическое задание функции одной переменной

$y = f(x);\ \ t_1 \le t \le t_2;$

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ – параметрическое задание функции двух переменных

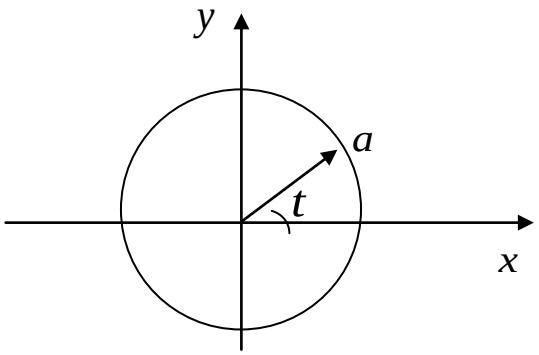
$z = f(x,\ y).$

Пример 6.

Написать параметрическое уравнение функции, заданной неявно $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

Известно, что $x^2 + y^2 = a^2$ – это уравнение окружности радиуса a с центром в точке $(0; 0)$.



Из геометрических рассуждений, очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\cos t \\ y &= a\cdot\sin t \end{aligned}\right\} \text{ при } 0\le t\le 2\pi,$$

таким образом, мы получили параметрическое уравнение окружности:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\cos t \\ y &= a\cdot\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Пример 7.

Функция задана параметрически $\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\cos t \\ y &= b\cdot\sin t \end{aligned}\right\}$ и $0\le t\le 2\pi$.

Найти неявную форму задания функции.

Решение.

Надо исключить параметр t, для этого возведем в квадрат обе части каждого из уравнений: $\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2\cos^2 t \\ y^2 &= b^2\sin^2 t \end{aligned}\right\}$, преобразуем $\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \cos^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} &= \sin^2 t \end{aligned}\right\}$.

Сложим левые и правые части этих уравнений, получим каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Функцию можно задать и несколькими формулами:

$$u = u(M) = \begin{cases} f_1(M), \ \textit{если } M\in D_1 \\ f_2(M), \ \textit{если } M\in D_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(M), \ \textit{если } M\in D_k \end{cases}.$$

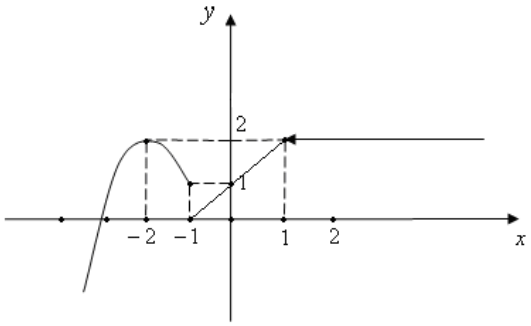
Например, неэлементарная функция рассматривается в следующей задаче.

Пример 8.

Построить график функции

$$y=\begin{cases}2-(x+2)^2, & -\infty<x\le 1,\\ x+1, & -1<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}.$$

Решение:



Пример 9.

Найти и построить график функции подоходного налога $y(x)$, если доход $x\le k$, то y составляет 8 % от x; если доход $k<x<t$, то налог взимается по ставке 20 % от дохода, превышающего k, если доход $x\ge t$, то ставка 40 %.

Решение.

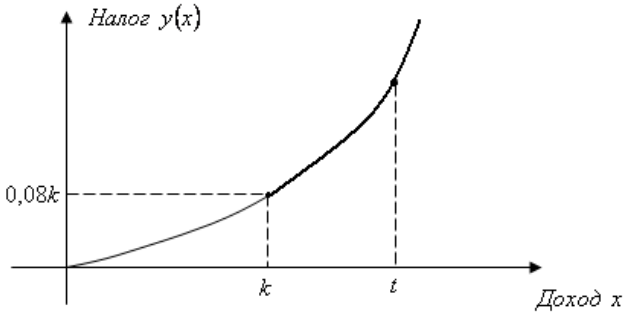
Найдем аналитическое выражение для функции $y(x)$, по условию задачи функцию можно описать тремя различными формулами:

$$y(x)=\begin{cases}0,08x, & \text{если } 0<x\le k;\\ 0,08x+0,2(x-k), & \text{если } k<x<t;\\ 0,08x+0,2(x-k)+0.4(x-t), & \text{если } x\ge t\end{cases}$$

или

$$y(x)=\begin{cases}0,08x, & \text{если } 0<x\le k;\\ 0,28x-0,2k, & \text{если } k<x<t;\\ 0,68x-0,2k-0,4t, & \text{если } x\ge t\end{cases}.$$

Построим график функции $y(x)$:



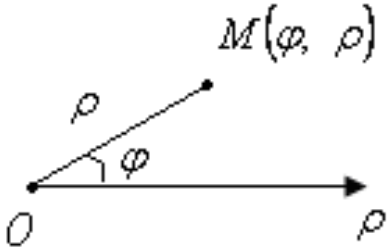
Векторная функция: если каждому значению аргумента t соответствует единственный радиус – вектор $\vec{r}$, тогда $\vec{r}=\vec{r}(t)$ называется ***векторной функцией скалярного аргумента*** t (см. раздел 2.6).

В прямоугольной системе координат на плоскости вектор-функцию можно записать в виде $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}$, например, $\vec{r}(t)=t^2\cdot\vec{i}+(2t+1)\cdot\vec{j}$.

Часто функцию задают в **полярной системе координат**, а не в прямоугольной системе координат.

Полярной системой координат называют совокупность фиксированной точки O, называемой ***полюсом***, и луча, выходящего из этой точки, называемого ***полярной осью.***

В этой системе координат любая точка M определяется полярными координатами: ***полярным углом*** φ ***и радиусом*** ρ:

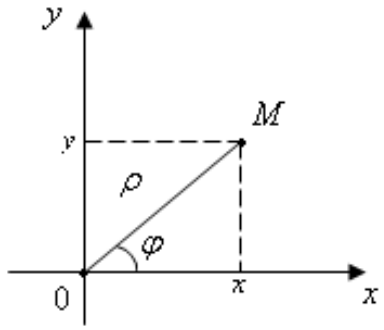


Функция в полярной системе координат задается уравнением:

в неявной форме: $F(\rho;\phi)=0;$

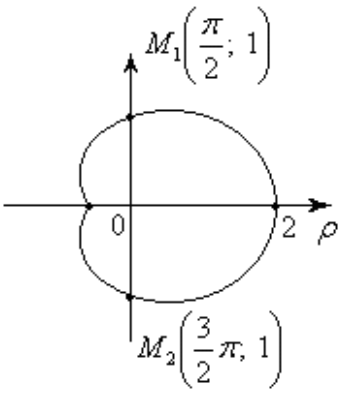
в явной форме: $\rho=f(\phi)$, где $\phi_1\le\phi\le\phi_2$.

Если прямоугольную и полярную системы координат совместить таким образом, что начала этих систем совпадают, и полярная ось совмещена с осью *Ox*, то зависимость между координатами любой точки M выражается следующими формулами:



$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi\\y&=\rho\sin\varphi\end{aligned}\right\}\quad\text{или}\quad\left.\begin{aligned}\varphi&=arctg\frac{y}{x}\\\rho&=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}$$

Например, уравнение $\rho=1+\cos\phi,\quad 0\le\phi\le2\pi$, описывает линию, называемую ***кардиоидой,*** график которой имеет вид



Контрольное упражнение

Найти уравнение кардиоиды $\rho = 1 + \cos\phi$ в декартовой прямоугольной системе координат.

1.4. Свойства функции одной переменной

Рассмотрим некоторые свойства функции одной переменной $y = f(x)$.

1. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого $x \in D$ выполняется условие

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy. Например, функции $y = x^2, y = \sqrt{x^2 - 3}, y = \cos x$ являются четными.

2. Функция называется **нечетной**, если для любого $x \in D$ выполняется

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примерами нечетной функции являются $y = x^3,\ y = \sin x.$

Область определения D четной и нечетной функции симметрична относительно начала координат. Если это условие не выполнено, то функция не является четной и не является нечетной.

3. Функция $y = f(x)$ называется **периодической,** если существует такое положительное число T, что при любом значении $x \in D$ выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x),$$

где число T называют *периодом* функции.

Например, функции $y=\sin x,\ y=\cos x$ являются периодическими с периодом $T=2\pi$; функции $y=tgx,\ y=ctgx$ имеют период $T=\pi$.

4. Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на множестве $x\subset D$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть для любых $x_1\in D,\ x_2\in D$, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

5. Функция $y=f(x)$ называется **убывающей** на множестве D, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, если $x_1<x_2$, то $f(x_1)>f(x_2)$ для любых $x_1\in D,\quad x_2\in D$.

Например, функция $y=x^2$ является убывающей на множестве $X=(-\infty,0)$, а на множестве $X=(0,+\infty)$ эта функция является возрастающей.

Пример 10.

Исследовать на четность функцию: $y=x^3\cdot\sin x$.

Решение.

Функция четная, если $f(x)=f(-x)$.

Найдем $f(-x)=(-x)^3\cdot\sin(-x)=x^3\cdot\sin x=f(x)$.

Следовательно, функция $y=x^3\cdot\sin x$ – четная.

1.5. Основные элементарные функции, их графики

Особую роль в математическом анализе играют элементарные функции.

Основными элементарными функциями называют:

1) *степенную* функцию $y=x^{\alpha}$;

2) *логарифмическую* функцию $y=\log_{\alpha}x\left(a>0,a\neq1\right)$;

3) *показательную* функцию $y=a^x,\left(a>0,a\neq1\right)$;

4) *тригонометрические* функции: $y=\sin x,\ y=\cos x,$ $y=tgx,\ y=ctgx;$

5) *обратные тригонометрические* функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

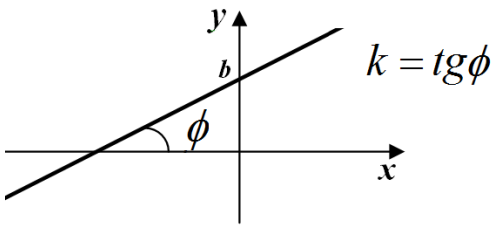
Функцию называют **элементарной**, если ее аналитическое выражение составлено из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции суперпозиции (функции от функции), примененных конечное число раз.

Например, функции $y=\sin x+\sqrt{tg^3x-e^x}$, $y=\dfrac{\cos^2 x}{x^2+3x+5}$, являются элементарными, а функция $y=\begin{cases}\cos x, & \text{если } x\le\pi,\\ x^2+1, & \text{если } x>\pi\end{cases}$ элементарной не является.

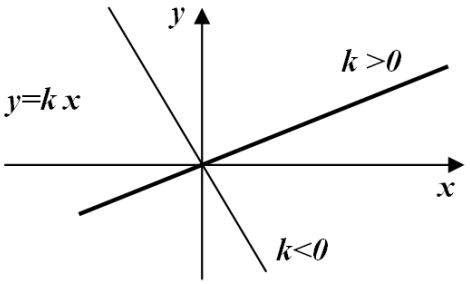
Графики основных элементарных функций

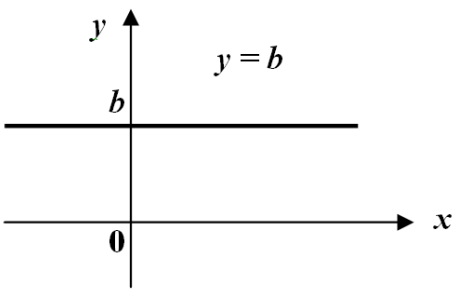
Алгебраические функции

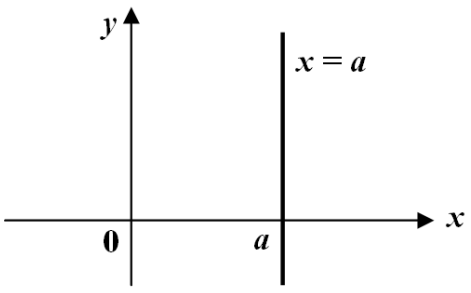
1. **Линейная** функция $y=kx+b$. Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$. Область значений $y\in(-\infty;+\infty)$.



Частные случаи:

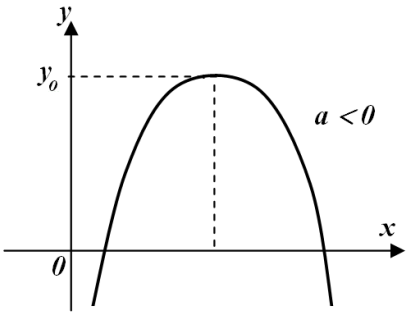


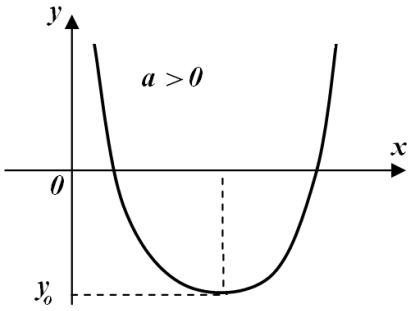




2. **Квадратичная** $y = ax^2 + bx + c$.

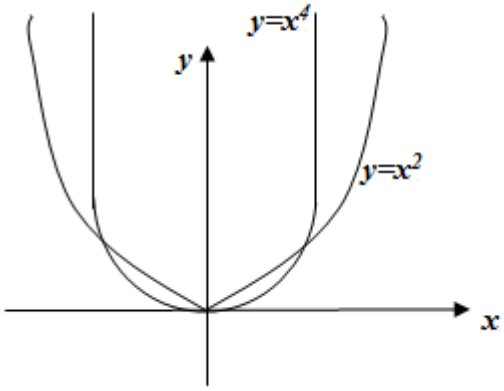
Область определения $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Область значений: $y \in [y_0;\ +\infty)$ при $a > 0$. Или $y \in (-\infty;\ y_0]$ при $a < 0$, где $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

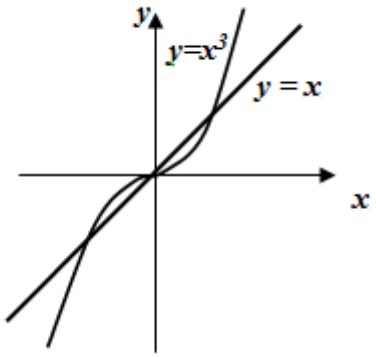




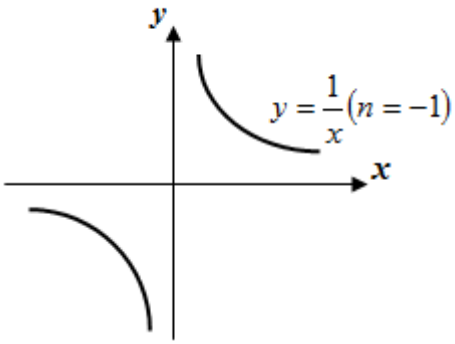
3. **Степенная** $y = x^n$.

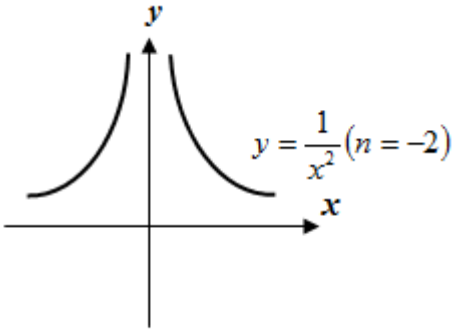
Для $y = x^n$, $n \in N$ область определения $x \in (-\infty; +\infty)$, а область значений $y \in [0; +\infty)$ при n четном. Или $y \in (-\infty; +\infty)$ при n нечетном.



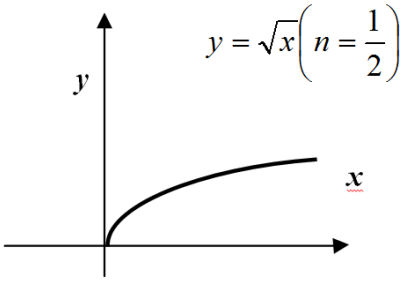


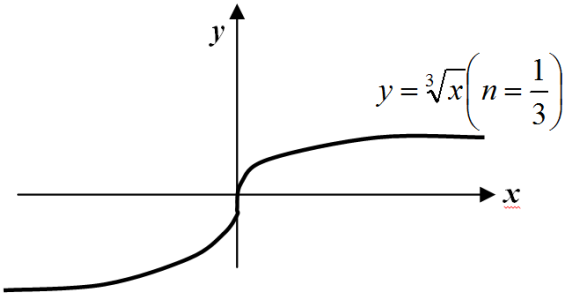
Для $y = x^{-n}$, $n \in N$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $y \in (0; +\infty)$ при n четном. Или $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ при n нечетном.





Для $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$, при n четном $x \in [0;+\infty)$, $y \in [0;+\infty)$; при n нечетном $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (-\infty;+\infty)$.

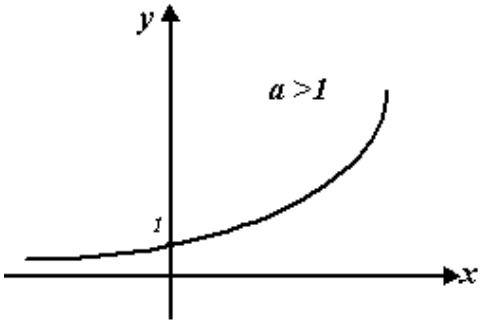


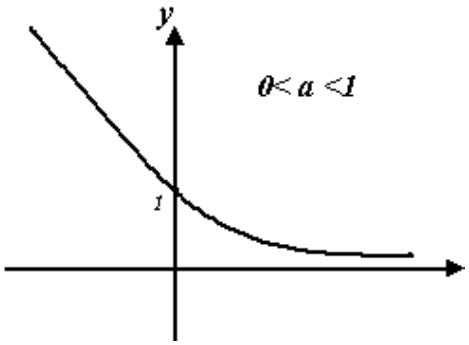


Трансцендентные функции

1. **Показательная** $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$.

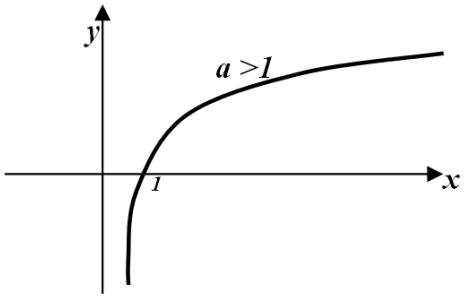
Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$; область значений функции $y \in (0;+\infty)$.

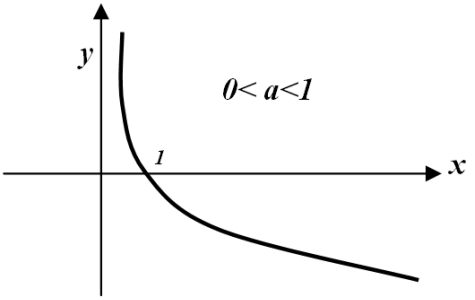




2. **Логарифмическая** $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

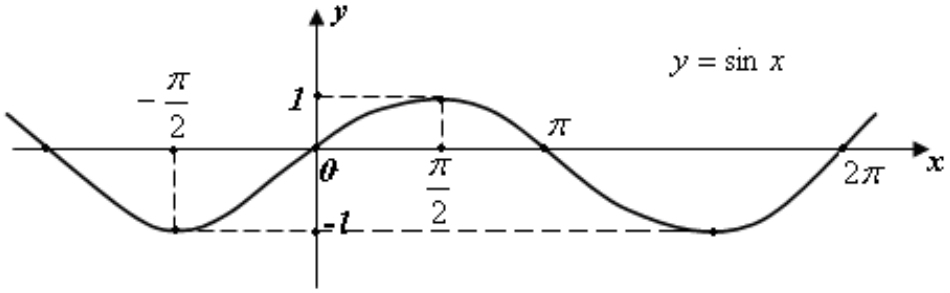
Область определения $x \in (0;+\infty)$; область значений функции $y \in (-\infty;+\infty)$.





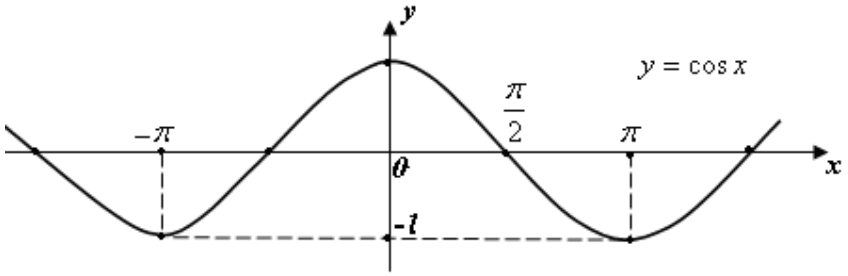
3. **Синус** $y = \sin x$.

Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in [-1;\ 1]$. Периодическая, с периодом 2π; нечетная.



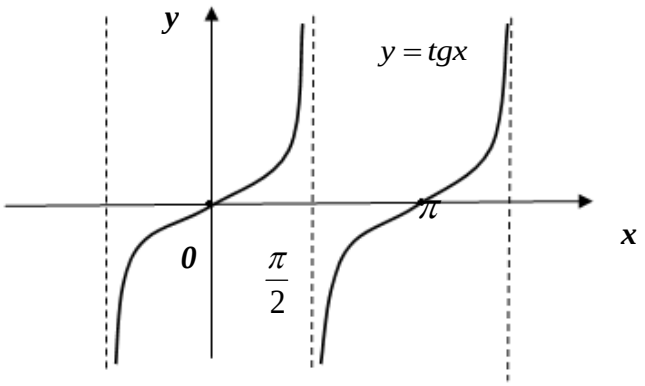
4. **Косинус** $y = \cos x$.

Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in [-1;\ 1]$. Периодическая, с периодом 2π; четная.



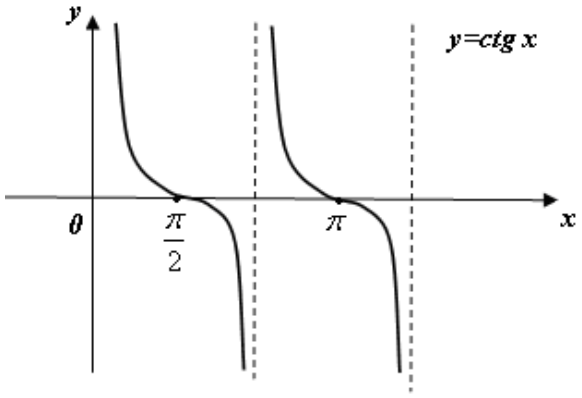
5. **Тангенс** $y = tgx$.

Область определения $x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$. Периодическая, с периодом π; нечетная.



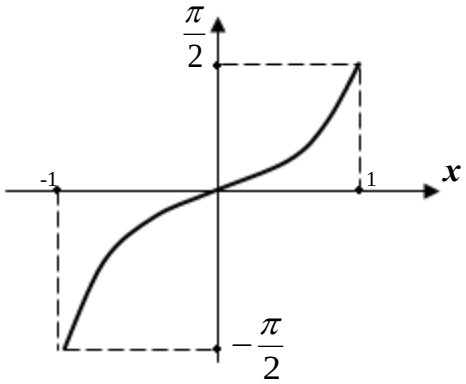
6. **Котангенс** $y = ctgx$.

Область определения $x \in R,\ x \neq \pi k,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,...$ Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$. Периодическая, с периодом π; четная.

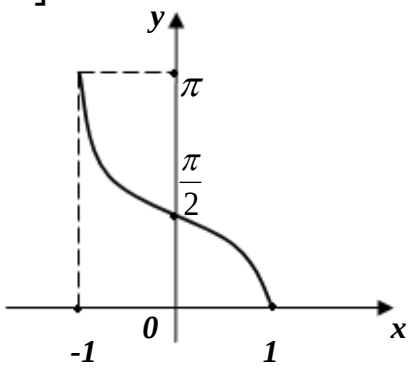


7. **Арксинус** $y = \arcsin x$.

Область определения $x \in [-1;\ 1]$ Область значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; нечетная.

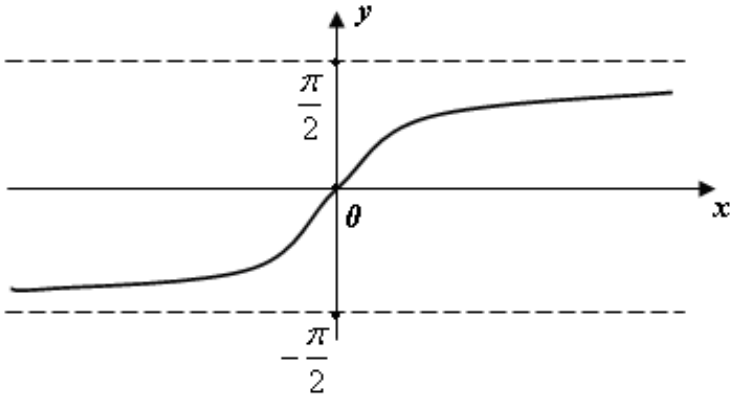


8. **Арккосинус** $y = \arccos x$. Область определения $x \in [-1;\ 1]$. Область значений $y \in [0;\ \pi]$.



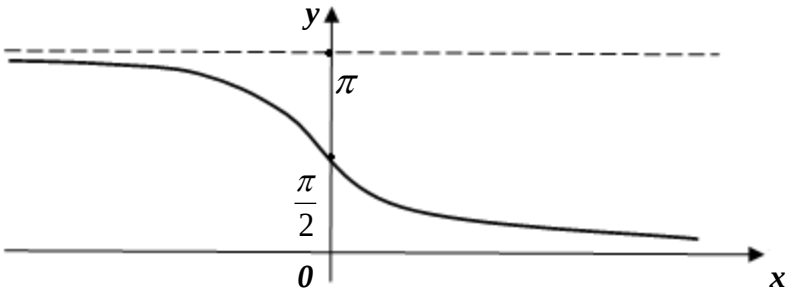
9. **Арктангенс** $y = arctgx$.

Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений: нечетная, возрастающая.



10. **Арккотангенс** $y = arcctgx$.

Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in (0;\ \pi)$, убывающая.



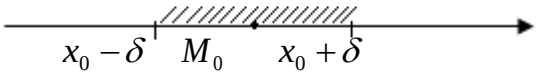
1.6. Предел функции в точке

Предел функции – фундаментальное понятие в математическом анализе, с его помощью определяется в дальнейшем непрерывность функции, производная, интеграл, сумма ряда.

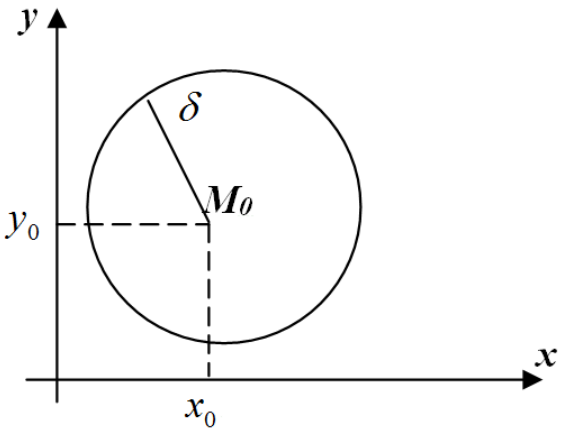
Пусть функция $u = f(M)$ определена на некотором множестве D. M_0 – фиксированная точка.

Говорят, что M_0 есть **предельная точка** множества D, если в любой окрестности этой точки содержится бесконечное множество точек $M \in D$.

Для функции одной переменной $u = f(x)$ в разделе 1.1 была определена δ – окрестность точки $M_0(x_0)$ – это интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, то есть все x, удовлетворяющие неравенству $|x - x_0| < \delta$.



Для функции двух переменных $u = f(M) = f(x,\ y)$, *δ – окрестность точки* M_0 – это круг радиуса δ с центром в точке $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$; обозначают $\rho = |M_0M| < \delta$, в координатах можно записать $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le \delta^2$.



Для функции трех переменных $f(M) = f(x,\ y,\ z)$ – это шар радиуса δ с центром в точке $M(x_0; y_0; z_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le \delta^2$; обозначают δ – окрестность, аналогично $\rho = |M_0M| < \delta$.

Для функции большего числа аргументов окрестность точки $\mathrm{M}_0\left(\underbrace{x_0, y_0, \ldots, z_0}_{n}\right)$ аналитически можно определить аналогичным образом: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \ldots + (z - z_0)^2 \le \delta^2$.

Во всех случаях δ – главный параметр, определяющий размеры окрестности точки M_0, поэтому эти окрестности называют *δ– окрестностями точки.*

Замечание.

Предельная точка M_0 множества D может как принадлежать, так и не принадлежать ему. Например, для множества D: $0<x<1$ предельными точками являются:

$x_0=\frac{1}{2}$, очевидно, что $x_0 \in D$;

$x_1=0$, очевидно, что $x_1 \notin D$;

$x_2=1$, которое также не принадлежит D, $x_2 \notin D$.

В математическом анализе часто используются ***символы математической логики:***

$\forall$ – *квантор общности*, используется вместо слова «любой»;

$\exists$ – *квантор существования*, используется вместо слов «существует», «найдется».

Например:

а) $\forall\ x>0,\ x \in D$ эту запись можно прочитать так: «любое положительное число x, принадлежащее области D»;

б) запись $\exists\ n_0<10,\ n_0 \in N$ можно прочитать: «найдется число n_0, меньше 10, принадлежащее множеству натуральных чисел»;

в) запись $\forall x,\ x \to x_0$ читается: «любое x стремится к x_0».

Рассмотрим функцию $u=f(M)$, определенную в области D, и пусть M_0 – предельная точка множества D.

Определение.

Число А называется ***пределом функции*** $u=f(M)$ при $M \to M_0$ произвольным образом, если для любого как угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta>0$, как угодное малое, что для всех точек M, удовлетворяющих условию $0<\rho=|M_0M|<\delta$, выполняется также неравенство $|f(M)-A|<\varepsilon$.

Обозначают $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)=A$.

Используя логические символы, данное определение можно записать таким образом: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, что для $\forall\ M,\ M \neq M_0$, как только $\rho=|M_0M|<\delta$, выполняется $|f(M)-A|<\varepsilon$.

В частности:

1) для функции одной переменной $y=f(x)$; $M_0(x_0)$ – предельная точка.

Определение предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ можно записать таким образом: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, что для $\forall\ x,\ x\neq x_0$: как только $|x-x_0|<\delta$ выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$;

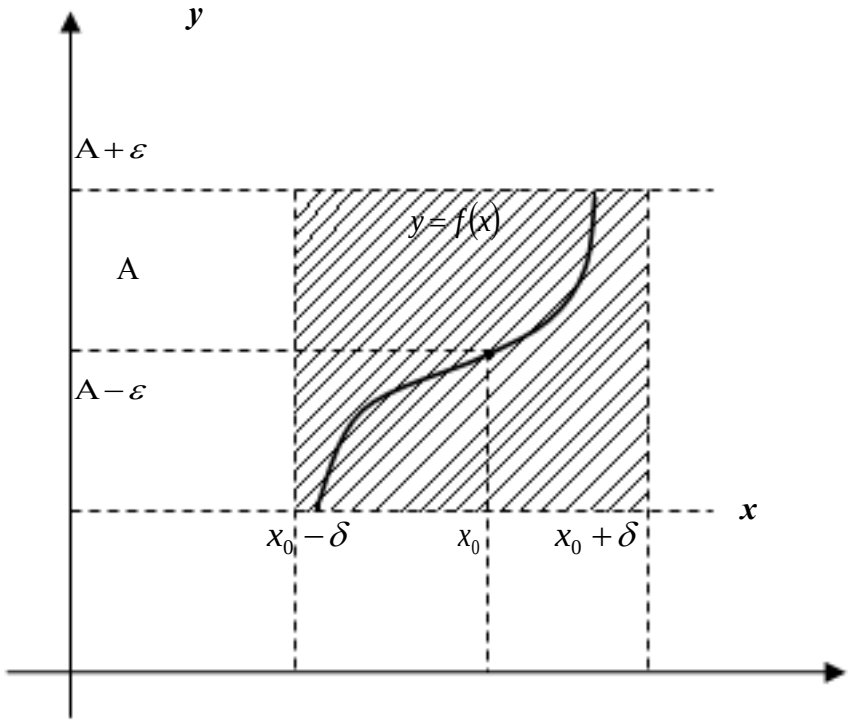
2) для функции двух переменных $Z=f(x,\ y)$; $M_0(x_0,\ y_0)$ – предельная точка. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A$ можно записать таким образом: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, что для $\forall\ M(x,\ y),\ M\neq M_0$, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется $|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$.

Геометрический смысл предела функции в точке рассмотрим на примере функции одной переменной $y=f(x)$.

Неравенство $|x-x_0|<\delta$ равносильно двойному неравенству $x_0-\delta<x<x_0+\delta$. Это означает, что точки x попадают в δ – окрестность точки x_0, то есть в интервал длиной 2δ.

Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

Геометрически это соответствует, что точки графика функции $f(x)$ расположены в полосе, шириной 2ε.



Замечание.

Для существования предела функции совсем не обязательно, чтобы функция была определена в точке M_0, но она должна быть обязательно определена в ее окрестности.

Так, например, функция $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ не определена при $x=3$. Однако можно доказать, что при $x\to 3$ ее предел существует и равен 6.

Доказательство.

Достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что будет выполнять неравенство $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|<\varepsilon$, если $|x-3|<\delta$.

Действительно, имеем $\left|\dfrac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|(x+3)-6|=|x-3|<\varepsilon$.

Если принять $\delta=\varepsilon$, то задача решена.

1.7. Односторонние пределы функции одной переменной. Теорема существования предела

Предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ называется *левосторонним* и обозначается $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x<x_0} f(x)$,если точка x остается все время слева от x_0, что означает выполнение неравенства $x<x_0$.

Аналогично определяется и обозначается *правосторонний предел*: $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x>x_0} f(x)$.

Теорема о существовании предела

Функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный A, тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы в точке x_0, и они равны между собой и равны числу A.

Запишем кратко данную теорему:

$\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, тогда и только тогда, когда:

1) $\exists\ f(x_0+0),\ f(x_0-0)$;

2) $f(x_0-0)=f(x_0+0);$

3) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$

1.8. Бесконечно малые функции, их классификация

Важное значение в дальнейшем имеют функции, пределы которых в точках равны нулю.

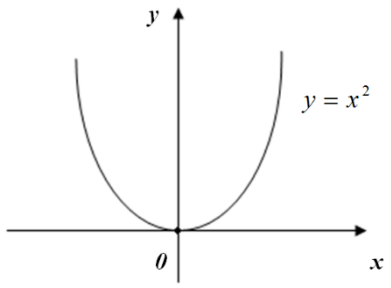
Определение.

Функция $f(M)$ называется ***бесконечно малой в точке*** M_0, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=0.$

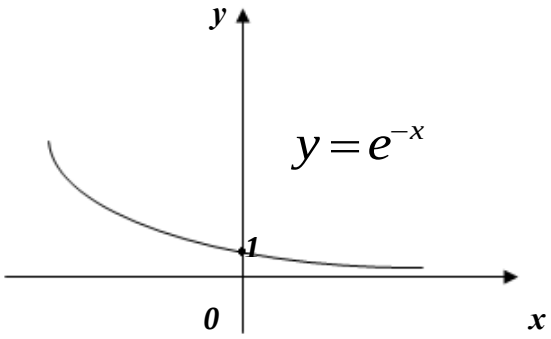
Используя определение предела, функцию можно записать: $f(M)$ называется *бесконечно малой в точке* M_0, если для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$, что для $\forall\,M\neq M_0$, как только $\rho=|MM_0|<\delta$, выполняется $|f(M)|<\varepsilon$.

Например:

1) функция $y=x^2$ в точке $x_0=0$ является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0;$



2) функция $y=e^{-x}$ при $x\to+\infty$ является бесконечно малой, действительно $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0.$



Классификация бесконечно малых функций

Если $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A$, причем $A\neq 0$ и $A\neq\infty$, то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка малости* (скорости приближения α и β к нулю являются почти равными).

Если $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то α – бесконечно малая *более высокого порядка малости*, чем β (α приближается к нулю быстрее, чем β). Обозначают $\alpha=o(\beta)$.

Если $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми в окрестности точки* M_0 (α и β приближаются к 0 с одной скоростью). Обозначают: $\alpha\sim\beta$.

Отметим следующие свойства бесконечно малых величин:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.
3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

1.9. Бесконечно большие функции одной переменной, их связь с бесконечно малыми

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на множество D, x_0 – предельная точка множества D.

Определение.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** *при* $x\to x_0$, если для любого сколь угодно большого положительного числа $K>0$ найдется такое положительное число $\delta>0$, зависящее от K, что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, будет верно неравенство $|f(x)|>K$.

Запись того, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, следующая:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ или } f(x) \to \infty \text{ при } x \to x_0.$$

Краткая запись этого определения: функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, если для $\forall K > 0 \; \exists \delta > 0$, что $\forall x,\ x \neq x_0$; $|x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x)| > K$.

Упражнение 1. Запишите определение предела функции, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Упражнение 2. Запишите определение предела функции, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Пример 11.

Изобразите графически следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0;$

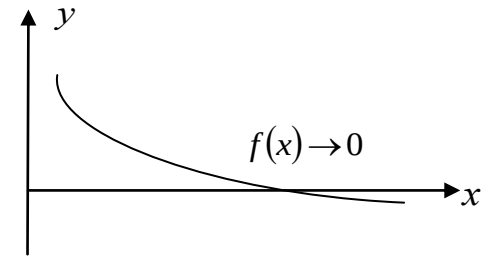
б) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty;$

в) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty;$

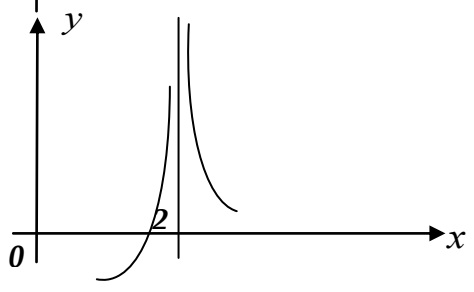
г) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = 1, \\ \lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0. \end{cases}$

Решение:

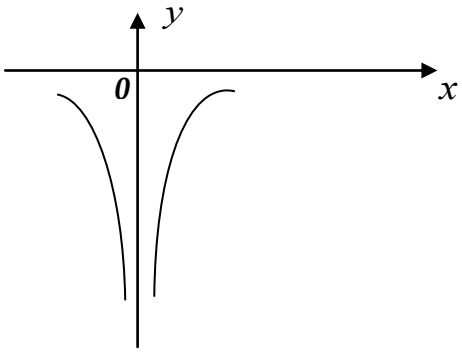
а)



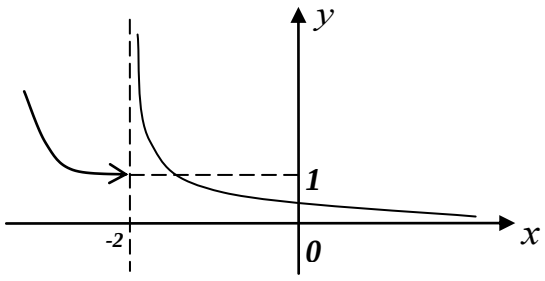
б)



в)



г)



Для бесконечно больших функций имеют место следующие свойства: если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, ($A\neq 0$, $A\neq\infty$), тогда:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot h(x)]=\infty$;

4) связь между бесконечно малой $\alpha(x)$ и бесконечно большой $f(x)$ функциями отметим в следующем свойстве: если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$.

И обратно, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ есть величина бесконечно малая при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$.

То есть, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$.

И наоборот, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Например, $\alpha(x)=\sin x$ является бесконечно малой при $x\to 0$, тогда $\dfrac{1}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{\sin x}\to\infty$, то есть является бесконечно большой при $x\to 0$.

Пример 12.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x}{\sin x}$.

Решение: функция $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ является бесконечно большой при $x\to 0$.

Предел функции $g(x)=2-x$ равен $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$.

Согласно свойству $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$, имеем $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\sin x}\cdot(2-x)]=\infty$.

1.10. Теоремы о пределах

Пусть $f(x)$ и $\phi(x)$ – функции, для которых существуют пределы при $x\to x_0$ (или при $x\to\infty$): $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=B$.

Сформулируем основные теоремы о пределах:

1. *Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, то есть*

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+\phi(x)\right]=A+B.$$

2. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, то есть*

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\phi(x)\right]=A\cdot B.$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=c\cdot A$.

3. *Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций* (при условии, что предел делителя не равен нулю), *то есть*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).$$

4. *Если* $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=u_0$, *то предел сложной функции* $f[\phi(x)]$ равен

$$\lim_{x\to x_0} f\left[\phi(x)\right]=A.$$

5. *Теорема о переходе к пределу в неравенстве.*

Если в некоторой окрестности точки x_0 $f(x)<\phi(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)$.

6. *Теорема о пределе промежуточной функции*.

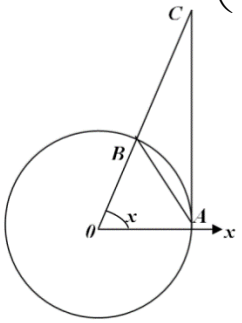
Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел – число A, то функция $f(x)$ имеет тот же предел A, то есть, если $\phi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

1.11. Замечательные пределы

Можно доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin x$ и x являются эквивалентными бесконечно малыми функциями: $\sin x\sim x$, то есть имеет место предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, который называют ***первым замечательным пределом.***

Доказательство.

Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть OB – подвижный радиус, образующий угол x $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ с осью Ox.



Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, которая в свою очередь меньше площади треугольника AOC, то есть $S_{\Delta AOB} < S_{сект.AOB} < S_{\Delta AOC}$.

Так как $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x$, $S_{сект.AOB} = \frac{1}{2} R^2 x$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} AO \cdot (AO \cdot tgx) = \frac{1}{2} R^2 tgx$, то имеем $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 tgx$, откуда, разделив все части двойного неравенства на $\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Переходя к пределу при $x \to 0$, получим $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$.

На основании теоремы о пределе промежуточной функции получим $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Замечание 1.

Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Замечание 2.

Итак, мы показали, что $\sin x$ и x являются эквивалентными бесконечно малыми функциями: $\sin x \sim x$.

Можно показать, что *эквивалентными бесконечно малыми* функциями также будут

$$tgx \sim x,$$
$$\arcsin x \sim x,$$
$$arctgx \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x.$$

На практике при решении задач часто используют следующее правило: *при вычислении пределов произведения функций одну бесконечно малую функцию можно заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией в этой же точк*е (см. пример 18 в п.1.12.)

Пример 13.

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot \arcsin 5x}{tg7x^2}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\frac{3}{2}\cdot 4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{1}{4}\cdot x^2\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2};$

в) используя бесконечно малые функции при $x\to 0$ $tg7x^2\sim 7x^2$, $\arcsin 5x\sim 5x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot \arcsin 5x}{tg7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 5x}{7x^2}=\ =\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

Вторым замечательным пределом называют

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ } \textit{или} \text{ } \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,$$

где число e = 2,71828… – иррациональное число, называемое *неперовым числом,* так как найдено Непером в XVII веке.

Число e находит применение в математическом анализе, является основанием натуральных логарифмов.

График функции $y=e^x$ получил название *экспоненты.* Широко используются логарифмы по основанию e, называемые *натуральными*. Натуральные логарифмы обозначаются символом $\ln$: $\log_e x=\ln x$.

Пример 14.

Найти: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot 3x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+(-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-3y\cdot\frac{2}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+(-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-6}=e^{-6}.$

1.12. Техника вычисления пределов

При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ часто встречаются следующие неопределенности: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0 и другие.

Приведем некоторые правила вычисления пределов в этих случаях:

1. Если $f(x)$, $g(x)$ – многочлены и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$, то необходимо разделить числитель и знаменатель данной дроби на x в старшей степени.

Пример 15.

Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{1-4x^3}$.

Решение: разделим числитель и знаменатель данной дроби на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{1-4x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3\cdot\left(\frac{1}{x^3}-4\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}-4}=\frac{1+0}{0-4}=-\frac{1}{4}.$$

2. Если $f(x)$, $g(x)$ – многочлены и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, то необходимо числитель и знаменатель данной дроби разложить на множители и сократить на $(x-x_o)$.

Пример 16.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x-4}$.

Решение.

Числитель и знаменатель данной дроби разложим на множители и сократим на $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

3. Если $f(x)$, $g(x)$ содержат иррациональные выражения $(\sqrt{x}-\sqrt{a})$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$, то необходимо умножить числитель и знаменатель данной дроби на сопряженный множитель $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ и воспользоваться известной формулой $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})=x-a$.

Пример 17.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x+2}}{x-x^2}$.

Решение.

Числитель и знаменатель данной дроби умножим на сопряженный множитель $\sqrt{2}+\sqrt{x+2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+2}}{x-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}{(x-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-(x+2)}{(x-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1-x)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1-x)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=\frac{-1}{1\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4. Если $f(x)$, $g(x)$ – тригонометрические функции и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$, то можно использовать эквивалентные бесконечно малые функции (см. замечание 2 в п. 1.10):

$tgx \sim x$,

$\arcsin x \sim x$,

$arctgx \sim x$,

$\ln(1+x) \sim x$.

Пример 18.

Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 4x}{x\arcsin 8x}$.

Решение:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg4x}=\frac{0}{0}=\left|\begin{matrix}\sin 5x\sim 5x\\ tg4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 4x}{x\arcsin 8x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x\arcsin 8x}=\left|\begin{matrix}\sin 4x\sim 4x\\ \arcsin 8x\sim 8x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(4x)^2}{x\cdot 8x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{8x^2}=2.$$

1.13. Непрерывность функции в точке, на отрезке, в области

Функция $u=f(M)$ называется ***непрерывной в точке*** M_0, если она определена в этой точке, и ее окрестности и $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Функция $u=f(M)$ называется ***непрерывной в области*** D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Функция одной переменной $y=f(x)$ ***называется непрерывной на интервале*** $(a;b)$ ***или на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала или этого отрезка.

Для функции одной переменной $y=f(x)$ определение непрерывности в точке, используя теорему о существовании предела, можно сформулировать таким образом: функция $y=f(x)$ является ***непрерывной в точке*** $x=x_0$, если:

1) функция определена в этой точке $x=x_0$ и ее окрестности;

2) существуют односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x);$

3) односторонние пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$

Данное определение часто используют на практике при исследовании функции на непрерывность.

Приведем краткую запись определения непрерывности функции в точке x_0:

$$f(x) - \text{непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x_0 \in \textit{областиопределения } D, \\ 2)\ \exists\ \textit{односторонние пределы } f(x_0 \pm 0), \\ 3)\ f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0). \end{cases}$$

Из определения непрерывности функции в точке x_0 следует, что символы предела и функции можно переставить, если функция непрерывна в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right).$

Рассмотрим свойства функций непрерывных в точке.

Теорема **(об арифметических операциях над непрерывными функциями в точке):** если функции $f_1(M),\ f_2(M)$ непрерывны в точке M_0, то будут непрерывными в этой точке также функции:

1) *алгебраическая сумма функций* $f_1(\mathrm{M}) \pm f_2(\mathrm{M});$

2) *произведение функций* $f_1(\mathrm{M}) \cdot f_2(\mathrm{M});$

3) *произведение функции на костанту* $K \cdot f_1(\mathrm{M});$

4) *отношение функций* $\dfrac{f_1(\mathrm{M})}{f_2(\mathrm{M})}$, *при* $f_2(\mathrm{M}) \neq 0.$

Теорема **(о непрерывности сложной функции)**: пусть функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

1.14. Точки разрыва функции одной переменной, их классификация

В предыдущем разделе введено понятие функции непрерывной в точке: функция $y = f(x)$ является ***непрерывной в точке*** $x = x_0$:

1. Если она определена в этой точке $x = x_0$ и ее окрестности.
2. Существуют односторонние пределы:

$$f(x-0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x);$$
$$f(x+0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

3. Односторонние пределы равны и равны значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Таким образом, для непрерывной функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $f(x-0) = f(x+0) = f(x_0)$.

Функция имеет ***точку разрыва***, если хотя бы одно из условий (или 1, или 2, или 3) не выполнено в точке x_0.

Пример 19.

Исследовать на непрерывность функции: $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Решение.

Найдем область определения $D: x^2 - 4 \neq 0; \quad x \neq \pm 2$. Итак, $D: x \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

В точках $x = -2$ и $x = 2$ функция не определена, нарушено условие 1 определения непрерывности, следовательно, точки $x = \pm 2$ являются точками разрыва.

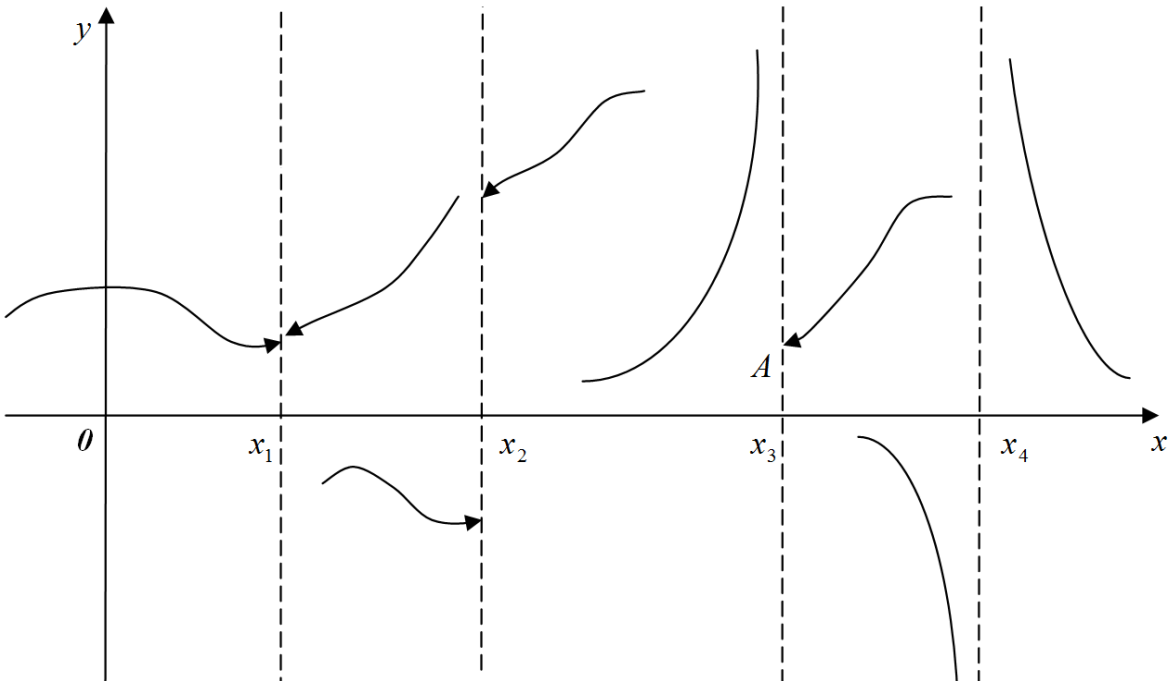
Введем следующую ***классификацию точек разрыва***:

Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***, если существуют:

- односторонние пределы конечны, но не равны друг другу $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ ***(разрыв конечного скачка);***
- односторонние пределы равны, но не равны значению функции в точке x_0: $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ ***(устранимый разрыв)***.

Точка x_0 называется ***разрывом второго рода***, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует: $f(x-0)=\infty$ и (или) $f(x+0)=\infty$.

Изобразим графически точки разрывы первого и второго родов:



x_1, x_2 – точки разрыва первого рода;

x_1 – устранимый разрыв, так как $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;

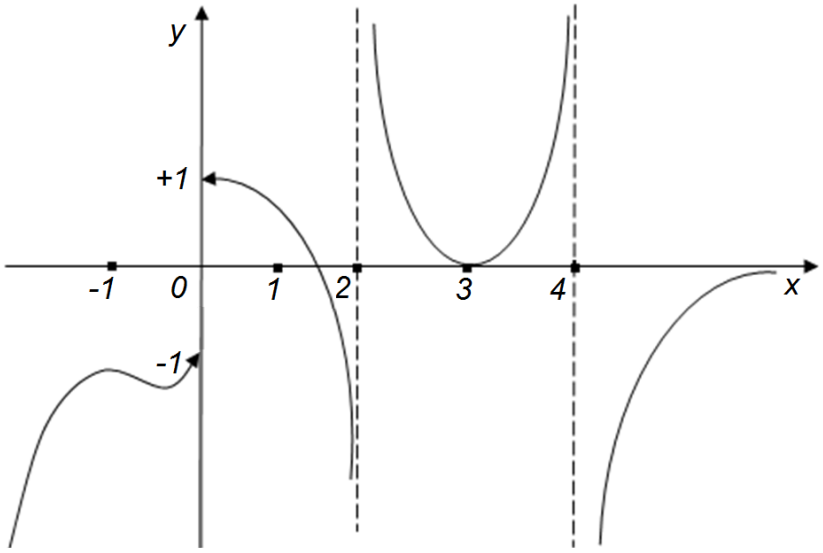
x_2 – разрыв конечного скачка, так как $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$;

x_3, x_4 – точки разрыва второго рода, причем $f(x_3-0)=+\infty$ и $f(x_3+0)=A$; $f(x_4-0)=-\infty$ и $f(x_4+0)=+\infty$.

Контрольное упражнение

Найти односторонние пределы функции $f(x)$, заданной графически, в соответствующих точках разрыва.

Найти: $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$.



Пример 20.

Найти точки разрыва функций, определить характер разрыва, сделать чертеж, если:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

б) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение:

а) функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$; $x=0\notin D$, следовательно $x=0$ – точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_0=0$. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел), следовательно, односторонние пределы равны $f(x_0-0)=f(x_0+0)=1$.

Таким образом, точка $x_0=0$ является устранимым разрывом функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

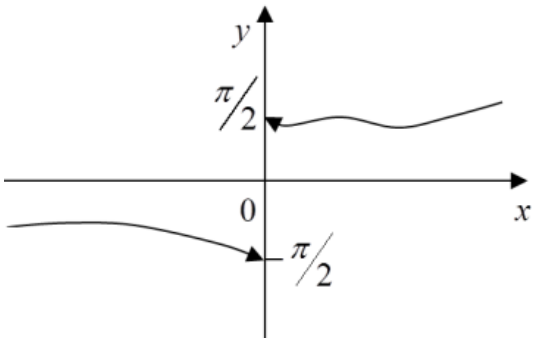
б) функция $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$ не определена при $x_0=0, x=0\notin D$, найдем односторонние пределы в точке разрыва $x_0=0$:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to-0} arctg\frac{1}{x}=arctg\left(\frac{1}{-0}\right)=arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{2},$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to+0} arctg\frac{1}{x}=arctg\left(\frac{1}{+0}\right)=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2},$$

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0).$$

Итак, точка $x_0=0$ является точкой разрыва первого рода – конечного скачка.

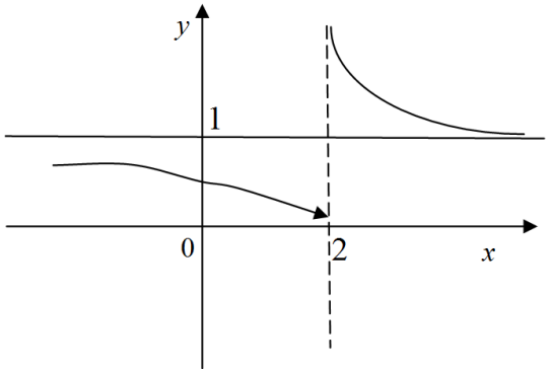


в) функция $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ не определена в точке $x_0=2\notin D$, следовательно, $x_0=2$ – точка разрыва функции, найдем односторонние пределы в точке разрыва $x_0=2$:

$$f(x_0-0)=f(2-0)=\lim_{x\to2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2-0-2}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$f(x_0+0)=f(2+0)=\lim_{x\to2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=\infty.$$

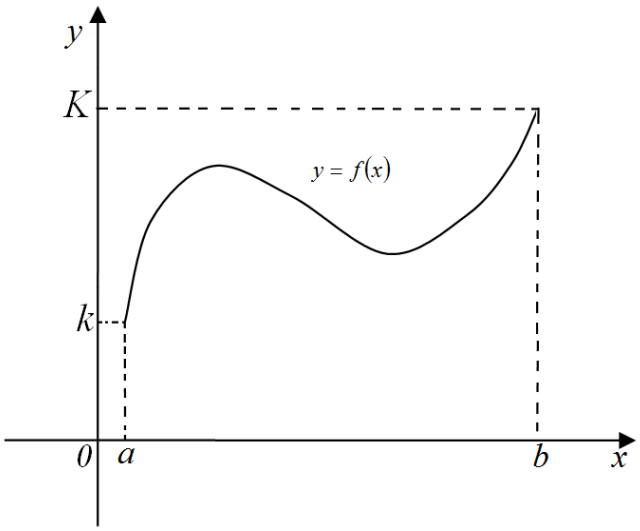
Согласно определению 2, точка $x=2$ является разрывом второго рода (бесконечного скачка).



1.15. Свойства функций, непрерывных на отрезке

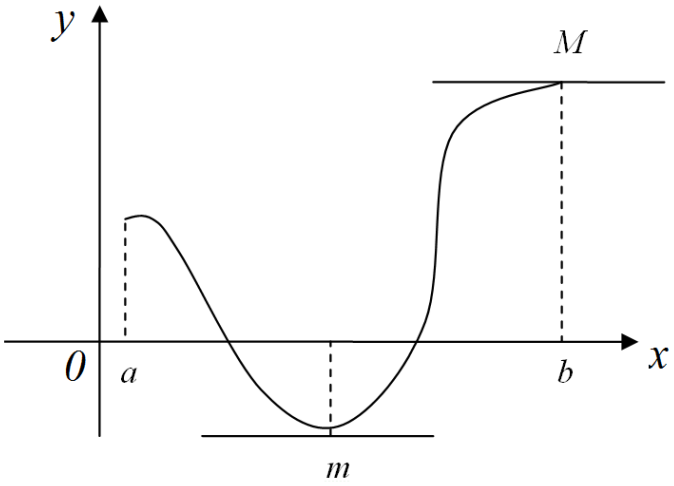
Теорема 1 (об ограниченности непрерывной функции).

Если функция $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она ограничена на этом отрезке:* $k \le f(x) \le K$.



Теорема 2 (теорема Вейерштрасса).

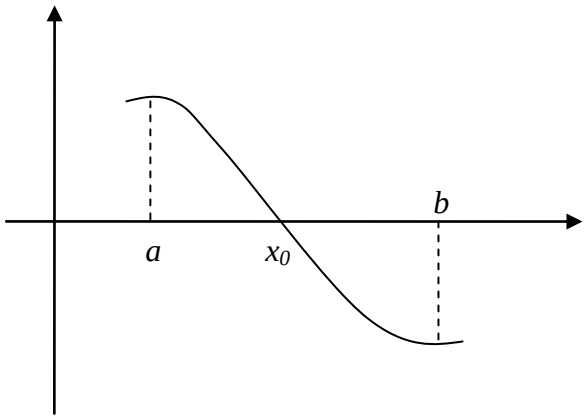
Если функция $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она достигает на этом отрезке наименьшего значения* m *и наибольшего значения* M.



Теорема 3 (теорема Больцано-Коши).

Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, *и значения ее на концах отрезка* $f(a)$ *и* $f(b)$ *имеют противоположные знаки, то*

есть $f(a)\cdot f(b)<0$*, то внутри отрезка найдется точка* $x_0\in(a,\ b)$ *такая, что* $f(x_0)=0.$



С помощью определения непрерывности функции в точке можно доказать непрерывность всех *основных элементарных* функций:

- степенной;
- показательной;
- логарифмической;
- тригонометрических;
- обратных тригонометрических.

Теорема 4 (о непрерывности основных элементарных функций).

Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Аналогичная теорема имеет место для *элементарных функций,* то есть функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции (функция от функции).

Теорема 5 (о непрерывности элементарных функций).

Элементарные функции непрерывны в области определения.

Пример 21.

Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin x+\dfrac{1}{x}+\ln(x+1)$

Решение.

Найдем область определения функции: $x\neq 0,\ x+1>0.$

Следовательно, функция непрерывна в области $D=(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty).$

Теорема 6 (о промежуточных значениях непрерывной функции).

Пусть функция непрерывна на некотором отрезке (в том числе бесконечном). *Если в двух каких-либо точках этого отрезка* a *и* b *функция принимает различные значения:* $f(a)=A,\ f(b)=B$, *то каково бы ни было* C, *лежащее между* A *и* B, *найдется* x_o , *лежащее между* a *и* b, *что* $f(x_o)=C$.

Непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, принимает хотя бы раз и всякое промежуточное значение.

Контрольный тест

1. Найти область определения функций:

а) $y=\sqrt{\log_{0,5}(x-1)};$

б) $y=\sqrt{\dfrac{4+x}{x-2}};$

в) $y=\log_2 x\cdot\log_3 x\cdot\log_4 x$.

2. Определить, какие функции будут четными, а какие нечетными:

а) $f(x)=x^4-2x^2$;

б) $f(x)=x-x^3/3+x^5/120$;

в) $f(x)=x^3+x/x-x$;

г) $f(x)=x\sin x$.

3. Найти точки пересечения линий: $y=x^2$ и $x+y=2$.

4. Вычислить: $f'(9)=$, если $f(x)=(\sqrt{x}-1)\cdot tg(9-x)$.

5. Построить область, ограниченную кривыми. Найти точки пересечения линий: $y=3x^2$ и $y=5-2x^2$.

6. Изобразить графически функцию $f(x)$, если $f(x)>0$ для любого x и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0;\quad \lim\limits_{x\to-0} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to+0} f(x)=0;$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Понятие производной функции в точке

Из школьного курса математического анализа известно, что для функции одной переменной $y = f(x)$, которая определена и непрерывна в области D, ***приращение функции*** есть разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

где Δx – *приращение аргумента*.

Рассмотрим функцию нескольких переменных $u = f(M)$ или $u = f(x, y, z, ..., t)$, которая определена и непрерывна в области D.

Для таких функций введем понятия *полного* и *частного* приращений функций. Пусть первая координата x точки M получает приращение Δx и становится равной $(x + \Delta x)$. Другие координаты точки M (аргументы данной функции) остаются без изменения. Точка $M(x, y, z, ..., t)$ преобразована в точку $M_1(x + \Delta x, y, z, ..., t)$, функция при этом изменила свое значение на величину

$$f(M_1) - f(M) = \Delta_x u$$

или

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z, ..., t) - f(x, y, z, ..., t).$$

$\Delta_x u$ называется ***частным приращением функции*** f ***по*** x.

Аналогично можно определить частные приращения по другим переменным:

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z, ..., t) - f(x, y, z, ..., t)$$

– ***частное приращение функции*** f ***по*** y,

$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z, ..., t) - f(x, y, z, ..., t)$$

– ***частное приращение функции*** f ***по*** t,

$$\Delta_t u = f(x, y, z, ..., t + \Delta t) - f(x, y, z, ..., t).$$

Полным приращением функции $u = f(x, y, ..., t)$ называется разность $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, ..., t + \Delta t) - f(x, y, z, ..., t)$.

Пример 22.

а) найти приращение для функции $y=\sin x$;

б) найти частные приращения функции $z=2y+x^2$.

Решение:

а) $\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$;

б) найдем частное приращение по x:

$$\Delta_x z=2y+\left(x+\Delta x\right)^2-\left(2y+x^2\right)=\left(x+\Delta x\right)^2-x^2=2x\Delta x-\left(\Delta x\right)^2;$$

частное приращение по y:

$$\Delta_y z=2\left(y+\Delta y\right)+x^2-\left(2y+x^2\right)=2\Delta y.$$

Определение.

Если существует конечный или бесконечный *предел* отношения частного приращения функции $u=f(M)=f(x,y,z,...,t)$ по одной из независимых переменных к приращению этой независимой переменной при условии, что последнее приращение стремится к нулю произвольным образом, то он называется ***частной производной данной функции*** по соответствующей независимой переменной в точке M; они обозначаются:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}.$$

Если функция y зависит от одного аргумента: $y=f\left(x\right)$, то, как известно, ограничиваются термином «***производная функции***». Обозначают

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Также встречается следующие обозначения производных:

- для функции одной переменной $y=f\left(x\right)$ *производную* обозначают

$$y'=y'\left(x\right)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x};$$

- в случае функции двух переменных $z = f(x; y)$ производные обозначают:

частную производную функции $f(x; y)$ *по* x*:*

$$z'_x = f'_x(x; y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.;$$

частную производную функции $f(x; y)$ *по* y*:*

$$z'_y = f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Процесс нахождения производной называют ***дифференцированием функции***. Пользуясь определением производной и теоремами о пределах, можно вывести правила и формулы дифференцирования основных элементарных функций.

Пример 23.

Доказать, что для основной элементарной функции $y = \sin x$ производная равна $y' = (\sin x)' = \cos x.$

Доказательство.

Найдем приращение функции $y = \sin x$ (см. пример 18, а):

$$\Delta y = 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right),$$

тогда по определению производной

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Использовали первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$

Итак, $(\sin x)' = \cos x.$

Правила дифференцирования

Пусть c – постоянная, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, в частности $(c\cdot u)'=c\cdot u'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, в частности $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}\cdot u'$;

4) $y=f(u)$ – сложная функция, где $u=u(x)$, тогда $y'=f'(u)\cdot u'$;

5) $y(x)$ и $x(y)$ – взаимно обратные функции, то $x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$;

6) функция задана параметрически $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, тогда $y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}$, $y''(x)=\frac{(y'_x)'}{x'_t}$;

7) показательно-степенная функция $(u^v)'=vu^{v-1}u'+u^v\ln u v'$, $u=u(x)$, $v=v(x)$.

Таблица производных

1) $(c)'=0$;

2) $(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ (где $\alpha\in R$),

в частности $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$, $a>0$;

в частности $(e^u)'=e^u\cdot u'$, $(e^x)'=e^x$;

4) $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$, $a>0$, $a\neq 1$;

в частности $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

5) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

6) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

7) $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8) $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

9) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

10) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12) $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Пример 24.

Найти производную функций одной переменной:

а) $y = 3x^2 + \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^7}} + 2$;

б) $y = (3x+4)^5 + \sin^3 7x + \cos x^3$;

в) $y = 3\,arctg\sqrt{x}\left(4 + e^{5x}\right)^2$;

г) $y = \frac{2x^3 + 2^{tgx^2}}{\cos^5 x^2}$.

Решение:

а) выполним преобразования, используя свойства степеней: $y = 3x^2 + x^{\frac{3}{5}} - 2x^{-\frac{7}{4}} + 2$, далее, применяя табличные формулы:

$$(c)' = 0; \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (cu+\upsilon)' = c \cdot u' + \upsilon',$$

получим $y' = 3 \cdot 2x + \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} - 2x^{-\frac{7}{4}-1}$; $y' = 6x + \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} - 2x^{-\frac{11}{4}}$;

$y' = 6x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{x^2\ \sqrt[4]{x^3}}$.

б) используем формулы:

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$; $(\sin u)' = +\cos u \cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

Тогда $y' = 5(3x-4)^4 \cdot 3 + 3\sin^2 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 - \sin x^3 \cdot 3x^2$ или $y' = 15(3x-4)^4 + 21\sin^2 7x \cdot \cos 7x - 3x^2 \sin x^3$.

в) используем формулы:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \ (u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + u \cdot \upsilon'; \ (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'; \ \left(e^u\right)' = e^u \cdot u',$$

получим

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \left(4+e^{5x}\right)^2 + 3arctg\sqrt{x} \cdot 2\left(4+e^{5x}\right) \cdot \left(4+e^{5x}\right)' \quad \text{или}$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(4+e^{5x}\right)^2 + 30 \cdot arctg\sqrt{x} \cdot \left(4+e^{5x}\right)e^{5x}.$$

г) используем формулы:

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon'}{\upsilon^2}; \qquad (tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u'}; \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

Таким образом,

$$y' = \frac{\left(6x^2 + 2^{tgx^2} \ln 2 \frac{2x}{\cos^2 x^2}\right) \cdot \cos^5 x^2 - \left(2x^3 + 2^{tgx^2}\right) \cdot 5\cos^4 x^2 \left(-\sin x^2\right) 2x}{\cos^{10} x^2}$$

или

$$y' = \frac{\left(6x^2 + 2^{tgx^2} \ln 2 \frac{2x}{\cos^2 x^2}\right) \cdot \cos^2 x^2 - \left(2x^3 + 2^{tgx^2}\right) 5\cos x^2 \left(-\sin x^2\right) 2x}{\cos^7 x^2},$$

раскроем скобки, получим

$$y' = \frac{6x^2 \cdot \cos^2 x^2 + 2x \cdot 2^{tgx^2} \ln 2 + \left(2x^3 + 2^{tgx^2}\right) \cdot 5x \cdot \sin 2x^2}{\cos^7 x^2}.$$

Для нахождения частных производных функций нескольких переменных $u = f(x,\ y,\ ...,\ t)$ применяют следующее ***правило,*** которое следует из определения п. 3.1:

- при вычислении u'_x – частной производной по x считают, что остальные переменные $y,..., t$ являются константами;
- при вычислении u'_y – частной производной по y считают, что другие переменные $x,\ t,...$ являются константами.

Пример 25.

Найти частные производные функций нескольких переменных:

а) $u = 3x^2 y + \sin y^3 + (3t+1)^5$;

б) $z = \sin(xy) + y^x$.

Решение:

а) $u(x,\ y,\ t)$ – функция трех переменных, найдем частные производные: $u'_x = 3y \cdot 2x = 6xy$; ($y,\ t$ – постоянные),

$u'_y = 3x^2 + \cos y^3 \cdot 3y^2$; ($x,\ t$ – постоянные),

$u'_t = 5(3t+1)^4 \cdot 3 = 15(3t+1)^4$; ($x,\ y$ – постоянные);

б) $z = \sin(xy) + y^x$ – функция двух переменных, частная производная по x равна $z'_x = \cos(xy) \cdot y + y^x \cdot \ln y$; ($y = const$), частная производная по y равна $z'_y = \cos(xy) \cdot x + x \cdot y^{x-1}$; ($x = const$).

2.2. Непрерывность и дифференцируемость

Определение.

Функция $u = f(M) = f(x, y, z, ..., t)$, имеющая производную по каждому аргументу в точке M, называется **дифференцируемой в этой точке**.

Так, функция $u = f(x) = x^2 + 3y^3 + 2z^2$ дифференцируема в точке $M(1; 3; -3)$, так как в ней существуют производные $u'_x = 2x\big|_M = 2$, $u'_y = 9y^2\big|_M = 81$, $u'_z = 4z\big|_M = -4$.

Определение.

Функция $u = f(M)$ называется **дифференцируемой в области** D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

В частности, функция $u = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a,\ b)$, если она дифференцируема в каждой точке интервала $(a,\ b)$.

Непрерывность и дифференцируемость функции в точке взаимосвязаны.

Имеет место ***необходимое условие дифференцируемости*** функции в точке: если функция $u = f(M) = f(x, y, z, ..., t)$ дифференцируема в точке M, то она и непрерывна в этой точке.

Замечание.

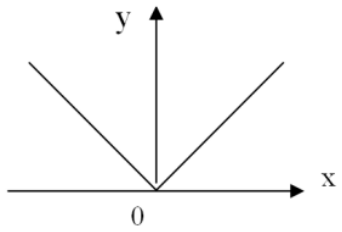
Если функция одной переменной $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в ней.

В этом случае, выполняется равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Непрерывность функции является лишь *необходимым* условием дифференцируемости функции в точке; можно привести примеры функции, которые непрерывны в точке, но не дифференцируемы в этой точке.

Пример 26.

Показать, что непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ не имеет производной.



Решение.

Функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но производная в этой точке не существует, так как по определению $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, но односторонние пределы не равны друг другу

$$y' = \lim_{\substack{\Delta x \to -0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 < 0 \text{ и } y' = \lim_{\substack{\Delta x \to +0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 > 0.$$

Значит, несмотря на непрерывность функции в точке, производной в этой точке не существует.

2.3. Механический смысл производной

Пусть $y = f(x)$ – зависимость пути y от времени x.

Тогда $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ – путь, проходимый точкой за промежуток времени Δx.

Средняя скорость движения точки при этом $V_{ср.} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Очевидно, что в момент x (при $\Delta x \to 0$) скорость, называемая в физике мгновенной, равна

$$V_{мг.} = \lim_{\Delta x \to 0} V_{ср.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Таким образом, п*роизводная* y' *функции* $y = f(x)$ *есть скорость изменения функции.*

Так как аргумент x функции меняется вдоль оси Ox, то $y' = f'(x)$ называют производной функции по направлению Ox, которая характеризует скорость изменения функции в направлении Ox.

При нахождении частной производной все аргументы функции, кроме одного, считают постоянными. При этом функция нескольких переменных становится функцией одной переменной.

Поэтому:

- *любая частная производная характеризует, как и в предыдущем случае, скорость изменения функции в направлении изменения аргумента;*
- сама производная при этом иначе называется производной данной функции по направлению оси соответствующего аргумента.

Так u'_z – производная функции $u = f(M)$ по направлению оси Oz характеризует скорость изменения функции в направлении Oz.

Аналогичный смысл имеют частные производные, например, u'_x, u'_y, u'_t.

Геометрический смысл производной

Ограничимся рассмотрением геометрического смысла производной функции одной переменной.

Пусть к точке $M(x,\ y)$ по дуге кривой $y = f(x)$ приближается точка $M_1(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$. Предельное положение секущей MM_1 называется касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M. В момент слияния точек M и M_1 секущая становится касательной к кривой. Из треугольника $\Delta M_1 MP$ следует: $tg\phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, тогда при приближении точки M_1 к точке M угол φ стремится к углу α наклона касательной в точке M к оси Ox, следовательно

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\phi = tg\alpha \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = y'.$$

Таким образом, $y' = tg\alpha$, *производная функции* $y = f(x)$ *в точке* M *равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси* Ox *в точке* M *кривой* $y = f(x)$.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где $y'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной.

Пример 27.

Найти уравнение касательной к кривой $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ в точке $x_0 = 3$. Сделать чертеж.

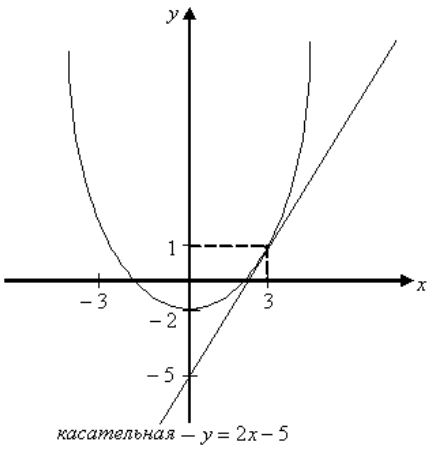
Решение.

Уравнение касательной к кривой имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

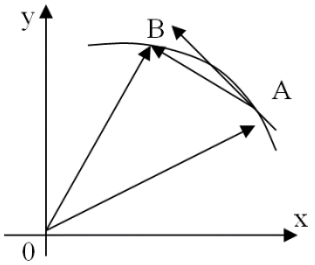
где $(x_0; y_0)$ – точка касания (значение производной $y'(x_0)$ определяет угол наклона касательной). Вычислим y_0: $y_0 = y(3) = \frac{9}{3} - 2 = 1$. Найдем производную и ее значение при $x_0 = 3$: $y'(x) = \frac{2x}{3}$, $y'(x_0) = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$.

Уравнение касательной имеет вид: $y - 1 = 2(x - 3)$ или $y = 2x - 5$. Ответ: $y = 2x - 5$. Сделать чертеж.



2.4. Векторная функция скалярного аргумента, ее производная

Производную векторной функции скалярного аргумента $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}-y(t)\cdot\vec{j}-z(t)\cdot\vec{k}$ будем находить, пользуясь определением производной, как предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Будем предполагать, что $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – дифференцируемые в точке t функции.



Пусть точкам A и B годографа соответствуют значения параметра t и $t+\Delta t$, $\Delta t>0$. Если точка B по годографу приближается к точке A, то $\Delta t\to 0$. Приращение вектор-функции равно

$$\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=x(t+\Delta t)\cdot\vec{i}+y(t+\Delta t)\cdot\vec{j}+z(t+\Delta t)\cdot\vec{k}-$$
$$-x(t)\cdot\vec{i}-y(t)\cdot\vec{j}-z(t)\cdot\vec{k}=\Delta x(t)\cdot\vec{i}+\Delta y(t)\cdot\vec{j}+\Delta z(t)\cdot\vec{k}\,.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x\cdot\vec{i}+\Delta y\cdot\vec{j}+\Delta z\cdot\vec{k}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\cdot\vec{k}\right)=$$
$$=x'(t)\cdot\vec{i}+y'(t)\cdot\vec{j}+z'(t)\cdot\vec{k}\,.$$

Таким образом, *производной векторной функции* скалярного аргумента $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}-y(t)\cdot\vec{j}-z(t)\cdot\vec{k}$, если $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – дифференцируемые функции в точке t, *является вектор, координаты которого есть производные от координат данной функции.* Обозначают:

$$\vec{r}\,'(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=x'(t)\cdot\vec{i}+y'(t)\cdot\vec{j}+z'(t)\cdot\vec{k}\,.$$

При $\Delta t\to 0$ секущая AB стремится к своему предельному положению, то есть к положению касательной к годографу в точке A.

Поэтому $\vec{r}'(t)$ – вектор, касательный к годографу функции $\vec{r}(t)$, направленный в сторону большего аргумента. Этот вектор можно использовать как направляющий вектор касательной к годографу в точке A.

Пример 28.

Найти уравнения касательной к годографу вектор-функции $\vec{r}(t)=2t\cdot\vec{i}+\left(1+t^2\right)\cdot\vec{j}+\left(2t^2-1\right)\cdot\vec{k}$ в точке $A(2;\ 2;\ 1)$.

Решение: $\vec{r}(t)=2t\cdot\vec{i}+\left(1+t^2\right)\cdot\vec{j}+\left(2t^2-1\right)\cdot\vec{k}$.

Точке $A(2;\ 2;\ 1)$ соответствуют значения $t=1$, так как $2t=2$; $1+t^2=2$ и $\left(2t^2-1\right)=1$ при $t=1$.

Найдем производную: $\vec{r}'(t)=2\cdot\vec{i}+2t\cdot\vec{j}+4t\cdot\vec{k}$. Вектор $\vec{r}'(t)=2\cdot\vec{i}+2t\cdot\vec{j}-4t\cdot\vec{k}$ в точке A равен $\vec{r}'(t)=2\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{k}$. Направляющий вектор, касательный к годографу, есть $\vec{S}=\vec{r}'(1)=\{2;2;4\}$. Тогда канонические уравнения касательной, проходящей через точку A годографа, имеют вид $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{4}$ или $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Некоторые правила дифференцирования векторной функции скалярного аргумента.

Нетрудно проверить, что имеют место следующие равенства:

1) $(\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t))'=(\vec{r}_1(t))'\pm(\vec{r}_2(t))'$;

2) $(f(t)\cdot\vec{r}_2(t))'=f'(t)\cdot\vec{r}(t)+f(t)\cdot\vec{r}'(t)$;

3) $[\,\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\,]'=\vec{r}_1'(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2'(t)$;

4) $[\,\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\,]'=[\,\vec{r}_1'(t)\times\vec{r}_2(t)\,]+[\,\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2'(t)$.

Например, если $\vec{r}_1(t)=\{2;t^2;-4t\}$, $\vec{r}_2(t)=\{0;t^3;2t\}$, то $\vec{r}_1'(t)=\{0;2t;-4\}$, $\vec{r}_2'(t)=\{0;3t^2;2\}$.

Тогда $[\,\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\,]'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&2t&-4\\0&t^3&2t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&t^2&-4t\\0&3t^2&2\end{vmatrix}=$

$$=2t^2(3+8t)\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}+6t^2\cdot\vec{k}.$$

2.5. Производные высших порядков. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных

Если данная функция явная и зависит от одного аргумента $y = f(x)$, то $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Производная от производной порядка $(n-1)$ называется **производной *n-го* порядка**.

Обозначают: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ или $y^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Все производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков***. Обозначения производных неоднозначны.

Производную второго порядка от данной функции обозначают:

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Читается: y'' – «*игрек два штриха*»,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – *«дэ два игрек по дэ икс в квадрате».*

Аналогично обозначают производную третьего порядка:

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Пример 29.

Найти $y^{(n)}$ для функции $y = e^{ax}$ и y''' для функции $y = \sin 3x$.

Решение:

Если $y = e^{2x}$, то $y' = 2e^{2x}$, $y'' = 4e^{2x}$.

Тогда, $y' = \alpha \cdot e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 \cdot e^{\alpha x}$, … , $y^{(n)} = \alpha^n \cdot e^{\alpha x}$.

Для функции $y = \sin 3x$ имеем $y' = 3\cos 3x$, $y'' = -9\sin 3x$, $y''' = -27\cos 3x$.

Рассмотрим производные высших порядков явной функции нескольких аргументов. Частные производные такой функции являются также функциями тех же аргументов.

Пусть $z = f(x,\ y)$, тогда частные производные z'_x и z'_x зависят в общем случае от аргументов x и y, поэтому можно говорить о частных производных каждой из частных производных первого порядка по x и y.

Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

– частная производная функции z'_x по переменной x;

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

– частная производная функции z'_y по переменной y;

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

– частная производная функции z'_x по переменной y;

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

– частная производная функции z'_y по переменной x.

Каждая из частных производных второго порядка является также функцией двух аргументов.

Частные производные от частных производных второго порядка называются **частными производными третьего порядка**.

Например, $(z''_{xy})'_x = z'''_{xyx} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $(z''_{yy})'_y = z'''_{yyy} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ и т. д.

Частные производные высших порядков называются **смешанными**, если они получены последовательным дифференцированием данной функции по различным переменным. Таковыми являются z''_{yx}, z'''_{xyz}, $z^{(4)}_{xyzt}$.

Имеет место **теорема о смешанных производных**: если непрерывны смешанные частные производные одного порядка, отличающиеся только последовательностью дифференцирования функции по независимым переменным, то они равны: $z''_{xy} = z''_{yx}$, $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$ и так далее.

Пример 30.

Проверить выполнение теоремы о смешанных производных для функции $z = x^3 \cdot y^3$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка: $z'_x = 3x^2y^3$, $z'_y = 3x^3y^2$; нетрудно убедиться, что $z''_{xy} = z''_{yx} = 9x^2y^2$ или $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx} = 18xy^2$ и так далее.

2.6. Производные параметрической функции

Пусть функция одной переменной задана ***параметрическими уравнениями***: $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t_1 \le t \le t_2$, причем существуют производные $x'(t) \ne 0,\ y'(t) \ne 0.$

Несмотря на то, что y непосредственно не зависит от x, можно найти производную функции y аргумента x, то есть y'_x.

Из существования производной $x'(t) \ne 0$ следует, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$, откуда $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) + \alpha$, $\Delta x = x'(t) \cdot \Delta t + \alpha \cdot \Delta t$, причем $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Таким образом, при $\Delta t \to 0$ одновременно $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а это означает, что $y = f(x)$ – непрерывная функция, то есть необходимое условие существования y'_x выполняется.

Используя определение производной, получаем:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь $\Delta x \ne 0$, так как $x'(t) \ne 0$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Производная y'_x выражена в общем случае через параметр t. Производную от производной этой функции можно найти по тому же закону, по которому найдена производная исходной параметрической функции. В результате получим **производную второго порядка** данной функции:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Вообще производная n-*го* порядка данной функции определяется формулой $y_x^{(n)} = \dfrac{(y_x^{(n-1)})'_t}{x'_t}$.

Пример 31.

Найти вторую производную функции: $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^5. \end{cases}$

Решение.

Найдем производные $y'_t = 5t^4$, $x'_t = 3t^2$.

Тогда по формулам $y'_x = \dfrac{y'_x}{x'_t}$, $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ вычислим: $y'_x = \dfrac{5t^4}{3t^2} = \dfrac{5}{3}t^2$, $y''_{xx} = \dfrac{\dfrac{10t}{3}}{3t^2} = \dfrac{10}{9t}$.

2.7. Дифференцирование неявных функций

Пусть функция y одного аргумента x задана неявно $F(x;y) = 0$.

Найдем полный дифференциал левой и правой частей равенства: $F'_x(x;y) \cdot dx + F'_y(x;y) \cdot dy = 0$ или $dy = -\dfrac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)} \cdot dx$.

Сравним это равенство с выражением полного дифференциала функции $y = f(x)$, то есть с выражением $dy = y' \cdot dx$.

Очевидно, $y'_x = -\dfrac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)} \cdot dx$.

Пусть функция z двух переменных задана неявно $F(x;y;z) = 0$, тогда, находя полный дифференциал левой и правой частей уравнения $F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$, получим $dz = -\dfrac{F'_x}{F'_z} dx - \dfrac{F'_y}{F'_z} dy$.

Из сравнения этого равенства с полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$: $dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$, следует, что для неявной функции, заданной уравнением $F(x;y;z) = 0$, частные производные определяются формулами $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$ и $z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

Пример 32.

Найти частные производные функции $xz-2zy-2x+3y-7=0$.

Решение.

Обозначим $F(x;y;z)=xz-2zy-2x+3y-7=0$.

Используя формулы $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$, находим

$$z'_x=-\frac{(xz-2zy-2x+3y-7)'_x}{(xz-2zy-2x+3y-7)'_z}=\frac{2-z}{x-2y};$$

$$z'_y=-\frac{(xz-2zy-2x+3y-7)'_y}{(xz-2zy-2x+3y-7)'_z}=\frac{2z-3}{x-2y}.$$

Замечание.

Можно предложить правило для нахождения производных любого порядка неявной функции одной переменной $f(x;y)=0$. Чтобы найти производную n*-го* порядка функции $f(x;y)=0$, надо последовательно n раз продифференцировать обе части уравнения $f(x;y)=0$, учитывая, что $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ зависят от x, и из последнего равенства выразить $y^{(n)}$.

Пример 33.

Найти производную третьего порядка функции одной переменной, заданной неявно: $x^2+y^2-4=0$.

Решение.

Последовательно дифференцируем обе части уравнения три раза: $2x+2yy'=0$, $1+y'+yy'=0$, $2y'y''+y'y''+yy'''=0$ или $3y'y''+yy'''=0$, тогда искомая производная третьего порядка $y'''=-\dfrac{3y'y''}{y}$.

2.8. Дифференциал функции, его свойства

Пусть дана функция $u=f(M)=F(x,y,\ldots,z)$, D – область определения. Если координатам точки M задать приращения, то получим новую точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y; \ldots, z+\Delta z)$.

Полное приращение функции u в точке M (см. п. 2.1.) равно $\Delta u = f(M_1) - f(M) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, ..., z+\Delta z) - f(x, y, ..., z)$.

Пусть приращение Δu функции в точке M можно представить в виде $\Delta u = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z + \alpha$, где $A, B, ..., C$ – коэффициенты, не содержащие $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta z$; , α – бесконечно малая величина более высокого порядка малости по сравнению с расстоянием $\rho = |MM_1| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + ... + \Delta z^2}$, то есть $\alpha = V(\rho)$.

Определение.

Главная часть приращения функции Δu $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z$ называется **полным дифференциалом** данной функции $u = f(x, y, ..., z)$ в точке $M(x; y; ..., z)$ и обозначается $du = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z$.

В частности, для функций

$u = f(x)$, $u = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$ имеем соответственно:

$$df(x) = A\cdot\Delta x,$$

$$df(x, y) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y,$$

$$df(x, y, z) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + C\cdot\Delta z.$$

Можно доказать, что коэффициенты $A, B, ..., C$ равны производным данной функции по $x, y, ..., z$. Покажем это для функции одной переменной.

Пусть $u = f(x)$ – функция одной переменной, дифференцируема в точке $M(x)$, то есть существует $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, или $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, откуда находим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{|\Delta x|} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$, тогда, согласно классификации бесконечно малых функций (см. п. 1.7), $\alpha\cdot\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = |\Delta x|$. Значит, $f'(x)\cdot\Delta x$ – главная часть приращения Δy, то есть $A\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\Delta x$, $A = f'(x)$.

Тогда $df(x) = f'(x)\cdot\Delta x$.

В частности, если $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$, то есть дифференциал аргумента x равен приращению этого аргумента. Таким образом, $df(x) = f'(x)\cdot dx$ или $dy = y'\cdot dx$.

Дифференциал функции двух переменных равен $df(x,y) = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y$ или $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Дифференциал функции трех переменных равен $df(x,y,z) = f'_x(x,y,z) \cdot dx + f'_y(x,y,z) \cdot dy + f'_z(x,y,z) \cdot dz$ или $du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$.

Свойства дифференциалов

Пусть $f_1(M)$, $f_2(M)$ – функции, дифференцируемые в точке M. Тогда:

1) $dC = 0$, где C – постоянная величина;

2) $d(C \cdot f(M)) = C \cdot df(M)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала;

3) $d(f_1(M) \pm f_2(M)) = df_1(M) \pm df_2(M)$;

4) $d(f_1(M) \cdot f_2(M)) = df_1(M) \cdot f_2(M) + f_1(M) \cdot df_2(M)$;

5) $d\left(\frac{f_1(M)}{f_2(M)}\right) = \frac{df_1(M) \cdot f_2(M) - f_1(M) \cdot df_2(M)}{f_2^2(M)}$, $f_2(M) \neq 0$.

Пример 34.

Найти дифференциал функции $z = y \cdot \sin x + x^2 \cdot e^y$.

Решение.

Используя свойства дифференциала и таблицу производных, найдем частные производные: $z'_x = y \cdot \cos x + 2x \cdot e^y$; $z'_y = \sin x + x^2 \cdot e^y$, тогда $dz = \left(y \cdot \cos x + 2x \cdot e^y\right) \cdot dx + \left(\sin x + x^2 \cdot e^2\right) \cdot dy$.

2.9. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал du функции $u = f(M)$ принято называть **дифференциалом первого порядка**.

Дифференциалом второго порядка функции $u = f(M)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции: $d^2u = d(du)$.

Дифференциалом третьего порядка функции $u = f(M)$ называется дифференциал от дифференциала второго порядка данной функции: $d^3u = d\left(d^2u\right)$.

Аналогично можно определить дифференциал любого порядка.

Дифференциалом n-го порядка функции $u = f(M)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции: $d^nu = d\left(d^{(n-1)}u\right)$.

Пусть функции $u = f(M) = f(x)$ – функции одной переменной x, тогда имеем дифференциалы:

$du = f'(x)dx$ – первого порядка;

$d^2u = d(du) = f''(x)dx^2$ – второго порядка;

$d^3u = d\left(d^2u\right) = f'''(x)dx^3$ – третьего порядка;

$d^nu = d\left(d^{(n-1)}u\right) = f^{(n)}(x)dx^n$ – порядка n.

Пусть функции $u = f(M) = f(x,\ y)$ двух переменных x и y, тогда имеем:

$$du = u'_x dx + u'_y dy,$$

$$d^2u = d(u'_x dx + u'_y dy) = (u'_x dx + u'_y dy)'_x \cdot dx + (u'_x dx + u'_y dy)'_y \cdot dy =$$

$$= (u''_{xx}dx + u''_{yx}dy)\cdot dx + (u''_{xy}dx + u''_{yy}dy)\cdot dy = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy\cdot dy^2.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид $d^2u = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy\cdot dy^2$.

Аналогично можно получить, что дифференциал третьего порядка имеет вид $d^3u = u'''_{xxx}dx^3 + 3u'''_{xxy}dx^2dy + u'''_{xyy}dydy^2 + u'''_{yyy}dy^3$.

Пример 35.

Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $u = x^3 + 5x\cdot y^7$.

Решение.

$$du = (3x^2 + 5y^7)\cdot dx + 35x\cdot y^6\cdot dy,$$

$$d^2u = 6x\cdot dx^2 + 70y^6\cdot dxdy + 210x\cdot y^5\cdot dy^2.$$

2.10. Основные теоремы дифференциального исчисления

Значение аргумента $x = x_0$ называется ***точкой максимума (минимума),*** если значение функции $y = f(x_0)$ является наибольшим

(наименьшим) по сравнению с другими ее значениями в δ-окрестности точки $x = x_0$, то есть в интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$:

$$f(x_0) > f(x), \quad f(x_0) < f(x) \text{ для } \forall x \in (x_0 - \delta; \quad x_0 + \delta).$$

Точки максимума и минимума (*max*, *min*) называются **точками экстремума.**

Значение функции в точке экстремума называют **экстремумом функции**, в частности максимумом или минимумом функции.

Теорема Ферма.

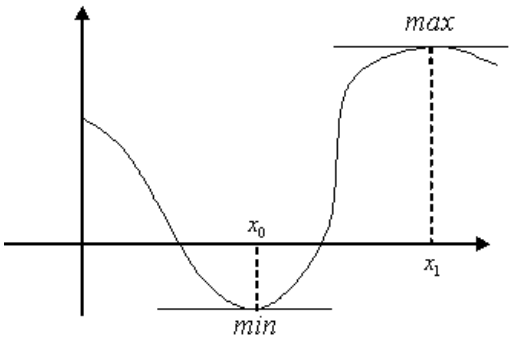
Если функция $y = f(x)$ непрерывна в $(a; b)$, имеет экстремум – *max (min)* в некоторой внутренней точке $x = x_0 \in (a; b)$ и дифференцируема в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.

Пусть $x = x_0$ – точка *min*, $y = f(x_0)$ – *min* функции $y = f(x)$. Тогда независимо от знака Δx приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Поэтому $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \geq 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x, < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \leq 0$.

Оба неравенства имеют место одновременно только в том случае, если $y' = f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что касательная в точке экстремума $(x_0, f(x_0))$ к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox.



Теорема Ролля.

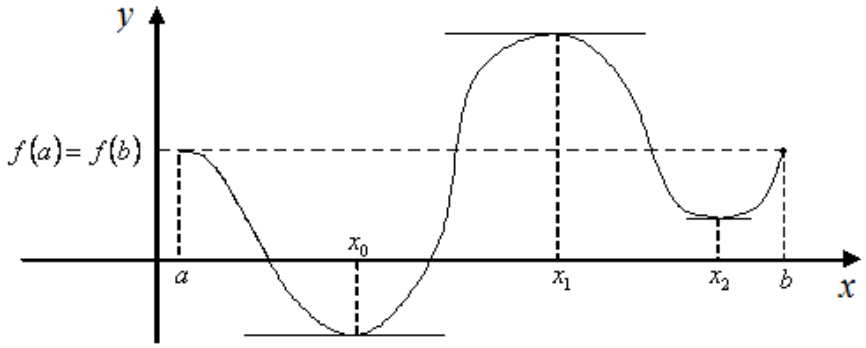
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и имеет на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b) = c$,то на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка $x = x_0$ такая, что $f'(x) = 0$.

Доказательство. Так как функция непрерывна на $[a;b]$, то, по теореме Вейерштрасса (см. п. 1.13), она имеет на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения: m и M.

Если $m=M$, то $f'(x_0)=const$ и для любого $x\in(a;b)$ имеем $f'(x_0)=0$.

Если $m\neq M$, то хотя бы одно из этих значений соответствует внутренней точке $x=x_0\in(a;b)$, но тогда по теореме Ферма имеем $f'(x_0)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что существует хотя бы одна точка $(x_0, f(x_0))$ такая, что касательная в которой к графику функции $y=f(x)$ будет параллельна оси Ox.



Пример 36.

Проверить условия теоремы Ролля для функции $y=x^2-4x+4$, заданной на отрезке $[0;3]$ и $[0;4]$.

Решение.

В первом случае значения на концах отрезка не являются равными: $f(0)=4,\ \ f(3)=1$, тем не менее $y'=2x-4=0$ при $x=2\in(0;3)$.

Во втором случае значения на концах отрезка равны: $f(0)=4,\ \ f(4)=4$, условия теоремы выполняются и $y'=0$ в той же точке $x=2\in(0;4)$.

Теорема Коши.

Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$, причем $\varphi'(x)\neq 0$, то существует хотя бы одна точка $x=x_0\in(a;b)$, такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.

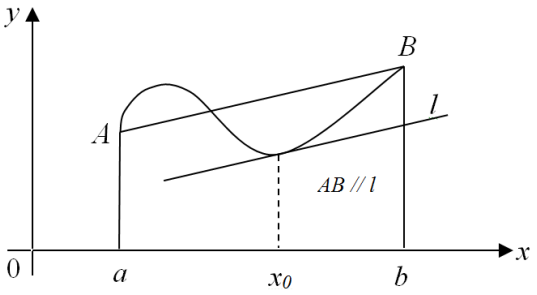
Доказательство. Для этого введем новую функцию $F(x)=(f(b)-f(a))\cdot\varphi(x)-(\varphi(b)-\varphi(a))\cdot f(x)$, которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля на $[a;b]$. Поэтому в некоторой точке $x=x_0\in(a;b)$

$F'(x_0)=0$, то есть $(f(b)-f(a))\cdot\varphi'(x_0)-(\varphi(b)-\varphi(a))\cdot f'(x_0)=0$, откуда следует $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.

Теорема Лагранжа.

Если $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $x=x_0\in(a;b)$ такая, что $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что через точку $(x_0;f(x_0))$ можно провести касательную l к графику функции, параллельную секущей AB, так как $k_{AB}=k_l=f'(x_0)$.



Замечание.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если положить $\varphi(x)=x$.

Правило Лопиталя. Предел отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций можно вычислить, используя элементарные приемы преобразования этих функций.

Правило Лопиталя является универсальным правилом для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема Лопиталя.

Пусть функции $y=f(x)$ *и* $y=\varphi(x)$ *в окрестности точки* $x=a$ *непрерывны, дифференцируемы и* $\varphi'(x)=0$. *При этом при* $x\to a$ *или* $x\to\infty$ *одновременно* $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ *или* $f(x)\to\infty, \varphi(x)\to\infty$ *Тогда, если существует* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ или\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то также существует* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ или\\ x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, *причем пределы равны друг другу:* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ или\\ x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ или\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило Лопиталя может применяться неоднократно.

Пример 37.

Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Решение.

Так как имеем неопределенность вида $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то, применяя дважды правило Лопиталя, получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\cos 3x}{2}=\dfrac{9}{2}$.

2.11. Линии уровня и градиент функции двух переменных

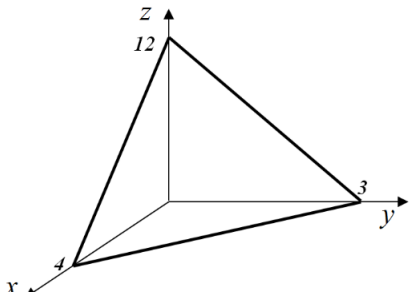
Линией уровня функции $z=f(x;y)$ называется множество точек из области определения на плоскости Oxy, для которых значение функции постоянно и равно C, то есть $f(x;y)=C$.

Пример 38.

Построить график функции $z=12-3x-4y$. Записать уравнение линии уровня, проходящей через точку $(2;\ -3)$.

Решение.

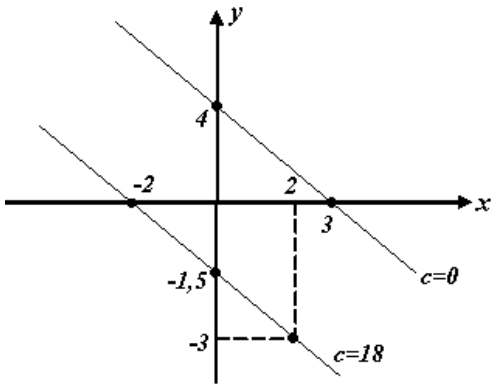
Графиком линейной функции двух переменных $f(x;y)=ax+by+c$ является плоскость в пространстве. Для функции $z=12-3x-4y$ график представляет собой плоскость, проходящую через точки $(4;0;0)$, $(0;3;0)$, $(0;0;12)$.



Линиями уровня функции являются параллельные прямые, уравнение которых $12-3x-4y=c$.

Найдем уравнение линии уровня, проходящей через точку $(2;\ -3)$. Для этого подставим координаты точки в уравнение

$12-3x-4y=c$ и найдем значение параметра c: $12-3\cdot 2-4(-3)=c$, отсюда $c=18$. Итак, уравнение линии уровня, проходящей через точку $(2;\ -3)$, имеет вид $3x+4y=-6$.



Градиент

Градиентом функции $z=f(x;y)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные данной функции. Обозначают: $\overrightarrow{grad}\,z=(z'_x;\,z'_y)$.

Вектор-градиент часто записывают в виде формулы разложения по базису $(\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$: $\overrightarrow{grad}\,z=z'_x\cdot\vec{i}+z'_y\cdot\vec{j}$.

Свойства вектора-градиента.

Если $z=z(x;y)$, $u=u(x;y)$ – функции двух переменных, то имеют место следующие свойства:

1) $\overrightarrow{grad}(C_1\cdot z+C_2\cdot u)=C_1\cdot\overrightarrow{grad}\,z+C_2\cdot\overrightarrow{grad}\,u$, где C_1, C_2 – любые постоянные числа;

2) $\overrightarrow{grad}(z\cdot u)=u\cdot\overrightarrow{grad}\,z+z\cdot\overrightarrow{grad}\,u$;

3) $\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{z}{u}\right)=\dfrac{u\cdot\overrightarrow{grad}\,z-z\cdot\overrightarrow{grad}\,u}{u^2}$.

Пример 39.

Найти и построить вектор-градиент функции $z=3x^2y+y^3-xy$ в точке $M(0;-1)$.

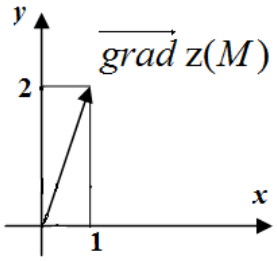
Решение.

Найдем частные производные: $z'_x=6xy-y$, $z'_y=3x^2+3y^2-x$.

Вычислим в точке $M(0;-1)$:
$z'_x(M)=6\cdot 0\cdot(-1)-(-1)=1$, $z'_y(M)=3\cdot 0+3\cdot 1-0=3$.

Итак, градиентом в точке M является вектор $\overrightarrow{grad}\,z(M)=(1;3)$.

Сделаем чертеж:



Известно, что частные производные z'_x; z'_y характеризуют скорость изменения функции z в направлении координатных осей (см. п. 2.3).

Рассмотрим любой вектор $\vec{a}=(a_x;a_y)$; единичный вектор $\vec{n}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, где модуль вектора $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$.

Координатами единичного вектора n_0 являются направляющие косинусы $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta)$, где α,β – углы, которые вектор $\vec{n}_0$ образует с положительным направлением координатных осей Ox и Oy.

Производной функции $z=f(x,y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ называется предел отношения приращения функции в точке M к расстоянию $|MM_1|$, на которое перемещается точка M в направлении вектора $\vec{a}$, при $|MM_1|\to 0$, если такой предел существует; обозначают $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\lim\limits_{|MM_1|\to 0}\dfrac{\Delta_{\vec{a}}z}{|MM_1|}$, где $\Delta_{\vec{a}}z=z(M_1)-z(M)$ приращение функции в направлении вектора $\vec{a}$.

Можно показать, что производная по направлению вектора $\vec{a}$ равна $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}=z'_x\cdot\cos\alpha+z'_y\cdot\cos\beta.$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ находят по формулам $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$ и $\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$.

Величина скорости изменения функции в точке M равна модулю производной по направления в той точке: $\left|\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|$.

Очевидно, что вектор-градиент и производная по направлению вектора $\vec{a}$ связаны следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\vec{n}_0\cdot\overrightarrow{grad}\,z$.

Согласно определению скалярного произведения имеем:

2) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}} = |\vec{n}_0| \cdot \left|\overrightarrow{grad}\, z\right| \cdot \cos\varphi$;

3) наибольшее значение производная по направлению достигает при $\varphi = 0 (\cos 0 = 1)$, то есть, когда вектор-градиент параллелен вектору $\vec{a}$, таким образом $\left|\overrightarrow{grad}\, z\right| = \max \dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{grad}\, z$;

4) вектор-градиент $\overrightarrow{grad}\, z(M_0)$ в точке M_0 ортогонален (перпендикулярен) линии уровня, проходящей через точку M_0.

Пример 40.

Для заданной функции $z = x^3 y + y^2 x^2 + 1$ в точке $M(1;1)$ найти:

1) производную по направлению вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$;

2) градиент в точке M;

3) производную по направлению вектора градиента;

4) наибольшую скорость возрастания в заданной точке M.

Решение.

1. Найдем единичный вектор $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$, откуда направляющие косинусы вектора $\vec{n}_0$ равны $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Найдем частные производные функции z в точке $M(1;1)$:

$z'_x = 3x^2 y + 2xy^2$; $z'_x(M) = 5$;

$z'_y = x^3 + 2x^2 y$; $z'_y(M) = 3$.

Таким образом, производная по направлению вектора $\vec{a}$ равна $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}} = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta$ или $\dfrac{\partial z(M)}{\partial \vec{a}} = 5 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{11}{\sqrt{5}} = \dfrac{11\sqrt{5}}{5}$.

2. Вектор градиент функции z: $\overrightarrow{grad}\, z = (3x^2 y + 2xy^2) \cdot \vec{i} + (x^3 + 2x^2 y) \cdot \vec{j}$. В точке $M(1;1)$: $\overrightarrow{grad}\, z(M) = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

3. Производная по направлению вектора-градиента равна $\dfrac{\partial z(M)}{\partial \vec{a}} = 5 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{25+9}} + 3 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{25+9}} = \dfrac{25}{\sqrt{34}} + \dfrac{9}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}$.

4. Очевидно, что наибольшая скорость возрастания функции z в точке M равна $\upsilon_{\max} = \left|\overrightarrow{grad}\, z\right| = \sqrt{34}$.

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Приращение и дифференциал функции $u = f(M)$ в точке M связаны приближенным равенством: $du \approx \Delta u$.

Запишем это равенство в развернутом виде:

- Для функции одной переменной $u = f(x)$:

$$f'(x) \cdot \Delta x \approx f(x + \Delta x) - f(x).$$

- Для функции двух переменных $u = f(x; y)$:

$$f'_x(x; y) \cdot \Delta x + f'_y(x; y)\Delta y \approx f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

- Для функции трех переменных $u = f(x; y; z)$:

$$f'_x(x; y; z) \cdot \Delta x + f'_y(x; y; z) \cdot \Delta y + f'_z(x; y; z) \cdot \Delta z \approx f(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - f(x; y; z).$$

Покажем на примерах, как данные формулы применяются к вычислению значений функций.

Пример 41.

Вычислить $\sin 31^0$.

Решение.

Очевидно, требуется вычислить значение функции одной переменной $y = \sin x$ при $x = 31^0$.

Пусть $x = 30^0$, $(x + \Delta x) = 31^0$, $\Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ рад.

Применим формулу $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.

Найдем $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Тогда $\sin 31^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 \cdot \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}516$.

Пример 42.

Вычислить приближенно $(0{,}98)^{2{,}01}$.

Решение.

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x;y) = x^y$.

Пусть $M(1;2)$, $M_1(0{,}98;2{,}01)$.

$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\cdot\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.$

Тогда $x=1,\ y=1,\ \Delta x=-0{,}02,\quad \Delta y=0{,}01.$

Частные производные $f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y \ln x.$

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\cdot\Delta x + x^y \ln x\cdot\Delta y,$$

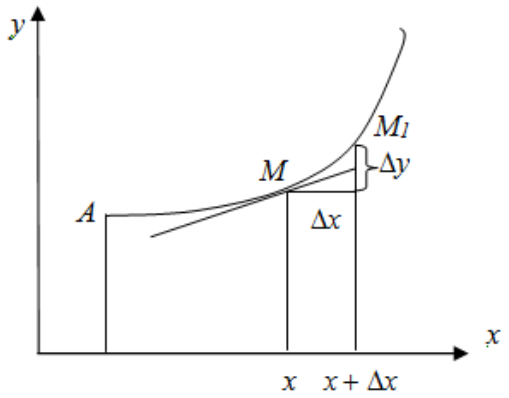
$$(0{,}98)^{2{,}01} \approx 1^2 + 2\cdot 0{,}02 + 1^2 \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}96.$$

3.2. Дифференциал длины дуги

Если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывна на $(a;b)$, то функция называется **гладкой** на $(a;b)$.

Линия, определяемая гладкой функцией, называется гладкой. Она не имеет ни точек возврата, ни угловых точек.

Пусть A – фиксированная точка, M – текущая точка гладкой линии.



Очевидно, длина дуги $\overset{\smile}{AM} = S(x)$ – функция от x.

Найдем дифференциал этой функции – дифференциал длины дуги: $dS = S'(x)\cdot dx./$

Если x получает приращение Δx, то длина $\overset{\smile}{AM}$ также получает приращение: $\Delta S = дл.\overset{\smile}{MM_1}$.

При достаточно малом Δx длина дуги $\overset{\smile}{MM_1}$ и длина отрезка $\left|\overset{\smile}{MM_1}\right|$ эквиваленты, а значит, взаимозаменяемы при нахождении пределов.

Поэтому $S'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}=\sqrt{1+y'^2}.$

Таким образом, $dS=\sqrt{1+y'^2}\cdot dx$ или $dS=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$.

Замечания.

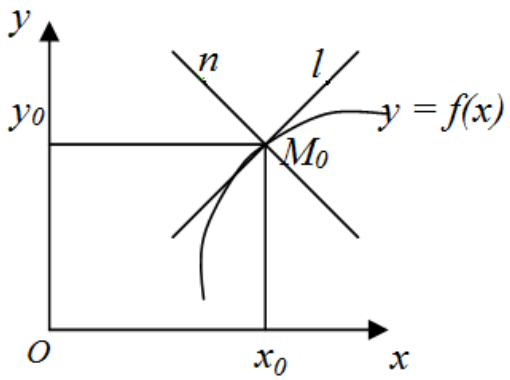
1. Если линия задана параметрически уравнениями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$, то $dS=\sqrt{x'^2+y'^2}\cdot dt.$

2. Если линия задана в полярной системе уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, то учитывая, что $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, и принимая φ за параметр, найдем $x'^2+y'^2=(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2=\rho'^2+\rho^2.$

Тогда $dS=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cdot d\varphi.$

3.3. Геометрические приложения дифференциального исчисления функций одной переменной

Касательная и нормаль к линии



Согласно геометрическому смыслу производной, $y'=tg\,\alpha$; где α – угол наклона касательной графика функции к положительному направлению оси Ox.

Уравнение касательной к графику линии $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, где $f'(x_0)=k_{кас}$ – угловой коэффициент касательной.

Прямая, перпендикулярная к касательной в точке касания, называется **нормалью** к графику линии $y=f(x)$.

Так как касательная и нормаль перпендикулярны друг к другу, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то есть для нормали $k_{нор.} = -\frac{1}{k_{кас}}$, $k_{нор} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Итак, **уравнение нормали**: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Пример 43.

Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Решение.

Найдем угловой коэффициент касательной. Для этого найдем производную от функции, заданной неявно:

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2,$$
$$2xb^2 + 2yy'a^2 = 0,$$
$$y' = -\frac{xb^2}{ya^2}.$$

В точке $M_0(x_0, y_0)$ имеем $k = y' = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$.

Уравнение касательной:

$$y - y_0 = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2} \cdot (x - x_0),$$

или

$$xx_0b^2 + yy_0a^2 = x_0^2b^2 + y_0^2a^2 = a^2b^2,$$

откуда $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ – уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_{0,}y_0)$.

Угол между линиями на плоскости

Углом между пересекающимися в точке M_0 линиями l_1 и l_2 называется угол φ между касательными к линиям в точке их пересечения.

Пусть $l_1 : y = f_1(x)$, $l_2 : y = f_2(x)$, $l_1 \cap l_2 = M_0(x_0, y_0)$.

Тогда $k_1 = f_1'(x_0)$, $k_2 = f_2'(x_0)$, $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}$.

3.4. Геометрические приложения дифференциального исчисления функций двух переменных

Касательная плоскость

Если поверхность задана уравнением $z = f(x; y)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = f_x'(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0; y_0) \cdot (y - y_0),$$

где $\vec{N} = (f_x'(x_0 y_0); f_y'(x_0, y_0); -1)$ – нормальный вектор плоскости.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x; y; z) = 0$, то частные производные f_x' и f_y' находим по известным формулам. Тогда уравнение касательной плоскости выглядит так:

$$F_x'(M_0) \cdot (x - x_0) + F_y'(M_0) \cdot (y - y_0) + F_z'(M_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

где $\vec{N} = (F_x'(M_0); F_y'(M_0); F_z'(M_0))$.

Нормаль к поверхности

Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке касания, называется *нормалью к поверхности в этой точке.*

За направляющий вектор $\vec{S}$ нормали принимают нормальный вектор $\vec{N}$ касательной плоскости: $\vec{S} \equiv \vec{N}$.

Нетрудно записать канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

или

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}.$$

Пример 44.

Найти уравнение касательной и нормали к сфере $x^2+y^2+z^2=9$ в точке $M_0(1;2;-2)$.

Решение.

Уравнение сферы задано неявным уравнением $F=x^2+y^2+z^2-9$.

Найдем частные производные: $F'_x=2x, F'_y=2y, F'_z=2z.$

Вычислим их значения в точке M_0:

$$F'_x(M_0)=2, F'_y(M_0)=4, F'_z(M_0)=-4.$$

Итак, уравнение касательной плоскости:

$$2(x-1)+4(y-2)-4(z+2)=0$$

или

$$x+2y-2z=9.$$

Уравнение нормали к сфере в точке M_0 с направляющим вектором $\overline{N}=(1;2;-2)$ имеет вид $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-2}$.

3.5. Экстремум функции одной переменной

Интервалы монотонности

Рассмотрим следующие виды монотонных функций. Очевидно, что если:

1) из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, тогда $y=f(x)$ – возрастающая функция, $\Delta y>0$;

2) из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$, тогда $y=f(x)$ – убывающая функция, $\Delta y<0$;

3) из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$, тогда $y=f(x)$ – неубывающая функция, в этом случае существует отрезок $[a;b]$, для которого y сохраняет постоянное значение, $\Delta y\ge 0$;

4) из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\ge f(x_2)$, тогда $y=f(x)$ – невозрастающая функция, в этом случае существует отрезок $[c;d]$, для которого y является постоянным значением, $\Delta y\le 0$.

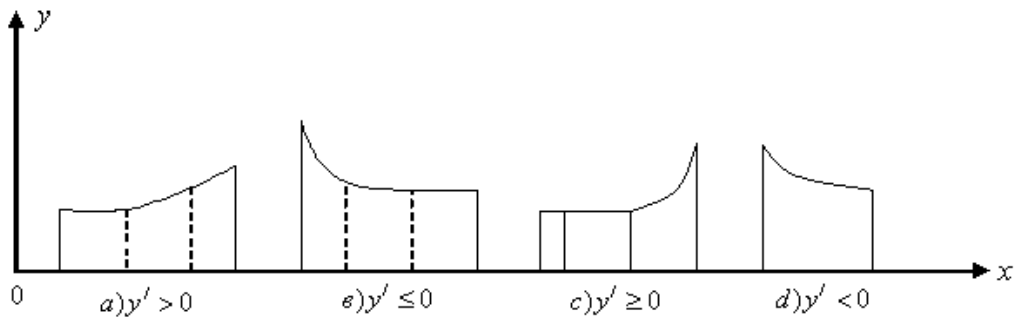
Необходимые условия монотонности функции:

1) если функция $y=f(x)$ *возрастает* на (a,b), то $f'(x)>0$ для $\forall x\in(a,b)$;

2) если $y=f(x)$ – *неубывающая* функция на (a,b), то $f'(x)\geq 0$ для $\forall x\in(a,b)$;

3) если функция $y=f(x)$ *убывает* на (a,b), то $f'(x)<0$ для $\forall x\in(a,b)$;

4) если функция $y=f(x)$ – *невозрастающая* на (a,b), то $f'(x)\leq 0$ для $\forall x\in(a,b)$.



Необходимое и достаточное условия существования экстремумов функции одной переменной

Из теоремы Ферма следует, что если $x=x_0$ – точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=0$.

Следует также отметить, что иногда в точке экстремума функция может быть недифференцируемой, то есть в этой точке производная не существует.

Необходимое условие существования экстремума функции: *если $x=x_0$ – точка экстремума, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.*

Точки, в которых $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует, называется ***критическими.***

Достаточное условие существования экстремума функции: *если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$ и ее окрестности, дифференцируема в этой окрестности, кроме, быть может, самой точки, и производная $y'=f'(x)$ при переходе через точку $x=x_0$ меняет свой знак, то функция имеет экстремум при $x=x_0$.*

При этом $x=x_0$ – точка максимума, если знак меняется с «+» на «-», и $x=x_0$ – точка минимума, если знак меняется с «-» на «+».

Пример 45.

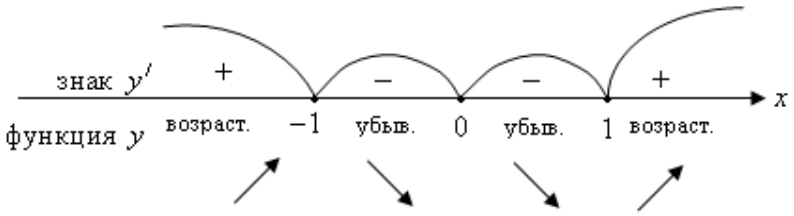
Найти экстремумы функции $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1$ и построить ее график.

Решение.

Найдем производную $y'=x^4-x^2$.

Решим уравнение $x^4-x^2=0,\ \ x^2\left(x^2-1\right)=0$, откуда $x=0;\ x=\pm1$. Критические точки: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1$.

Определим знак производной в окрестности этих точек, соответственно интервалы монотонности:



Итак:

- при $x=-1$ вычислим $y(-1)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+1=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}$;

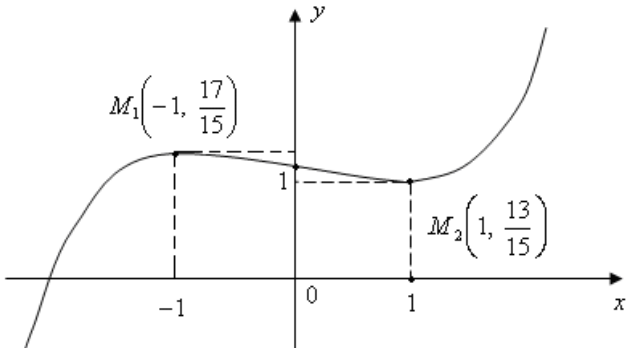
$M_1\left(-1,\ 1\frac{2}{15}\right)$ – точка максимума;

- при $x=1$ вычислим $y(1)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1=\frac{13}{15}$;

$M_2\left(1,\ \frac{13}{15}\right)$ – точка минимума.

- при $x=0$ экстремума нет.

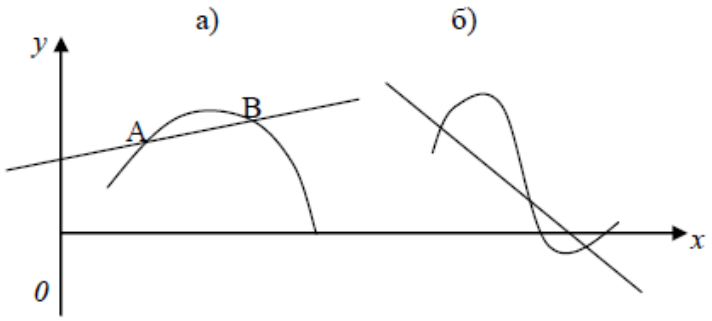
Построим график функции:



3.6. Точки перегиба. Выпуклость, вогнутость линии

Дуга кривой называется *выпуклой*, если она пересекается с любой своей секущей AB не более, чем в двух точках.

Ниже представлены дуги: а) выпуклая дуга, б) невыпуклая дуга.



Если дуга выпукла, то она целиком лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой ее точке.

Выпуклость дуги может быть направлена или вверх (в направлении оси Oy), или вниз.

Линии, обращенные выпуклостью вверх, условились называть *выпуклыми*, а обращенные выпуклостью вниз – *вогнутыми*.

Необходимое условие выпуклости дуги: *если дуга линии* $y=f(x)$ *выпукла на* (a,b), *то* $f''(x)<0$ *при* $\forall x\in(a,b)$.

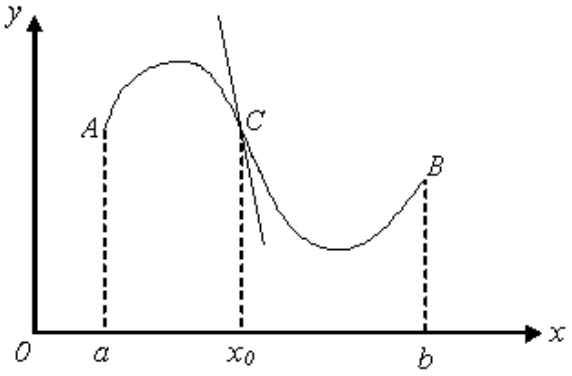
Необходимое условие вогнутости дуги: *если дуга линии* $y=f(x)$ *вогнута на* (a,b),*то* $f''(x)>0$ *при* $\forall x\in(a,b)$.

Достаточное условие выпуклости, вогнутости дуги: *если* $f''(x)<0$ *при* $\forall x\in(a,b)$, *то дуга кривой* $y=f(x)$ *выпукла на* (a,b); *если* $f''(x)>0$ *при* $\forall x\in(a,b)$, *то дуга кривой* $y=f(x)$ *вогнута на* (a,b).

Точка C линии, отделяющая выпуклую дугу от вогнутой или наоборот, называется ***точкой перегиба.***

Предполагается, что в точке перегиба можно провести касательную к данной линии, при этом линия расположена по обе стороны от касательной.

Необходимое условие существования точки перегиба: *если* C *точка перегиба кривой* $y=f(x)$, *то* $f''(x)=0$.



Рассмотренное условие является лишь необходимым условием существования точки перегиба.

Например, если $y=x^4$, то $y''=12x^2=0$ при $x=0$, но в этой точке не существует перегиба.

Достаточное условие существования точки перегиба: *если* $f''(x)$ *меняет свой знак при переходе через критическую точку* $x=x_0$, *то точка* $(x_0, f(x_0))$ *является точкой перегиба кривой* $y=f(x)$.

Знаки $f''(x)$ слева и справа от $x=x_0$ показывают, как направлена выпуклость кривой при $x<x_0$ и $x>x_0$.

3.7. Асимптоты функции

Если расстояние от точки M линии $y=f(x)$ до прямой l неограниченно уменьшается при неограниченном удалении точки M от начала координат, то такая прямая называется ***асимптотой линии***.

Различают вертикальные и наклонные асимптоты:

- если $x=x_0$ – точка разрыва второго рода функции $y=f(x)$, то эта функция имеет вертикальную асимптоту $x=x_0$,в этом случае

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty;$$

- если $y=kx+b$ – наклонная асимптота функции $y=f(x)$, то

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$
$$b=\lim_{x\leftarrow\infty}(f(x)-kx).$$

Чтобы функция $y=f(x)$ имела наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы, определяющие k и b.

Пример 46.

Найти функция асимптоты графика функции $y=\dfrac{3-x}{x-2}$.

Решение.

Точка $x=2$ является точкой разрыва функции.

Так как односторонние пределы равны $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{3-x}{x-2}=\dfrac{1}{-0}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{3-x}{x-2}=\dfrac{1}{+0}=+\infty$, то $x=2$ – точка разрыва второго рода, поэтому функция имеет вертикальную асимптоту $x=2$.

Найдем наклонную асимптоту, уравнение которой $y=kx+b$.

Вычислим:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x}{(x-2)x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x}{x-2}=-1.$$

Так как параметры k и b существуют, то график функции имеет наклонную асимптоту $y=-1$.

3.8. Исследование функции одной переменной (общая схема)

Полное исследование функции $y=f(x)$ дает возможность составить наглядное представление о ней в виде графика, прогнозировать течение процесса, описываемого этой функцией.

Общая схема исследования функции одной переменной:

1. Найти область определения функции.

Область определения функции есть множество значений x, при которых функция имеет смысл.

2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

В точке пересечения графика функции:

- с осью Ox: $y=0$;
- с осью Oy: $x=0$.

3. Исследовать функцию на четность, нечетность:

- условие четности: $f(-x)=f(x)$;
- условие нечетности: $f(-x)=-f(x)$.

График четной функции симметричен относительно Oy, нечетной – относительно начала координат.

4. Найти точки разрыва функции. Если они есть, то найти односторонние пределы в каждой такой точке.

5. Найти асимптоты графика функции. Если есть точка разрыва второго рода $x=a$, то существует *вертикальная асимптота* $x=a$.

Наклонная асимптота определятся уравнением

$$y = kx + b,$$

где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

6. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов.
7. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
8. Построить график функции.

По результатам исследования строим асимптоты, точки пересечения с осями координат, точки экстремумов, перегиба. Потом, учитывая характер монотонности, направление выпуклости, приближение графика к асимптоте, строим полный график функции. Он может состоять из одной или нескольких линий.

Пример 47.

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ и построить ее график.

Решение.

Область определения:

$x = 0$ – точка минимума;

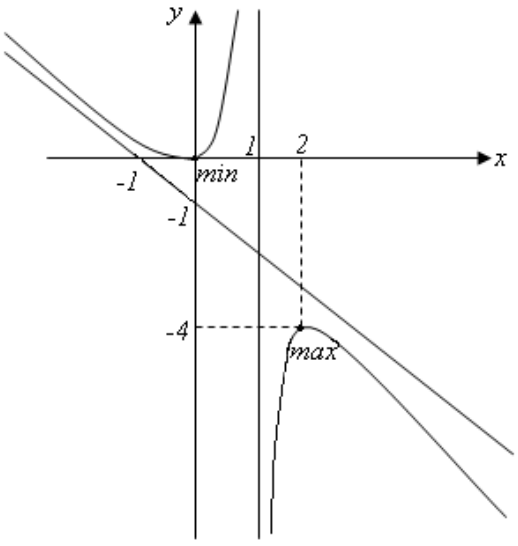
$x = 2$ – точка максимума;

$x = 1$, $y = -x - 1$ – асимптоты функции; $(-\infty, 0), (2, \infty)$ – интервалы убывания функции;

$(-\infty, 1)$ – интервал вогнутости;

$(1, \infty)$ – интервал выпуклости функции.

Строим график:



3.9. Экстремумы функции двух переменных

Пусть D – область определения функции $z = f(x;y)$; $M_0(x_0;y_0) \in D$.

Если значение функции $z = f(x;y)$ в точке M_0 является наибольшим (наименьшим) по сравнению с другими ее значениями в δ – окрестности точки M_0, то это значение называется *максимумом (минимумом) функции,* а точка M_0 *– точкой максимума (минимума).*

Максимумы и минимумы функции, как сказано ранее, называют *экстремумами.*

Необходимые условия существования экстремума: если функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ или хотя бы одна из частных производных не существует.

Как и прежде, точки, в которых выполняются необходимые условия существования экстремума функции $z = f(x;y)$, называются *критическими.*

Достаточное условие существования экстремума: чтобы функция $z = f(x;y)$ имела в критической точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие $\Delta > 0$, где определитель Δ имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Если при этом $f''_{xx}(P_0) > 0$, то P_0 – точка минимума; если $f''_{xx}(P_0) < 0$, то P_0 – точка максимума.

При $\Delta < 0$ экстремум в точке P_0 не существует.

При $\Delta = 0$ требуется непосредственное исследование значений функции в точке P_0 и в точках ее окрестности.

Пример 48.

Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

Сначала найдем критические точки, решив систему

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 = y, \\ y^2 = x. \end{cases}$$

Получим $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$ – критические точки.

Найдем определитель Δ:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{yy} = 6y, \quad z''_{xy} = -3,$$
$$\Delta = 36xy - 9.$$

Исследуем знак Δ в каждой критической точке. Для $M_1(0;0)$ $\Delta = -9 < 0$, значит, в точке M_1 экстремум не существует.

Для $M_2(1;1)$ $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$, значит, M_2 – точка экстремума. Так как $f''_{xx}(1;1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, то $z = f(M_2) = -1$– минимум.

3.10. Наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке и в области

Из свойств функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, следует, что она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений. Эти значения функция принимает или во внутренних критических точках отрезка, или на его концах. Поэтому для нахождения наибольшего или наименьшего значения $y = f(x)$ на $[a;b]$ надо:

1) найти критические точки из уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие $(a;b)$;

2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a;b]$;

3) самое большое и самое меньшее значения из всех вычисленных и будут наибольшим значениями функции на отрезке.

Пример 49.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение.

1. Найдем критические точки $y' = \cos x,\ \cos = 0.$ Решая уравнение, находим $x = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{3}{4}\pi\right).$

2. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3}{4}\pi \approx 0{,}7.$$

3. Наибольшее значение данной функции на отрезке равно $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, наименьшее – $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в области

Всякая непрерывная в замкнутой области D функция $z = f(x; y)$ достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция принимает или во внутренних критических точках области D, или на границе этой области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x; y)$ в области D можно использовать следующий алгоритм:

1. Решая систему $\begin{cases} f'_x(x; y) = 0, \\ f'_y(x; y) = 0 \end{cases}$, найти критические точки, расположенные внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D. Так как координаты точек границы связаны соотношением $y = \varphi(x)$, то данная функция $z = f(x; y)$ на границе D превращается в функцию одной переменной: $z = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$, где $a \le x \le b$ для точек D.

Если граница области образована различными линиями, то надо находить наибольшее и наименьшее значения функции на каждом участке границы в отдельности.

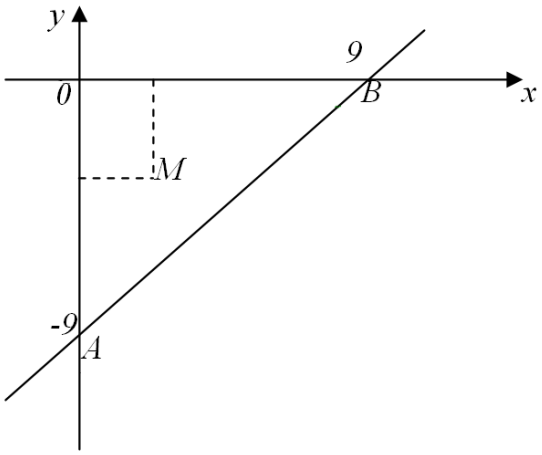
3. Из всех полученных значений функции выбрать самое большее и самое малое. Это и будут наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ в области D.

Пример 50.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2 + 6y$ в области D, ограниченной линиями: $x = 0,\ y = 0,\ y = x - 9$.

Решение.

1. Из системы $\begin{cases} z'_x = 2x + y = 0, \\ z'_y = 2y + x + 6 = 0 \end{cases}$ следует, что $M(2,-4)$ – критическая внутренняя точка области D. Вычислим значение функции в этой точке: $z(M) = -12$.



2. Граница области образована линиями OA, OB, AB.

Уравнение OA: $x = 0$. На этом участке границы $z = f(x;y) = y^2 + 6y$, $-9 \le y \le 0$.

Находим критические точки этой функции: $z'_y = 2y + 6 = 0$, $y = -3 \in (-9;0)$.

Вычислим значения: $z(0;-3) = -9$, $z(0;-9) = 27$, $z(0;0) = 0$.

Аналогично рассмотрим участки границы OB и AB.

Уравнение OB: $y = 0,\ z = f(x;y) = x^2,\ 0 \le x \le 9,\ z'_x = 2x = 0$, отсюда $x = 0$.

Внутренних критических точек на $[0;9]$ функция $z = x^2$ не имеет. Вычислим значение: $z(9;0) = 81$.

На втором конце отрезка $[0;9]$ значение $z(0;0)$ уже вычислено.

Уравнение AB: $x=9+y, z=3y^2+33y+81, -9\le y\le 0, z'_y=6y+33=0$, отсюда $y=-\frac{11}{2}\in(-9;0); z\left(-\frac{11}{2}\right)=-9{,}75$. На концах отрезка [–9; 0] значения функции $z=f(x;y)$ уже вычислены.

3. Таким образом, надо сравнить между собой вычисленные значения функции z: -12; -9; 0; 81; $-9{,}75$.

Наибольшее значение: $z(9;0)=81$.

Наименьшее значение: $z(2;-4)=-12$.

3.11. Условные экстремумы

Экстремумы функции $u=f(M)$ с областью определения D, точки которой связаны условиями $\varphi_j(\mathrm{M})=0, j=1,2,...,k,$ называются ***условными***.

Точка M_0, в которой такая функция достигает экстремума, называется ***точкой условного экстремума***.

Необходимость нахождения условных экстремумов возникает в тех задачах, где приходится сравнивать между собой точки, координаты которых связаны условиями в виде уравнений $\varphi_j(\mathrm{M})=0, j=1,2,...,k.$

Чтобы найти необходимые условия существования условных экстремумов, построим новую функцию, связывающую единым уравнением исследуемую функцию $u=f(M)$ и все дополнительные условия $\varphi_j(\mathrm{M})=0, j=1,2,...,k.$

Эта новая функция называется ***функцией Лагранжа*** и представляет собой линейную комбинацию функций $f(\mathrm{M}),\varphi_j(\mathrm{M}), j=1,2,...,k$. Обозначается: $F(x,y,...,\lambda_1,\lambda_k)=f(\mathrm{M})+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\cdot\varphi_j(\mathrm{M}).$ Частные производные функции $F(x_1,x_2,...,x_n;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)$ равны

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i},\quad i=1,2,...,n;$$

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial}{\partial\lambda_j}f(x_1,x_2,...,x_n)+\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+...+\lambda_j\varphi_j+...+\lambda_k\varphi_k\right)=\varphi_j,$$

$$j=1,2,...,k.$$

Если функция $F(M)$ имеет экстремум в точке $\mathrm{M}_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_n)$, то $\frac{\partial F_{\mathrm{M}_0}}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial \varphi_j(\mathrm{M}_0)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, ..., n,$ так как $\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_i} = 0,$ потому что M_0 – точка экстремума; $\frac{\partial \varphi_j(\mathrm{M}_0)}{\partial x_i} = 0,$ потому что $\varphi_j(\mathrm{M}_0) = 0.$

Также $\frac{\partial F_{\mathrm{M}_0}}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(\mathrm{M}_0), j = 1,2,...,k.$

Таким образом, условия, определяемые системой этих $(n+k)$ уравнений, являются необходимыми условиями существования в точке M_0 условного экстремума. Точка M_0 называется *условно критической точкой функции* $f(M)$. Совсем не обязательно, что в этой критической точке существует экстремум. Достаточные условия условного экстремума определяются знаком дифференциала второго порядка функции Лагранжа.

Нередко требуется непосредственное исследование поведения функции $f(M)$ вблизи M_0.

3.12. Формула Тейлора

Рассмотрим задачу о замене функции $y = f(x)$ в окрестности $x = x_0$ многочленом $y = P(x)$ степени не выше n. Предположим, что при этом функция имеет все производные до $(n+1)$ порядка, а также имеют место условия:

$$f(x_0) = P(x_0),$$
$$f'(x_0) = P'(x_0),$$
$$f''(x_0) = P''(x_0),$$
$$\ldots,$$
$$f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0).$$

Пусть многочлен имеет форму $P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n.$

Коэффициенты многочлена можно найти, подставляя записанные выше условия в многочлен $P(x)$ и его производные:

$$P'(x)=c_1+2c_2(x-x_0)+3c_3(x-x_0)^2+\ldots+nc_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P''(x)=2c_2+3\cdot 2c_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2},$$
$$\ldots,$$
$$P^{(n)}(x)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot c_n.$$

Тогда получим

$$c_0=f(x_0),\ c_1=f'(x_0),\ c_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ c_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Многочлен с такими коэффициентами имеет вид

$$P(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

При замене функции $y=f(x)$ многочленом $P(x)$ допускается погрешность, определяемая разностью $f(x)-P(x)=R_{n+1}(x)$, откуда $f(x)=P(x)+R_{n+1}(x)$ или

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x).$$

Разность $R_{n+1}(x)=f(x)-P(x)$ называется ***остаточным членом***. Чем меньше $R_{n+1}(x)$, тем ближе $P(x)$ к $f(x)$.

Чтобы оценить величину погрешности $R_{n+1}(x)$ при замене функции $f(x)$ на многочлен $P(x)$, надо знать структуру формы остаточного члена. Естественно допустить, что форма $R_{n+1}(x)$ подобна форме членов многочлена. Если бы остаточный член имел в точности такую же форму, то имели бы многочлен степени $(n+1)$, а не n, как предусмотрено условием выше.

Предположим, что остаточный член имеет форму $R_{n+1}(x)=\frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$, где функция $\varphi(x)$ неизвестна.

Тогда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}.$$

Введем такую вспомогательную функцию $F(t)$, которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля при t между x_0 и x:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)^1-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3-\ldots-$$
$$-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{\varphi(x)}{(n+1)!}\cdot(x-t)^{n+1},$$

где x, а значит, и $f(x)$, $\varphi(x)$ будем считать постоянными.

Функция $F(t)$ непрерывна вблизи точки x_0. Если данная функция имеет также $(n+1)$ производную, то функция $F(t)$ дифференцируема вблизи точки x_0.

Именно: $F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{\varphi(x)}{n!}(x-t)^n$.

На концах отрезка с абсциссами x_0 и x значения функции $F(t)$ равны: $F(x)=F(x_0)=0$.

Таким образом, функция $F(t)$ отвечает условиям теоремы Роля, значит, между x_0 и x существует такое значение $t=\xi$, при котором $F'(\xi)=0$, то есть $-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{\varphi(x)}{n!}(x-\xi)^n=0$. Отсюда $\varphi(x)=f^{(n+1)}(\xi)$.

Итак,

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1},$$

где значение ξ заключено между x и x_0.

Это выражение называется ***формой Лагранжа для остаточного члена.***

Значение ξ можно представить равенством $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$, так как ξ заключено между x и x_0.

Равенство

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

называется ***формулой Тейлора.***

В частности, если $x_0 = 0$, то получим ***формулу Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Пример 51.

Написать формулу Маклорена для функции $f(x) = \cos x$ и вычислить $\cos 1^0$.

Решение.

Найдем производные функции и вычислим их при $x = 0$, подставим их в формулу Маклорена, получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], |\xi| < |x|.$$

Если $x = 1^0 = \frac{3{,}14}{180}$ рад, то, например, при $n = 3$ имеем $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$, $R_4(x) = \frac{x^4}{4!}\cos(\xi + 2\pi)$, тогда получим: $\cos 1^0 \cong 1 - \left(\frac{3{,}14}{180}\right)^2 \frac{1}{2!} = 0{,}9998$; при этом остаточный член не превосходит $R_4(x) = 0{,}000013\cos\xi < 0{,}000013$, так как $|\cos\xi| < 1$ при $0^0 < \xi < 1^0$.

ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

4.1. Функции в экономике

Экономические процессы описываются как функциями одной, так и нескольких переменных. Наиболее часто используются производственные функции, функции выпуска, полезности (предпочтений), издержек, спроса, предложения, потребления и другие.

Производственная функция выдает результат производственной деятельности от факторов, пусть Z – величина общественного продукта, x_1 – затраты труда, x_2 – объем производственных фондов, тогда функция двух переменных – ***функция Кобба-Дугласа*** $z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$.

Функция полезности выражает полезность от n приобретенных товаров $z = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$. Например, логарифмическая функция полезности $z = a_1 \ln(x_1 - c_1) + a_2 \ln(x_2 - c_2) + ... + a_n \ln(x_n - c_n)$ или $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$.

Функции спроса и предложения выражают зависимость объема спроса или предложения на отдельные товары от таких факторов, как цена, доход и другие.

Часто зависимость спроса на различные товары *от дохода* описываются ***функциями Торнквиста***:

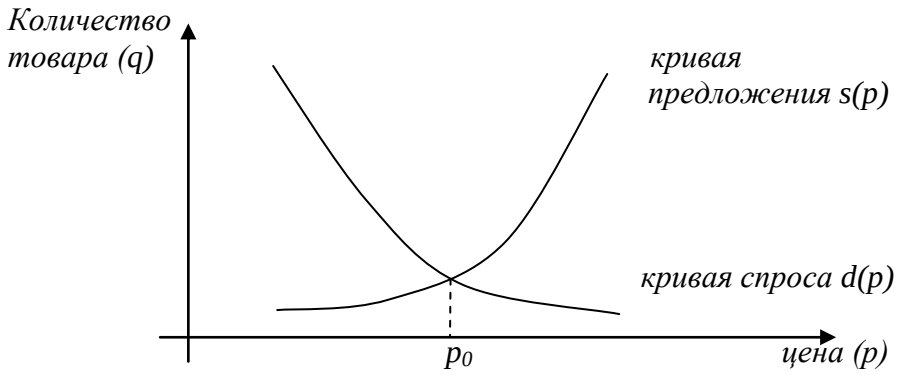
$$y = \frac{b_1(x - a_1)}{x - c_1},\ (x > a_1);\ \ y = \frac{b_2 x(x - a_2)}{x - c_2},\ (x > a_2).$$

Зависимость спроса или предложения *от цены* описывается, например, линейными функциями: *спроса* $y = -ax + b$ или *предложения* $y = ax - b,\ (a,\ b > 0)$.

Одной из главных задач рынка является установление ***равновесной цены*** (price) – P_0, то есть такой цены, при которой ***спрос*** (demand) $d(p)$ равен ***предложению*** (supply) $s(p)$: $d(p) = s(p)$.

Предполагая, что функции $d(p),\ s(p)$ непрерывны, тогда их разность $f(p) = d(p) - s(p)$ так же непрерывная функция, причем имеет *разные знаки* $f(p) = d(p) - s(p) > 0$ – спрос превышает предложение, если

цена p мала; $f(p)=d(p)-s(p)<0$, если цена велика, тогда по свойству непрерывной функции (теорема Больцано-Коши) обязательно существует такое значение P_0, при котором $f(p)=0$, то есть $d(p)=s(p)$.



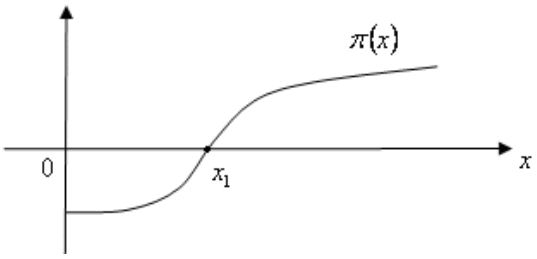
Функции прибыли и затрат (издержек). Пусть x – количество продукта; которая реализуется по цене $p(x)$, в этом случае

$r(x)=xp(x)$ – полный доход;

$c(x)$ – функция затрат (издержек), которая выражает зависимость общих расходов на производство x единиц продукции.

Тогда разность между полным доходом и общими затратами есть ***прибыль*** от реализации x единиц продукции: $\pi(x)=r(x)-c(x)$.

Графически функцию прибыли $\pi(x)$ можно изобразить следующим образом:



Значение функции прибыли $\pi(x)$ на отрезке $[0,\ x_1]$ отрицательна, $r(x)<c(x)$ – здесь затраты превышают доход; когда выпуск продукции становится больше некоторого количества x_1, то прибыль начинает расти, то есть $r(x)>c(x)$.

Пример 52.

Найти равновесную цену, если известны функции спроса $d(p)=60-p$ и предложения $s(p)=20+4p$. Найти выручку при равновесной цене P_0, а также при ценах $p_1=5;\ p_2=10$.

Решение.

Очевидно, что $p \ge 0$, $d(p) \ge 0$, $s(p) \ge 0$, тогда:

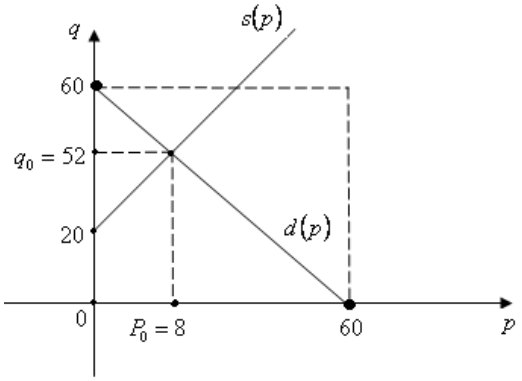
для функции $d(p)$ имеем:

$$\left.\begin{array}{l} p \ge 0 \\ d(p) \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p \ge 0 \\ 60 - p \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \le p \le 60; \\ 0 \le d(p) \le 60; \end{array}$$

для функции $s(p)$:

$$\left.\begin{array}{l} p \ge 0 \\ s(p) \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p \ge 0 \\ 20 + 4p \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p \ge 0 \\ p \ge -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \le p < \infty; \\ 20 \le s(p) < \infty \end{array}.$$

Точку равновесия найдем из условия $d(p) = s(p)$, то есть $60 - p = 20 + 4p$ или $5p = 40$. Откуда $p_0 = 8$ – равновесная цена. При этом количество товара $q_0 = d(p_0) = 60 - 8 = 52$.



При равновесной цене выручка равна $p_0 d(p_0) = 8(60 - 8) = 8 \cdot 52 = 416$.

При произвольной цене выручка равна $p \cdot \min(d(p);\ s(p))$.

При $p_1 = 5$ получим:

$$5 \cdot \min(d(p_1);\ s(p_1)) = 5 \cdot \min(60 - 5;\ 20 + 4 \cdot 5) = 5 \cdot 40 = 200.$$

При $p_2 = 10$ получим:

$$10 \cdot \min(d(p_2);\ s(p_2)) = 10 \cdot \min(60 - 10;\ 20 + 4 \cdot 10) = 10 \cdot 50 = 500.$$

Пример 53.

Найти и построить функцию прибыли, если фирма реализует x единиц продукции по цене $p = 6$ за единицу при известных постоянных затратах, равных 12 у.е., и переменных затратах на единицу продукции, равных $(2x - 6)$ у.е.

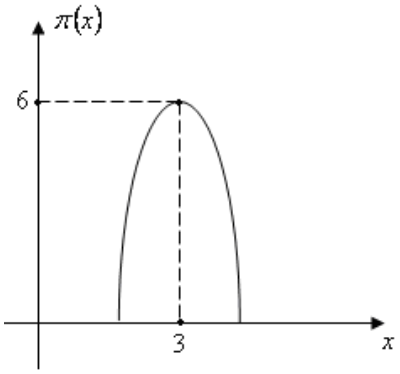
Решение.

Функция прибыли равна $\pi(x)=r(x)-c(x)$, где $r(x)$ – функция полного дохода, она равна произведению цены $p=6$ на количество продукции x: $r(x)=6x$; $c(x)$ – функция затрат (издержек) равна сумма постоянных и переменных затрат, на x единиц продукции: $c(x)=12+(2x-6)\cdot x$ или $c(x)=12+2x^2-6x$.

Итак, функция прибыли: $\pi(x)=6x-(2x^2-6x+12)=-2x^2+12x-12$

$\pi(x)=-2(x^2-6x+6)=-2(x^2-6x+9-9+6)=-2(x-3)^2+6$.

Построим графики функций $\pi(x)$, $r(x)$, $c(x)$.



$\pi(x)=6-2(x-3)^2$.

Максимальная прибыль достигается при $x=3$, $\pi(3)=6$, при этом объеме продукта доход равен $r(3)=6\cdot 3=18$ у.е., и затраты $c(3)=2\cdot 9-6\cdot 3+12=12$ у.е..

4.2. Производные в экономике

4.2.1. Экономический смысл производной

Предельная производительность труда.

Если $g=g(t)$ – количество произведенной продукции g за время t, то за период Δt количество произведенной продукции составит $\Delta g=g(t_0+\Delta t)-g(t_0)$, тогда производная $g'=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta g}{\Delta t}$ есть **производительность труда в момент t_0.**

Предельные затраты (издержки) производства.

Если $y=c(x)$ – функция затрат производства, где x – количество выпускаемой продукции, тогда Δx – прирост продукции, Δc – при-

ращение затрат производства. Производная $c'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta c(x)}{\Delta x}$ выражает **предельные затраты производства** при неограниченном уменьшении прироста объема производства $\Delta x\to 0$.

Аналогично можно определить:

- **Предельный спрос** $d'(p)=\lim\limits_{\Delta p\to 0}\dfrac{\Delta d(p)}{\Delta p}$, где $d(p)$ – функция спроса; p – цена на товар.
- **Предельное предложение** $S'(p)=\lim\limits_{\Delta p\to 0}\dfrac{\Delta S(p)}{\Delta p}$, где $S(p)$ – функция предложения.

При увеличении цены p на единицу производная $S'(p)$ оценивает увеличение предложения товара от производителей, а производная от функции спроса $d'(p)$ позволяет оценить уменьшение спроса со стороны покупателя.

В экономике часто *предельные величины* называют **маржинальными** и обозначают:

MC – предельные затраты;

MS – предельное предложение;

Md – предельный спрос и так далее.

В отличие от *предельных* при записи *средних* (average) величин используют обозначения:

AS – среднее предложение;

Ad – средний спрос;

Ar – средний доход.

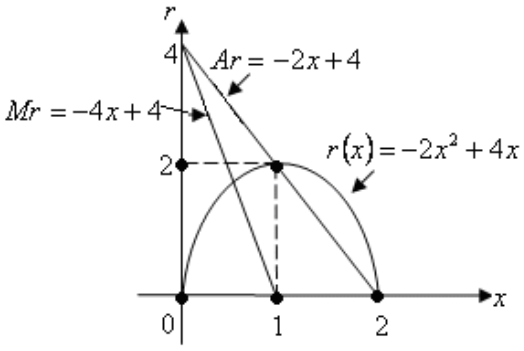
Пример 54.

Найти предельный и средний доход на единицу продукции x, если функция спроса равна $d(x)=-2x+4$.

Решение.

Суммарный доход от реализованной продукции в количестве x равен $r(x)=d(x)\cdot x$ или $r(x)=(-2x+4)\cdot x=-2x^2+4x$.

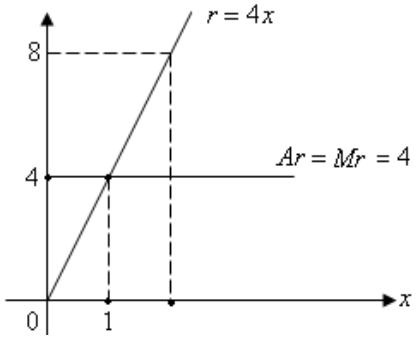
Тогда *средний доход* на единицу продукции равен $Ar=\dfrac{r}{x}=\dfrac{-2x^2+4x}{x}=-2x+4$; а *предельный доход* (дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции) равен $Mr=r'(x)=-4x+4$.



Полученные данные показывают, что с увеличением цены спрос на продукцию падает. С ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, а также уменьшается средний доход: это характерно для монопольного рынка, когда одна или несколько фирм контролируют цены на определенную продукцию.

В условиях свободного конкурентного рынка, когда участников рынка достаточно много, цены не контролируются. Например, рыночная цена $p=4$, суммарный доход равен $r(x)=4x$.

В этом случае средний и предельный доходы равны $Ar=\dfrac{r(x)}{x}=\dfrac{4\cdot x}{x}=4,\ Mr=r'=4.$



Пример 55.

Известна функция затрат производства $y=c(x)=30x-0.01x^3$ (у.е.). Найти предельные затраты, если объем выпускаемой продукции равен 20 ед.

Решение.

Предельные затраты производства равны производной $y'=c'(x)=30x-0{,}03x^2$; при заданном объеме $x=20$ ед., найдем $y'(20)=c'(20)=30-0{,}03\cdot 20^2=30-12=18$ (у.е.).

Предельные затраты на производство дополнительной единицы продукции при заданном объеме выпускаемой продукции 20 ед. будут равны 18 у.е.

4.2.2. Экономический смысл производной второго порядка

Пусть $y = f(x)$ – *функция выпуска* продукции, она выражает зависимость объема производства от наличия или потребления ресурса x (частный вид производственной функции).

Производная $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ есть *предельная производительность ресурса,* она характеризует увеличение или уменьшение выпуска продукции, вызванное увеличением затрат данного ресурса x на 1 у.е.

Например, если ресурс x есть количество работников в данный момент времени, то производная $f'(x)$ выражает добавочную продукцию, производимую новым работником за единицу времени.

Производную второго порядка $y'' = f''(x) = (f'(x))'$, равную скорости изменения предельной производительности, называют **темпом изменения** функции $y = f(x)$.

Очевидно, что при положительном темпе $f''(x) > 0$ возрастает скорость изменения предельной производительности при увеличении x; при отрицательном темпе $f''(x) < 0$, увеличение x приводит к уменьшению скорости изменения функции.

Пример 56.

Количество произведенной продукции за рабочее время t, $1 \le t \le 8$ задано функцией: $g(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{7}{2}t^2 + 20t + 10.$

Найти производительность труда, скорость и темп ее изменения через два часа после начала работы и за час до ее окончания.

Решение.

Производительность труда в момент t равна производной. $g'(t) = -\dfrac{1}{3}3t^2 + \dfrac{7}{2}2t + 20 = -t^2 + t + 20.$

Скорость изменения производительности равна второй производной $g''(t) = -2t + 7.$

Темп τ изменения производительности равен

$$\tau = \frac{g''(t)}{g'(t)} = \frac{-2t+7}{-t^2+t+20} = \frac{2t-7}{t^2-t-20}.$$

Найдем их значения в заданный момент времени при $t_1 = 2$ и $t_2 = 7$:

$$g'(2) = 30; \quad g''(2) = 3; \quad \tau(2) = 0{,}1;$$
$$g'(7) = 20; \quad g''(7) = -7; \quad \tau(7) = -0{,}35.$$

Таким образом, к концу рабочего дня производительность труда снижается, и снижается скорость и темп ее изменения $(g'' < 0; \quad \tau < 0)$.

4.2.3. Эластичность функции

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$. Обозначают $E = \lim\limits_{\Delta x \to x} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{x}{y}$ или $E = \frac{x}{y} \cdot y'$.

Эластичность E показывает, на сколько процентов изменится значение переменной *y* при увеличении переменной x на *1* % (от значения x_0 до значения $x_0 + 0{,}01x_0$).

Если $|E_x(y)| > 1$, то функция называется **эластичной.**

Если $|E_x(y)| < 1 |E_x(y)| < 1$, то функция **неэластична.**

А в случае $|E_x(y)| = 1$ функция является **нейтральной.**

Рассматриваются эластичности:

- как *эластичность спроса* $D = D(p)$ *по цене* p: $E_p(D) = \frac{p}{D} \cdot D'$;
- *эластичность спроса* $D = D(I)$ *по доходу* I: $E_I(D) = \frac{I}{D} \cdot D'$;
- *эластичность предложения* $S = S(p)$ *по цене:* $E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot S'.$

Неэластичный спрос показывает, что изменение цены не приводит ни к какому изменению спроса, в этом случае $E_D = 0$.

В другом случае, когда самое малое снижение цены позволяет увеличить покупки от нуля до предела своих возможностей, говорят о **совершенно эластичном спросе** и $|E_D| = \infty$.

Имеют место следующие свойства эластичности:

1. Эластичность произведения функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0 равна сумме эластичностей в этой точке: $E_{uv} = E_u + E_v$.

2. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$ в точке x_0 (если $v(x_0) \neq 0$) равна разности эластичностей в этой точке: $E_{uv} = E_u - E_v$.

Пример 57.

Найти эластичность себестоимости, если известна функциональная зависимость себестоимости единицы продукции (y) от выпуска продукции (x) $y = -0.3x + 100$.

Решение.

Найдем эластичность по формуле $E = \frac{x}{y} \cdot y'$.

Получим $E = \frac{x}{-0.3x + 100} \cdot (-0.3)$ или $E = \frac{3x}{-3x + 1000}$.

Если выпуск продукции равен $x = 300$ у.е., то эластичность равна $E = \frac{900}{-900 + 1000} = \frac{900}{100} = 9$, *следовательно, при выпуске продукции на* 300 *у.е., увеличение его на* 1 % *приведет к увеличению себестоимости на* 9 %.

Если выпуск продукции равен 400 у.е., то эластичность $E = \frac{1200}{-1200 + 1000} = \frac{1200}{-200} = -6$, тогда увеличение выпуска продукции на 1 % приведет к снижению себестоимости на 6 %.

Пример 58.

Найти эластичность функции спроса $d = \frac{400}{p + 5}$ при равновесной цене, если функция предложения $S = \frac{p^2}{p + 5}$.

Решение.

Найдем равновесную цену p, решив уравнение $d(p)=s(p)$; $\frac{400}{p+5}=\frac{p^2}{p+5}$; $p^2=400$; $p>0$; $p=20$.

При равновесной цене 20 у.е. спрос равен $d(20)=\frac{400}{20+5}=16$.

Эластичность функции спроса $E=\frac{-p}{d}\cdot d'(p)=\frac{p\cdot(p+5)}{40}\cdot\left(-\frac{400}{(p+5)^2}\right)=-\frac{p}{p+5}$; при $p=20$ эластичность $E(20)=-\frac{20}{25}=-0.8$.

Так как эластичность отрицательна: $E=-0.8<0$, то при увеличении цены p на 1 %, от 20 у.е. до 202 у.е., спрос уменьшится на 0,8 %, от 16 до 15,827, поскольку $16-\frac{0{,}8}{100}\cdot 16=16-0{,}128=15{,}872$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие операции над множествами существуют?
2. Что называется предельной точкой множества?
3. Какими свойства обладает функция одной переменной?
4. Что называется пределом функции в точке?
5. Как найти односторонние пределы?
6. Сформулируйте теорему о существовании предела.
7. Дайте определение бесконечно малой функции, арифметическим операциям над бесконечно малыми.
8. Дайте определение бесконечно большим функциям, их связь с бесконечно малыми функциями.
9. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые функции. Приведите примеры.
10. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве.
11. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной функции.
12. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций (доказать для функции cos a).
13. Сформулируйте теорему о первом замечательном пределе.
14. Сформулируйте теорему о втором замечательном пределе.
15. Сформулируйте теорему о непрерывности функции.
16. Сформулируйте теорему об арифметических операциях над непрерывными функциями.
17. Дайте определение непрерывности сложной функции. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.
18. Дайте определение классификации точек разрыва. Приведите примеры.
19. Какие свойства непрерывных на отрезке функций существуют?
20. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.
21. Сформулируйте теорему Больцано-Коши.
22. Что называется производной, ее геометрическим и экономическим смыслом? Какова связь между существованием производной и непрерывностью функции в данной точке?
23. Какие производные суммы, произведения и частного существуют?
24. Какие производные сложной функции существуют? Приведите примеры.
25. Дайте определение дифференцируемости и дифференциала функции.
26. Дайте определение теоремы о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости и существованием производной.

27. Как найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически?

28. Сформулируйте теорему Ролля.

29. Сформулируйте теорему Лагранжа.

30. Сформулируйте теорему Коши.

31. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенного вида.

32. Как найти необходимое и достаточное условие неубывания (невозрастания) функции на интервале?

33. Какие точки экстремума функции существуют? Назовите необходимое условие существования экстремума. Сформулируйте теорему Ферма.

34. Что называется первым достаточным условием экстремума функции?

35. Как найти выпуклость и вогнутость кривой? Назовите достаточное условие выпуклости (вогнутости).

36. Как найти точки перегиба? Назовите необходимое и достаточное условие точек перегиба.

37. Что называется асимптотой кривой? Приведите уравнение вертикальных и наклонных асимптот.

38. Как найти линии и поверхности уровня функции нескольких переменных?

39. Что называется частными производными первого и высших порядков? Сформулируйте теорему о смешанных производных.

40. Какие примеры функции нескольких переменных в экономике существуют: функция издержек, производственная функция, функция Кобба-Дугласа, функция прибыли?

41. Что называется дифференциалом функции нескольких переменных?

42. Что называется производной по направлению?

43. Что называется градиентом функции нескольких переменных, его свойства?

44. Что называется экстремумом функции двух переменных, необходимые и достаточные условия экстремума?

45. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области?

46. Как найти условный экстремум? Сформулируйте метод множителей Лагранжа.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

1. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$:

1) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$; 2) $[-2;1)$;

3) $(-\infty;-2]\cup(1;+\infty)$; 4) $(-2;1)$.

2. Найдите значение функции при $x=\dfrac{\pi}{4}$, если

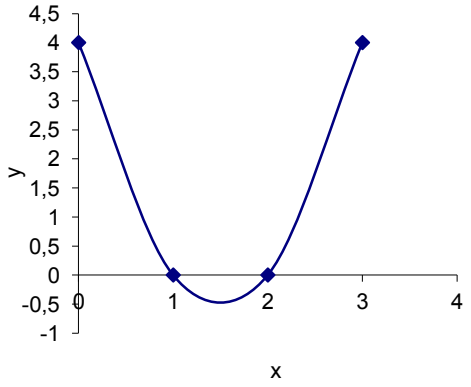
$$f(x)=\begin{cases}|\sin x-2|, \text{ если } |x|\geq 1,\\ \cos x, \text{ если } |x|<1.\end{cases}$$

1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 2.

3. Укажите функцию, область значений которой является множество $(-\infty;+\infty)$:

1) $y=x^{1/6}$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=tgx$; 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

4. Задайте формулой функцию, график которой изображен на рисунке:



1) $y=x^2-4x+4$;
2) $y=x^2-2x+4$;
3) $y=2x^2-6x-4$;
4) $y=2x^2-6x+4$.

5. Значение $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$ равно:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 1.

6. Значение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x^2}{x^3-3x^2}$ равно:

1) 0; 2) ∞; 3) 1; 4) $-\dfrac{2}{3}$.

7. Уравнение наклонной асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+3x-12}{x+5}$ имеет вид:

1) $y=x-2$; 2) $y=-x-1$; 3) $y=x+1$; 4) $y=2x+1$.

8. Найдите область определения функции $y=\arcsin(x-1)$:

1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $(0;+\infty)$; 3) $[-1;1]$; 4) $[-2;0]$.

9. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке (a,b), если она:

1) непрерывна в точке a и точке b;
2) непрерывна в каждой точке (a,b);
3) существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$;
4) непрерывна во всех точках (a,b), кроме, может быть, $x=a$ и $x=b$.

10. Укажите среди функций бесконечно малые функции при $x\to 1$:

1) $y=(x-1)^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{x^2-1}{2x}$; 4) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 5) $y=2^{1-x}$.

11. Укажите среди функций бесконечно большие функции при $x\to 1$:

1) $y=(x-1)^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{x^2-1}{2x}$; 4) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 5) $y=2^{1-x}$.

12. Дана функция вида $f(x)=\begin{cases} x^3-3, x\le 0 \\ 3x, 0<x<1 \\ 1-x^2, x\ge 1 \end{cases}$ пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ равны:

1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) не существует.

13. Установите соответствие между понятиями и их формулами:

1. Абсолютное приращение функции	а) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$
2. Приращение функции	б) $\Delta x = x_1 - x_0$
3. Приращение аргумента	в) $\lvert\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)\rvert$
4. Средняя скорость изменения функции	г) $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$
5. Предельная скорость изменения функции в точке	д) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

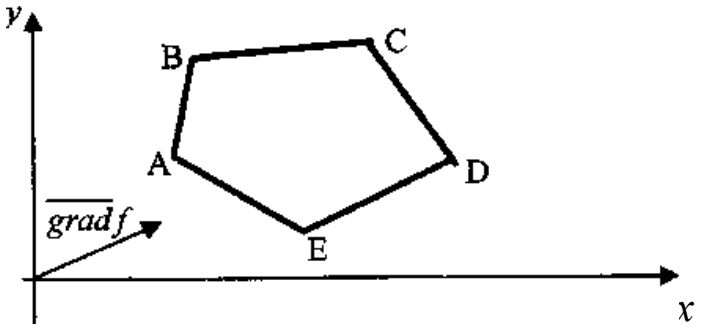
14. Для функции $f(x,y) = xy + x^3y^2$ градиент функции в точке $M(0;-1)$ равен:

1) $\overline{grad} f(x;y) = (3;0)$;

2) $\overline{grad} f(x,y) = (-1;0)$;

3) $\overline{grad} f(x,y) = (-3;-2)$.

15. Укажите, в какой точке области $ABCDE$ линейная функция, для которой на рисунке изображен градиент, принимает наибольшее и наименьшее значения:



ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Множество. Операции над множествами. Предельная точка множества.
2. Понятие функции одной и нескольких переменных, область определения.
3. Свойства функции одной переменной.
4. Предел функции в точке; геометрическая интерпретация предела.
5. Односторонние пределы. Теорема о существовании предела.
6. Бесконечно малая функция, арифметические операции над бесконечно малыми.
7. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми функциями.
8. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые функции. Привести примеры.
9. Предельный переход в неравенстве.
10. Теорема о пределе промежуточной функции.
11. Теорема о непрерывности основных элементарных функций (доказать для функции $y = \cos x$).
12. Первый замечательный предел.
13. Второй замечательный предел.
14. Непрерывность функции.
15. Арифметические операции над непрерывными функциями.
16. Непрерывность сложной функции. Теорема о непрерывности элементарных функций.
17. Классификация точек разрыва. Привести примеры.
18. Свойства непрерывных на отрезке функций.
19. Теорема Вейерштрасса.
20. Теорема Больцано-Коши.
21. Производная, ее геометрический и экономический смыслы. Связь между существованием производной и непрерывностью функции в данной точке.
22. Производная суммы, произведения и частного.
23. Производная сложной функции. Привести примеры.
24. Определение дифференцируемости и дифференциала функции.
25. Теорема о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости и существованием производной.

26. Производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически.

27. Теорема Ролля.

28. Теорема Лагранжа.

29. Теорема Коши.

30. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенного вида.

31. Необходимое и достаточное условие неубывания (невозрастания) функции на интервале.

32. Точки экстремума функции. Необходимое условие существования экстремума. Теорема Ферма.

33. Первое достаточное условие экстремума функции.

34. Выпуклость и вогнутость кривой. Достаточное условие выпуклости (вогнутости).

35. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условие точек перегиба.

36. Асимптоты кривой. Уравнение вертикальных и наклонных асимптот.

37. Линии и поверхности уровня функции нескольких переменных.

38. Частные производные первого и высших порядков. Теорема о смешанных производных.

39. Примеры функции нескольких переменных в экономике: функция издержек, производственная функция, функция Кобба-Дугласа, функция прибыли.

40. Дифференциал функции нескольких переменных.

41. Производная по направлению.

42. Градиент функции нескольких переменных, его свойства.

43. Экстремум функции двух переменных, необходимые и достаточные условия экстремума.

44. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.

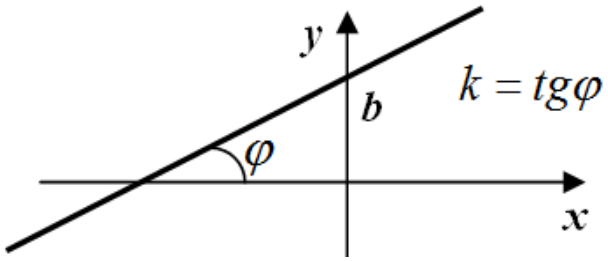
45. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

КОНСПЕКТ-СХЕМЫ (КС) ОСНОВНЫХ ТЕМ ЛЕКЦИЙ

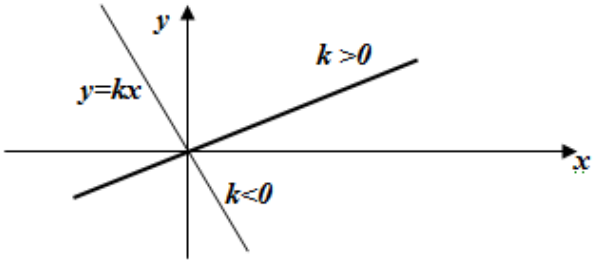
КС 1. Графики основных элементарных функций

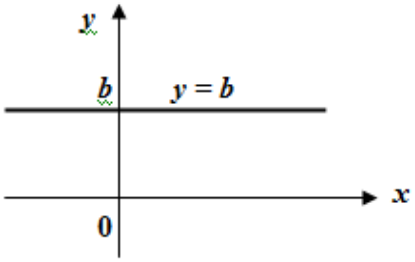
Алгебраические функции

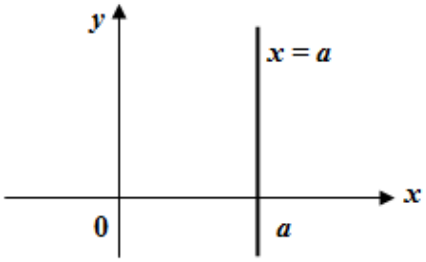
1. Линейная функция $y = kx + b$. Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$.



Частные случаи:

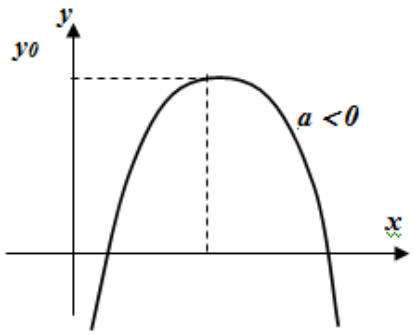


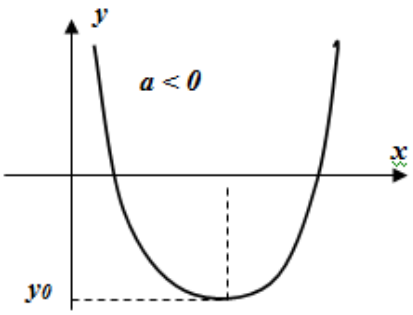




2. Квадратичная $y = ax^2 + bx + c$.

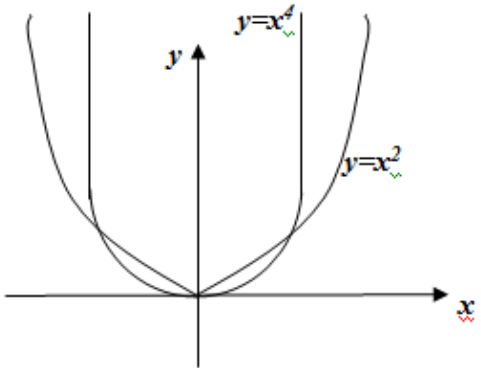
Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений: $y \in [y_0; +\infty)$ при $a > 0$ или $y \in (-\infty; y_0]$ при $a < 0$, где $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

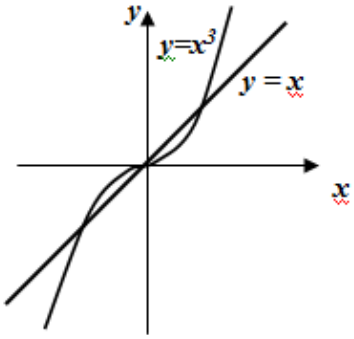




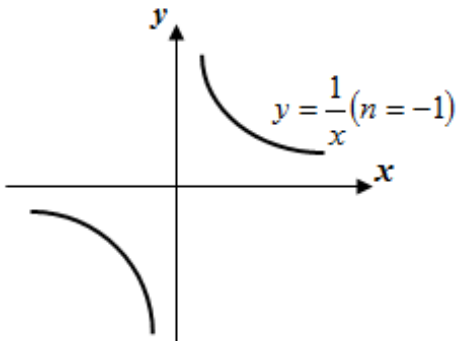
3. Степенная $y=x^n$.

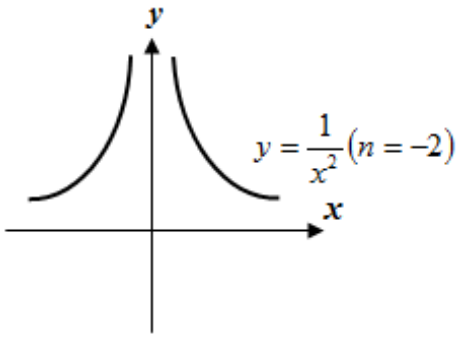
Для $y=x^n, n\in N$ область определения $x\in(-\infty;+\infty)$, область значений $y\in[0;+\infty)$ при n четном, или $y\in(-\infty;+\infty)$ при n нечетном.



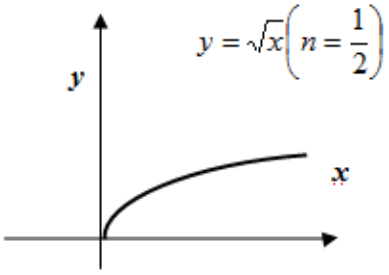


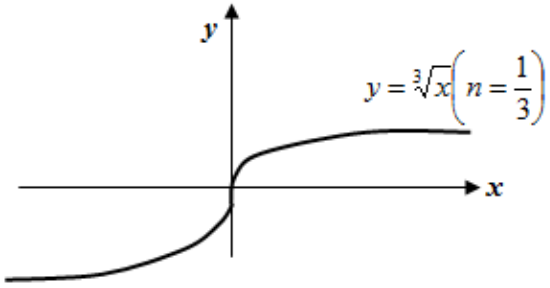
Для $y=x^{-n}, n\in N, x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty), y\in(0;+\infty)$ при n четном или $y\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ при n нечетном.





Для $y=x^{\frac{1}{n}}, n\in N,$ при n четном $x\in[0;+\infty), y\in[0;+\infty)$; при n нечетном $x\in(-\infty;+\infty), y\in(-\infty;+\infty)$.

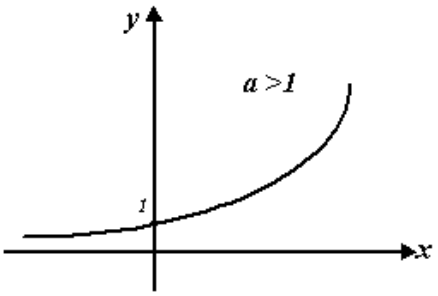


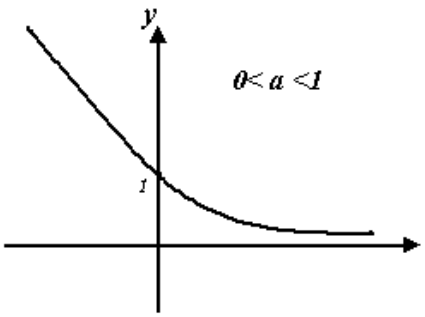


Трансцендентные функции

4. Показательная $y=a^x,(a>0,a\neq 1)$.

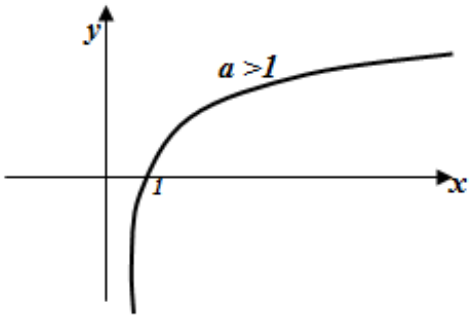
Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$. Область значений $y\in(0;+\infty)$.

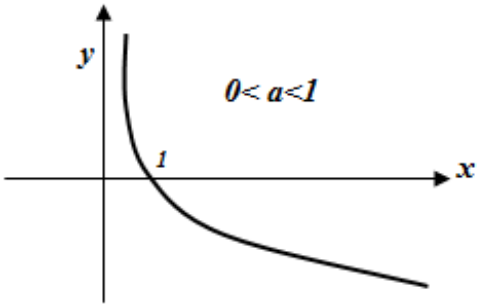




5. Логарифмическая $y=\log_a x\ \ (a>0,a\neq 1)$.

Область определения $x\in(0;+\infty)$. Область значений $y\in(-\infty;+\infty)$.

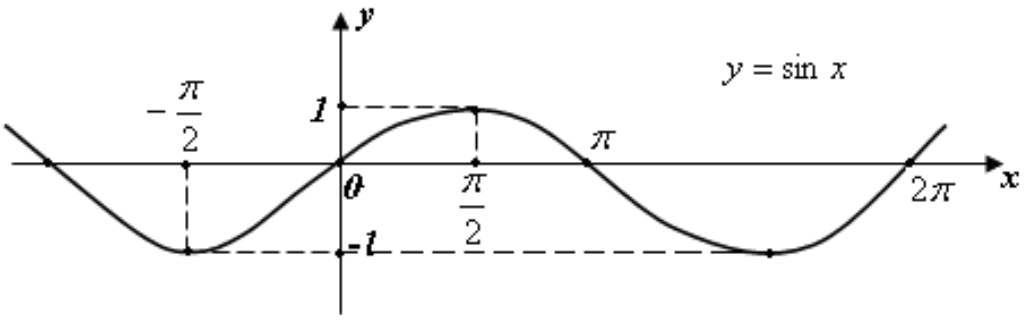




Тригонометрические функции

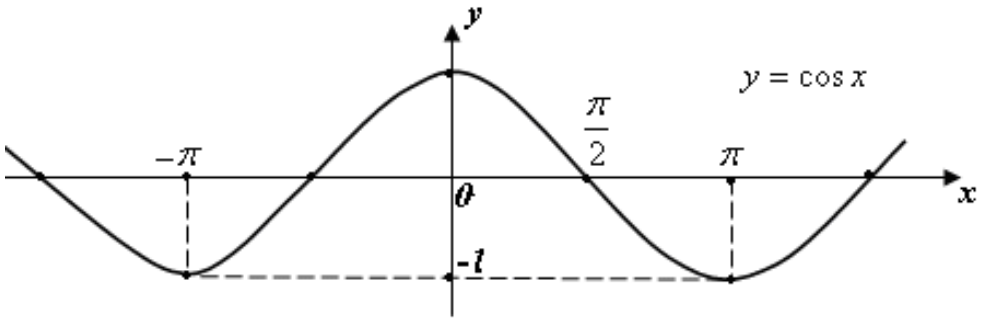
6. Синус $y=\sin x$.

Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$. Область значений $y\in[-1;1]$. Периодическая, с периодом 2π. Нечетная.



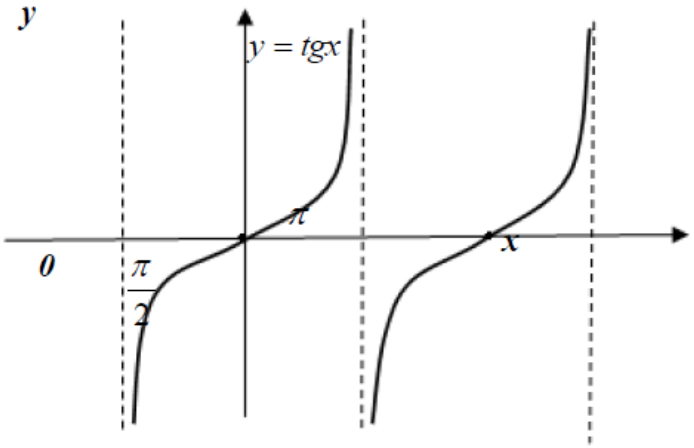
7. Косинус $y=\cos x$.

Область определения $x\in(-\infty;+\infty)$. Область значений $y\in[-1;1]$. Периодическая, с периодом 2π. Четная.



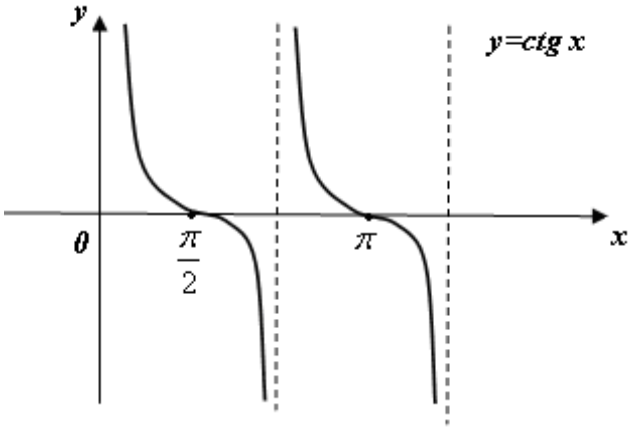
8. **Тангенс** $y=tgx$.

Область определения $x\in R, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k=0,\pm1,\pm2,...$ Область значений $y\in(-\infty;+\infty)$. Периодическая, с периодом π. Нечетная.



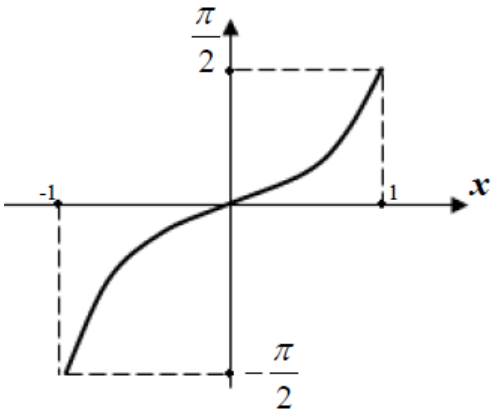
9. **Котангенс** $y=ctgx$.

Область определения $x\in R, x\neq\pi k, k=0,\pm1,\pm2,...$ Область значений $y\in(-\infty;+\infty)$. Периодическая, с периодом π. Четная.

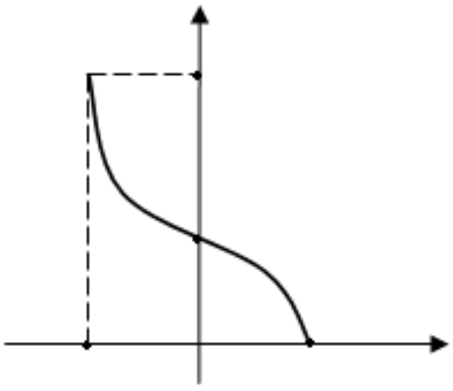


10. **Арксинус** $y = \arcsin x$.

Область определения $x \in [-1;1]$. Область значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Нечетная.

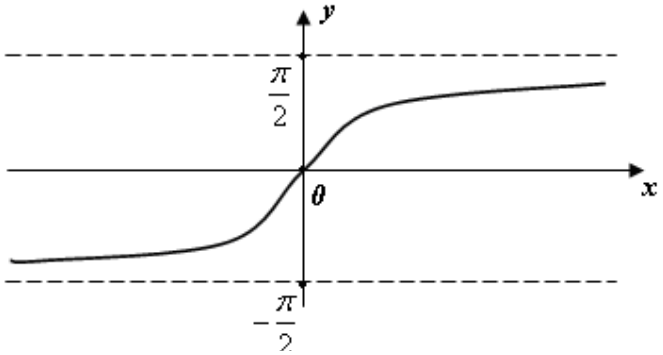


11. **Арккосинус** $y = \arccos x$.Область определения $x \in [-1;1]$. Область значений $y \in [0;\pi]$.



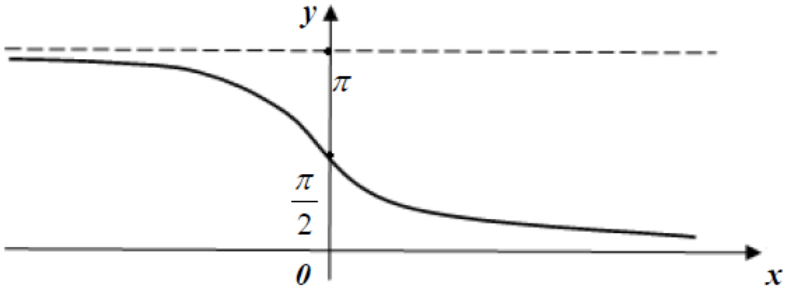
12. Арктангенс $y = arctgx$

Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Нечетная, возрастающая.



13. Арккотангенс $y = arcctgx$

Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in (0;\pi)$, убывающая.



КС 2. Предел функции. Теоремы о пределах

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Теорема 1. О существовании предела:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \exists f(x_0 - 0) - \textit{пределслева} \\ 2) \exists f(x_0 + 0) - \textit{пределсправа} \\ 3)\, f(x_0 - x) = f(x_0 + 0) = A \end{cases}.$$

Теорема 2. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to x_0} (u + v) = \lim\limits_{x \to x_0} u + \lim\limits_{x \to x_0} v$.

Теорема 4. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot u = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} u$.

Теорема 5. $\lim\limits_{x \to x_0} u \cdot v = \lim\limits_{x \to x_0} u \cdot \lim\limits_{x \to x_0} v$.

Теорема 6. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}u}{\lim\limits_{x\to x_0}v}$, если $\lim\limits_{x\to x_0}v\neq 0$.

Замечательные пределы:

ПЕРВЫЙ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ВТОРОЙ:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

КС 3. Бесконечно-малая функция (БМФ)

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно-малая функция при $x\to x_0$.

Классификация бесконечно малых функций:

- α и β называются *бесконечно малыми одного порядка малости, е*сли $\lim\limits_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\mathrm{A}$.
- $\alpha=0(\beta)$, α – бесконечно малая *более высокого порядка малости*, чем β, если $\lim\limits_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$.
- $\alpha(x)\sim\beta(x)$, ***эквивалентные*** БМФ, если $\lim\limits_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ при:

$x\to 0$;
$\sin x\sim x$;
$tg\,x\sim x$;
$\arcsin x\sim x$;
$arctg\,x\sim x$;
$\ln(1+x)\sim x$.

КС 4. Техника вычисления пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\frac{a}{0}=\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=\frac{a}{\infty}=0.$$

При вычислении $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ получим **неопределенности вида**:

- $\frac{\infty}{\infty}$ $f(x), g(x)$ – многочлены; разделим числитель и знаменатель на x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{1-4x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}-4}=-\frac{1}{4}.$$

- $\frac{0}{0}$ $f(x), g(x)$ – многочлены; разложим их на множители и сократим на $(x-x_0)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\frac{4}{2}=2.$$

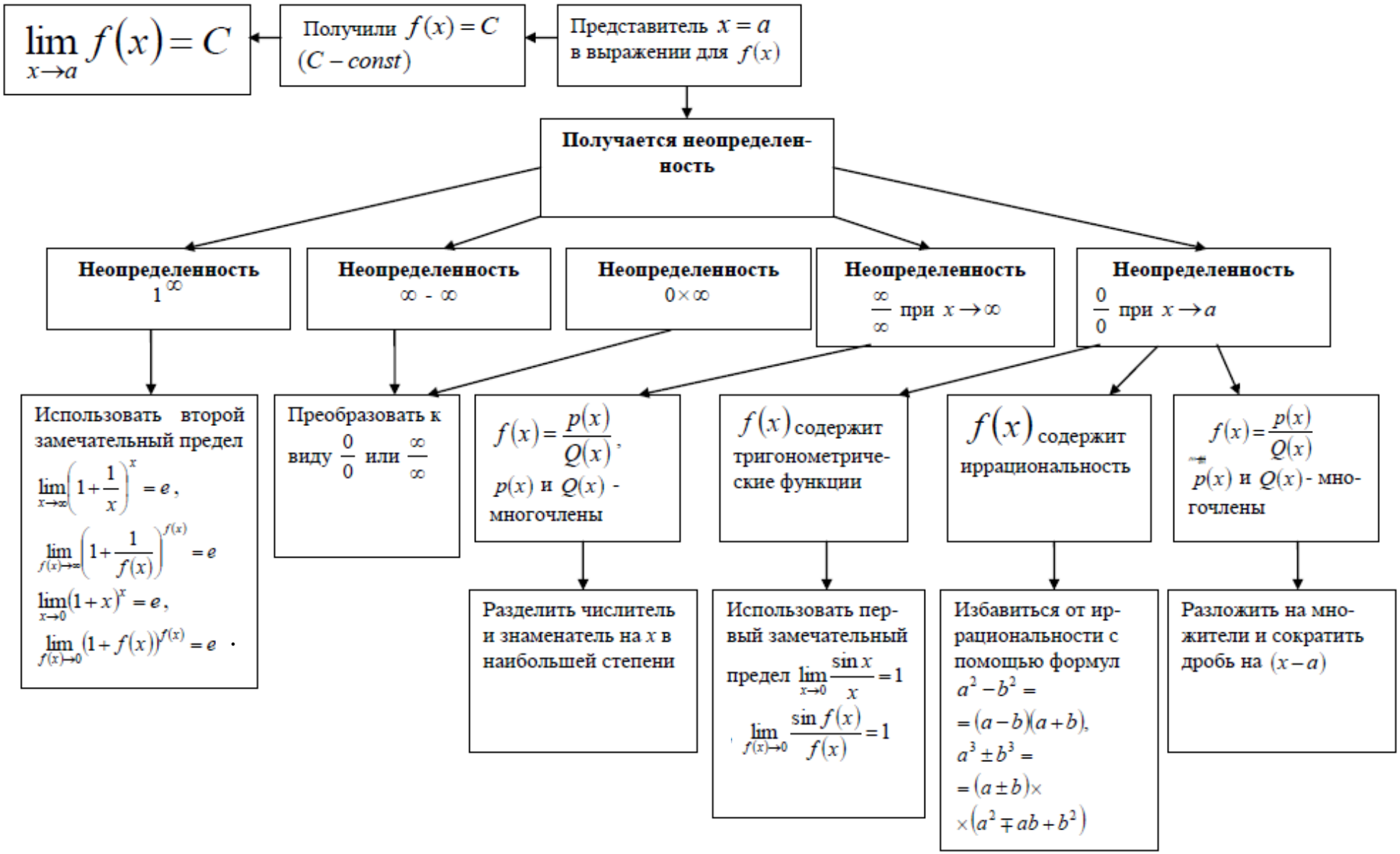
- $\frac{0}{0}$ $f(x), g(x)$ содержит иррациональные выражения $(\sqrt{x}-\sqrt{a})$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженный множитель $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$, получим $(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{a})=x-a$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+2}}{x-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}{(x-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-(x+2)}{(x-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1-x)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1-x)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=\frac{-1}{1\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

- $\frac{0}{0}$ $f(x), g(x)$ – тригонометрические функции, используем первый замечательный предел, или эквивалентные БМФ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg4x}=\left|\begin{matrix}\sin 5x\sim 5x\\ tg4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

Вычисление предела функции $y = f(x)$



КС 5. Непрерывность функции

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f(x) \text{ – непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x_0 \in \text{области определения } D \\ 2)\ \exists \text{ односторонние пределы } f(x_0 \pm 0) \\ 3)\ f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \end{cases}$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема **(об арифметических операциях над непрерывными функциями в точке).**

Если функции $f_1(M)$, $f_2(M)$ непрерывна в точке $M_0 \Rightarrow$непрерывны в точке M_0:

$$\begin{cases} 1)\ \text{алгебраическая сумма функций } f_1(\mathrm{M}) \pm f_2(\mathrm{M}); \\ 2)\ \text{произведение функций } f_1(\mathrm{M}) \cdot f_2(\mathrm{M}); \\ 3)\ \text{произведение функции на константу } K \cdot f_1(\mathrm{M}); \\ 4)\ \text{отношение функций } \dfrac{f_1(\mathrm{M})}{f_2(\mathrm{M})}, \text{ при } f_2(\mathrm{M}) \neq 0. \end{cases}$$

Теорема **(о непрерывности сложной функции).**

Пусть функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

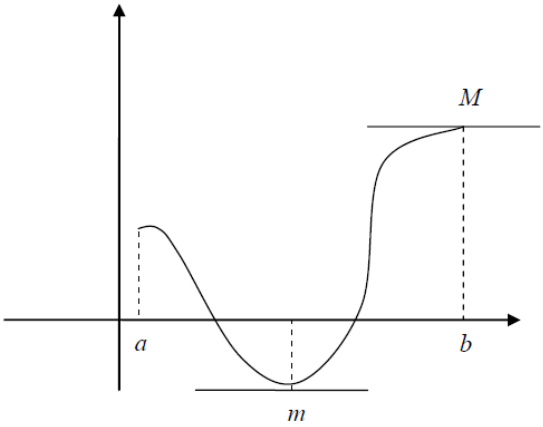
Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1 (**об ограниченности непрерывной функции).**

$y = f(x)$ – непрерывна на $[a; b] \Rightarrow$ ограничена на $[a; b]$.

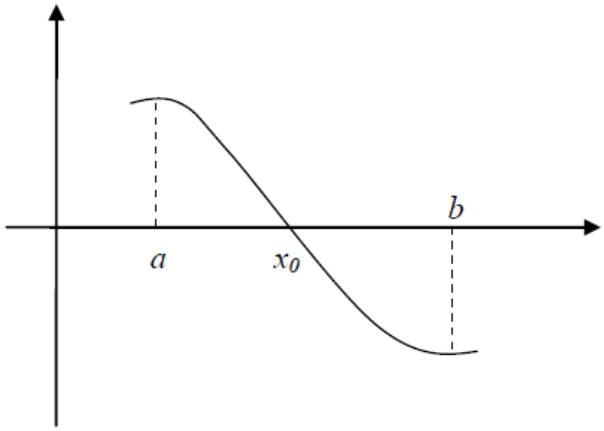
Теорема 2 (**Вейерштрасса).**

$y = f(x)$ – непрерывна на $[a; b] \Rightarrow$ $f(x)$ достигает на $[a; b]$ своих наибольшего (M) и наименьшего (m) значений: $m \le f(x) \le M$.



Теорема 3 (**Больцано-Коши**).

$y = f(x)$ – определена и непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow$ существует такая *точка* $x_0 \in (a;b)$, что $f(x_0)=0$.



Теорема 4 (**о непрерывности простейших элементарных функций**).

Все простейшие элементарные функции $(c,\ x^n,\ a^x,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ \arcsin x,\ \arccos x)$ непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Элементарные функции – функции, полученные из простейших элементарных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции (функция от функции).

Теорема 5 **(о непрерывности элементарных функций).**

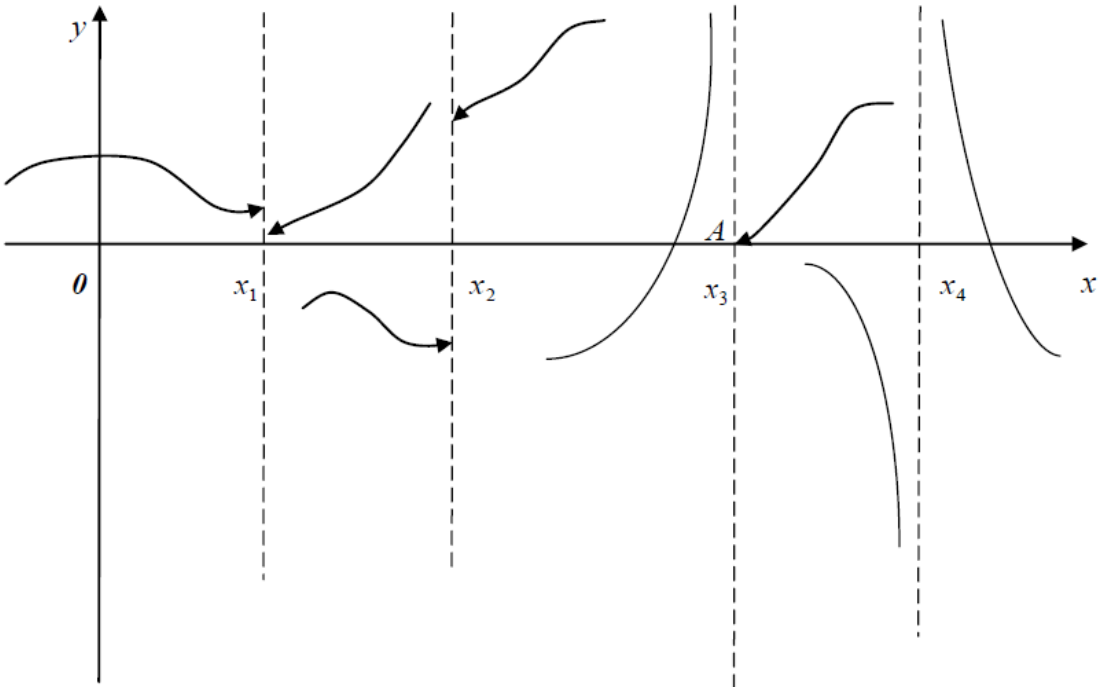
Всякая элементарная функция $f(x)$ непрерывна в любой точке своей области определения D.

Теорема 6 **(о промежуточных значениях непрерывной функции).**

$y = f(x)$ – определена и непрерывна на $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B \Rightarrow$ на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B.

Классификация точек разрыва:

- x_0 ***точка разрыва первого рода*** – односторонние пределы конечны, но не равны друг другу $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ ***(разрыв конечного скачка);*** односторонние пределы равны, но они не равны значению функции в точке $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ (**устранимый разрыв**);
- x_0 ***точка разрывом второго рода***, хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует $f(x-0)=\infty$ и (или) $f(x+0)=\infty$.



x_1, x_2 – точки разрыва первого рода:
x_1 – устранимый разрыв, так как $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;
x_2 – разрыв конечного скачка, так как $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.
x_3, x_4 – точки разрыва второго рода, причем $f(x_3-0)=+\infty$ и $f(x_3+0)=A$;
$f(x_4-0)=-\infty$ и $f(x_4+0)=+\infty$.

КС 6. Основные формулы и правила дифференцирования

Правила дифференцирования

Пусть c – постоянная, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции:

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

2. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, в частности $(c\cdot u)'=c\cdot u'$.

3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, в частности $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}\cdot u'$.

4. $y=f(u)$ – сложная функция, где $u=u(x)$, тогда $y'=f'(u)\cdot u'$.

5. $y(x)$ и $x(y)$ – взаимно обратные функции, то $x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$.

6. Функция задана параметрически $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, то $y'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}$, $y''(x)=\frac{(y'_x)'}{x'_t}$.

7. Показательно-степенная функция $(u^v)'=vu^{v-1}u'+u^v\ln u v'$, $u=u(x)$, $v=v(x)$.

Таблица производных:

1. $(c)'=0$.

2. $(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ (где $\alpha\in R$), в частности, $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$, $a>0$; в частности, $(e^u)'=e^u\cdot u'$, $(e^x)'=e^x$.

4. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$, $a>0$, $a\neq 1$; в частности, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

5. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.

6. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.

7. $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

8. $(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

9. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

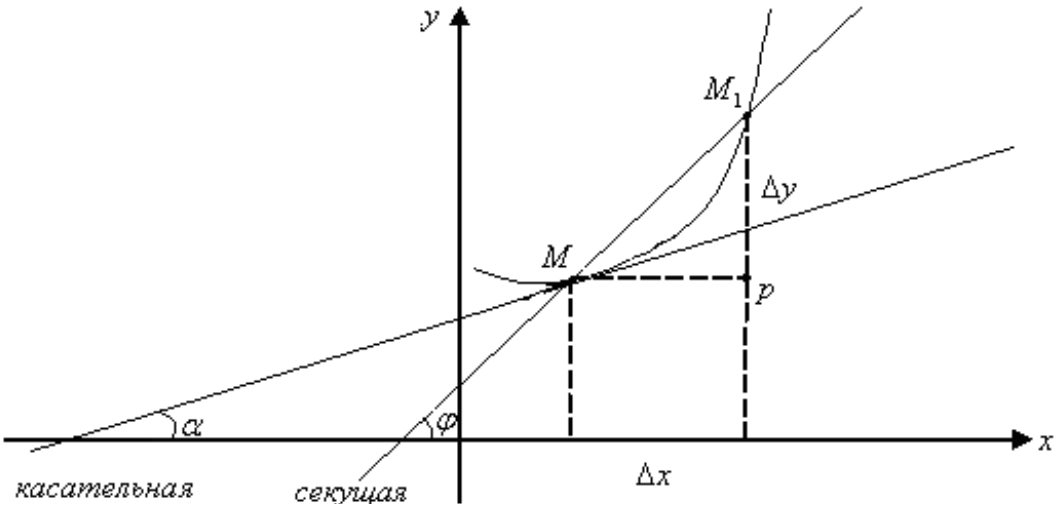
10. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

11. $(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

12. $(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

КС 7. Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$



$$y' = tg\alpha$$

Производная функции $y = f(x)$ в точке M равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M.

Уравнение касательной $y - y_M = f'(x_M) \cdot (x - x_M)$, где $f'(x_M) = k$ – угловой коэффициент касательной.

КС 8. Частные производные

$z = f(x; y)$ – функция двух переменных.

Частные производные первого порядка:

- $z'_x = f'_x(x; y) = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ – частная производная функции $f(x; y)$ по x;
- $z'_y = f'_y(x; y) = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ – частная производная функции $f(x; y)$ по y.

Частные производные второго порядка:

- $z''_{xx} = (z'_x)'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – частная производная функции z'_x по переменной x;
- $z''_{yy} = (z'_y)'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – частная производная функции z'_y по переменной y;
- $z''_{xy} = (z'_x)'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – частная производная функции z'_x по переменной y;
- $z''_{yx} = (z'_y)'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – частная производная функции z'_y по переменной x.

КС 9. Дифференциал функции, его свойства

$f'(x)\cdot\Delta x$ – главная часть приращения $\Delta f(x)$, то есть $A\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\Delta x, A = f'(x)$.

Тогда $df(x) = f'x\cdot\Delta x$.

В частности, если $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$, то есть дифференциал аргумента x равен приращению этого аргумента. Таким образом, $df(x) = f'(x)\cdot dx$.

Свойства дифференциала

Пусть $f_1(M)$, $f_2(M)$ – функции, дифференцируемые в точке M. Тогда $dC = 0$, где C – постоянная величина.

$d(C\cdot f(M)) = C\cdot df(M)$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала.

$d(f_1(M) \pm f_2(M)) = df_1(M) \pm df_2(M)$.

$d(f_1(M)\cdot f_2(M)) = df_1(M)\cdot f_2(M) + f_1(M)\cdot df_2(M)$.

$$d\left(\frac{f_1(M)}{f_2(M)}\right) = \frac{df_1(M)\cdot f_2(M) - f_1(M)\cdot df_2(M)}{f_2^2(M)}, \quad f_2(M) \neq 0.$$

Пусть функции $u = f(M) = f(x)$ – функции одной переменной x, тогда имеем дифференциалы:

$du = f'(x)dx$ – первого порядка;

$d^2u = d(du) = f''(x)dx^2$ – второго порядка;

$d^3u = d(d^2u) = f'''(x)dx^3$ – третьего порядка;

$d^nu = d(d^{(n-1)}u) = f^{(n)}(x)dx^n$ – порядка n.

КС 10. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в $(a;b)$, имеет $\max(\min)$ в некоторой внутренней точке $x = x_0 \in (a;b)$ и дифференцируема в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

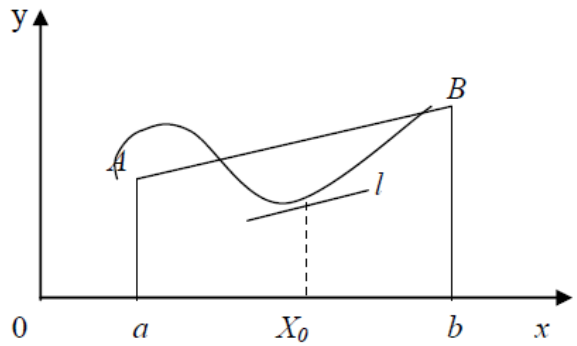
Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и имеет на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b) = c$, то на интервале $(a;b)$ существует хотя бы одна точка $x = x_0$ такая, что $f'(x) = 0$.

Теорема Коши. Если функция $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то существует хотя бы одна точка $x = x_0 \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Теорема Лагранжа. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $x = x_0 \in (a;b)$ такая, что $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что через точку $(x_0; f(x_0))$ можно провести касательную l к графику функции, параллельную секущей AB, так как $k_{AB} = k_l = f'(x_0)$.



Правило Лопиталя. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ или\\ x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ или\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$

Правило Лопиталя может применяться неоднократно.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

КС 11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

- Если поверхность задана уравнением $z=f(x;y)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0),$$

где $\overline{N}=\left(f'_x(x_0;y_0);\ f'_y(x_0;y_0);-1\right)$ – нормальный вектор плоскости.

- Если поверхность задана неявным уравнением $F(x;y;z)=0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0,$$

где $\overline{N}=\left(F'_x(M_0);F'_y(M_0);F'_z(M_0)\right)$ – нормальный вектор плоскости.

- Каноническое уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

или

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

КС 12. Алгоритм нахождения экстремумов

$y=f(x)$ – функция одной переменной.

Необходимое условие существования экстремума функции: если $x=x_0$ – точка экстремума, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует, называется ***критическими.***

Достаточное условие существования экстремума функции: если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и ее окрестности, дифференцируема в этой окрестности, кроме, быть может, самой точки, и производная $y' = f'(x)$ при переходе через точку $x = x_0$ меняет свой знак, то функция имеет экстремум при $x = x_0$.

При этом $x = x_0$ – точка максимума, если знак меняется с «+» на «-», и $x = x_0$ – точка минимума, если знак меняется с «-» на «+».

$z = f(x;y)$ – функция двух переменных, D – область определения; $P_0(x_0;y_0) \in D$.

Необходимые условия существования экстремума: если функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $P_0(x_0;y_0)$ экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю $\begin{cases} f'_x(x_0;y_0) = 0, \\ f'_y(x_0;y_0) = 0 \end{cases}$ или хотя бы одна из частных производных не существует.

Точки, в которых выполняются необходимые условия существования экстремума функции – *критические.*

Достаточное условие существования экстремума: чтобы функция $z = f(x;y)$ имела в критической точке экстремум, достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие $\Delta > 0$, где определитель Δ имеет вид $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$.

Если при этом $f''_{xx}(P_0) > 0$, то P_0 – точка минимума; если $f''_{xx}(P_0) < 0$, то P_0 – точка максимума.

При $\Delta < 0$ экстремум в точке P_0 не существует.

При $\Delta = 0$ требуется непосредственное исследование значений функции в точке P_0 и в точках ее окрестности.

КС 13. Наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке и в области

Для нахождения наибольшего или наименьшего значений $y = f(x)$ на $[a;b]$ надо:

1) найти критические точки из уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие интервалу $(a;b)$;

2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a;b]$;

3) выбрать самое большое и самое меньшее значения из всех вычисленных значений функции на отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x;y)$ в области D можно использовать следующий алгоритм:

1. Решить систему $\begin{cases} f'_x(x;y)=0 \\ f'_y(x;y)=0 \end{cases}$, найти критические точки, расположенные внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D. Так как координаты точек границы связаны соотношением $y=\varphi(x)$, то данная функция $z = f(x;y)$ на границе D превращается в функцию одной переменной: $z = f(x;y) = f(x;\varphi(x))$, где $a \le x \le b$ для точек D.

Если граница области образована различными линиями, то надо находить наибольшее и наименьшее значения функции на каждом участке границы в отдельности.

3. Из всех полученных значений функции выбрать самое большее и самое малое. Это и будут наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;y)$ в области D.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дифференциальное исчисление является одним из основных разделов математического анализа, которое необходимо для успешного усвоения других глав математической дисциплины.

В издании освещаны классические способы дифференциального исчисления, применяемые для обработки числовых массивов в различных отраслях агропромышленного производства, включающих экономику и управление, землеустройство, природообустройство, техносферную безопасность и агроинженерию.

Представленное учебное пособие разработано с учетом основных методологических принципов и позволяет сформировать у студентов теоретические знания по теории данного раздела и устойчивые умения применения аппарата дифференциального исчисления функций одной и несокльких переменных к решению практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие : в 2 частях / П. Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Москва, 2023. – Ч. 1. – 816 с.
2. Ильин, В. А. Основы математического анализа : учебник : в 2 частях / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Физматлит, 2014. – Ч. 1. – 647 с.
3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов и менеджеров : учебник / Н. Ш. Кремер [и др.]. – Москва : КноРус, 2018. – 909 с.
4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов и менеджеров: практикум / Н. Ш. Кремер [и др.]. – Москва: КноРус, 2015. – 480 с.
5. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики: учебное пособие / В. А. Кудрянцев, Б. П. Демидович. – Москва: АСТ: Астрель, 2008. – 654 с.
6. Кузнецов, Л. А., Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты / Л. А. Кузнецов. – 15-е изд. стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 189 с.
7. Лукинова, С.Г. Высшая математика для экономистов: учебное пособие : в 2 частях / С. Г. Лукинова. – Москва, 2005. – Ч. 1. – 117 с.
8. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие : в 2 томах / Н. С. Пискунов. – Москва: Интеграл-пресс, 2006. – Т. 1. – 456 с.
9. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 частях / Д. Т. Письменный. – 7-е изд. – Москва : Айрис Пресс, 2011. – Ч. 1. – 608 с.
10. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами / К. Н. Лунгу [и др.]. – 9-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2011. – 578 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЯ 1 – 20.

Найти и построить область определения функций одной переменной (а, б) и двух переменных (в):

1:	а) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$;	б) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$;	в) $z=\frac{1}{\sqrt{xy}}$.
2:	а) $f(x)=\arcsin\frac{2x-3}{x+1}$;	б) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\cos x$;	в) $z=\frac{1}{x^2-y^2}$.
3:	а) $f(x)=\ln(5x-x^2)$;	б) $f(x)=\sqrt{2x+\frac{5}{x}}$;	в) $z=\arcsin\frac{x-y}{4}$.
4:	а) $f(x)=\sqrt{6+5x-x^2}$;	б) $f(x)=\ln(1-x^2)$;	в) $z=\sqrt{9-x^2-2y^2}$.
5:	а) $f(x)=\cos(5+3x)+\frac{3x+1}{x+2}$;	б) $f(x)=\sqrt{(x^4-1)}$;	в) $z=\ln(2-y-x^2)$.
6:	а) $f(x)=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-9}$;	б) $f(x)=\lg\frac{2x-6}{5x}$	в) $z=\arccos\frac{2x-y}{3}$.
7:	а) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$;	б) $f(x)=\frac{\cos 5x}{\sqrt[5]{x}}$;	в) $z=\ln(x^2-y-5)$.
8:	а) $f(x)=\arcsin\frac{3x-4}{2}$;	б) $f(x)=\sqrt{\frac{(x^3-3x)}{2x-4}}$;	в) $z=\lg(4-y^2+2x)$.
9:	а) $f(x)=\lg\frac{2x+1}{2x-1}$;	б) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$;	в) $z=\frac{1}{\sqrt{x-y^2+4}}$.

10:	а) $f(x)=\lg(3-2x-x^2)$;	б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x-6}}$;	в) $z=\dfrac{2}{x-y^2}$.
11:	а) $f(x)=\arccos\dfrac{2x+5}{3x}$;	б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(2x+3)}{x^2-4}}$;	в) $z=\lg(4+x^2-y^2)$.
12:	а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-4}}$;	б) $f(x)=\sqrt{x^3-9x}$;	в) $z=\sqrt{9-x^2+y^2}$.
13:	а) $f(x)=\lg(x^2+x-6)$;	б) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x-4x^3}}$;	в) $z=\arccos(x^2+y^2-3)$.
14:	а) $f(x)=\arcsin\dfrac{4x+1}{x-2}$;	б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-x^3}{4}}$;	в) $z=\ln(y-x^2+2x)$.
15:	а) $f(x)=\sqrt{7+4x^2}+2\sqrt{x^2-1}$;	б) $f(x)=\ln\dfrac{6-2x}{4+x}$;	в) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+y}}$.
16:	а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{6-3x}}+\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-2}$;	б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4+2x}{2+3x^2}}$;	в) $z=\lg(1-x^2-y^2)$.
17:	а) $f(x)=\lg(3x+x^2)$;	б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{5x}{x^2-4}}$;	в) $z=\arcsin\dfrac{2+x-y}{4}$.
18:	а) $f(x)=\ln\dfrac{2x+4}{x-1}$;	б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{4x}}$;	в) $z=\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1}$.
19:	б) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-9}$;	б) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+3}$;	в) $z=\sqrt{3x^2+4y^2-12}$.
20:	а) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{7x}{x-2}$;	а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{3}x^2-3}$;	в) $z=\ln\dfrac{2x-3y}{4}$.

ЗАДАНИЯ 21–40.

Найти пределы следующих функций:

21: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^2-15x+2}{2x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-12x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

22: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+14x^2-3x}{2x^4-18x^3+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 5x}$.

23: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+1}{2x^2-4x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{6x^2-5x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{8x}$.

24: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+13x-1}{12x^3-13x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{2x^2-x+10}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\cdot\sin x}$.

25: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4-16x^6}{8x^5+6x^3-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-3x}{x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^3 4x}{tg^3 x}$.

26: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^5-5}{23x^4-14x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-36}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2+\sqrt{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{1+2x}-1}$.

27: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+17x^2-3}{6-33x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 7x}$.

28: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{23x^5-14x^2+4}{x-13x^3-5x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{x+8}}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x\cdot arctg5x}{tg^2 2x}$.

29: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3-8x^2+1}{5x-3x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{8+x}-\sqrt{3+6x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\arcsin 2x}{tg^2 3x}$.

30: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+13x^2-2}{4x^6+5x^5+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$.

31: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^5+13x^2-2}{4+5x^5+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{x+9}}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

32: а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2+\sqrt{x-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^2-4x^3+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

33: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{4tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3-13x^2+7}{x^2+x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$.

34: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7x+2}-3}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-7}{12x^2+x^4+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$.

35: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+x^2}{x^2-3x^3-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{4x^2}$.

36: а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-0-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^3-5x+2}{4x^2+2x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+8x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^2 4x-\cos 8x}{x-x^3}$.

37: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{8+x}-\sqrt{3+6x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x^4-1}{2x^4+3x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 5x}$.

38: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg(x-2)}{x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+4x-5}{4x^2-3x^3+2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{3x^2+2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-x}{\sin^2 3x}$.

39: а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+3x}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-3x+10}{7x^4+2x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}}{tgx^2}$.

40: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{2x^2-x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+5x-7}{2x^2-7x^3+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin x^2}$.

ЗАДАНИЯ 41–60.

Найти производные функций одной переменной (а, б, в, г) и частные производные функции двух переменных (д):

41: а) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}}{x+1}$; б) $y=2^{\cos^3 2x}$; в) $y=\sin 2x\cdot(tgx+1)$; г) $y=3arctg^2\dfrac{x}{2}$; д) $z=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)+3^{\sqrt{\arcsin x}}$.

42: а) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[5]{x^2-3}}$; б) $y=(e^{\cos x}+2x)^3$; в) $y=\ln\sin(2x+1)$; г) $y=\arcsin e^{2x}$; д) $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}-\dfrac{1}{xy}$.

43: а) $y=x^2\cdot\sqrt{1-x^3}$; б) $y=\arcsin\sqrt{1-2x}$; в) $y=\dfrac{4\sin x-x}{\cos^2 x}$; г) $y=2^{tgx^3}$; д) $z=\sqrt[5]{xy+y^3}-2^{xy}$.

44: а) $y=(2+x)\cdot\sqrt{3-2x+5x^2}$; б) $y=5^{\sin 3x}+2$; в) $y=x^2\cdot\dfrac{\ln(1+3x)}{x^2}$; г) $y=arctg^2\dfrac{3}{x}$; д) $z=\ln\left(x^4+xy^3\right)-3^{\sqrt{x}}$.

45: а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x^2-1}$; б) $y=2tg^3(1-x)$; в) $y=\sin x\cdot\ln(1+\cos x)$; г) $y=3^{arctg^2}$; д) $z=3x^2y^4-3^{\sin(xy)}$.

46:	а) $y=\sqrt[3]{x^5}+5x^4-\frac{5}{x}$;	б) $y=\frac{x\cdot\ln x}{x^2-1}$;	в) $y=arctg(\sin^2 x)$;	г) $y=3^{\sqrt{1-\cos x}}$;	д) $z=5x^3+y^4+5^{arctg\sqrt{x}}$.
47:	а) $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;	б) $y=tg^2x+\ln\cos x$;	в) $y=\arcsin\sqrt{1+2x}$;	г) $y=2^{\sin 5x}$;	д) $z=x^4+y^5-\sin^3(xy)$.
48:	а) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$;	б) $y=tg^2x\cdot ctgx$;	в) $y=arctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$;	г) $y=\ln(1+2e^{\cos x})$;	д) $z=3x^4y^5+x^y$.
49:	а) $y=4x-\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;	б) $y=\sin^3 5x\cdot tg(1+x)$;	в) $y=\ln(x^2+2^x)$;	г) $y=e^{\sqrt{\arccos x}}$;	д) $z=5x^2+xy^6+y^x$.
50:	а) $y=\frac{2x^2-4x}{\sqrt{1+x}}$;	б) $y=tg\frac{1}{x}\cdot\sin x^2$;	в) $y=\ln(e^x-4x)$;	г) $y=(\arcsin e^x)^2$;	д) $z=7x^3y^2+3^{tgx}$.
51:	а) $y=\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$;	б) $y=\frac{2\sin x^2}{1+\cos^2 x}$;	в) $y=e^{-x}\cdot\ln(1+3x^2)$;	г) $y=\sqrt[3]{arctg\frac{x}{2}}$;	д) $z=5^{ctgy}+x^2y^4$.
52:	а) $y=\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$;	б) $y=(x+1)^3+\sin^2 x$;	в) $y=\ln(x^2+2x)\cdot e^{x^2}$;	г) $y=\sqrt{arctg\frac{1}{x}}$;	д) $z=e^{xy}+y^4x^6$.

53:	а) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$;	б) $y=(x+\cos x)\cdot\ln^2 x$;	в) $y=arcctg\dfrac{x}{a}$;	г) $y=3^{\sqrt{\arcsin x}}$ $z=\dfrac{x^2y+y^4}{\sqrt{xy}}$;	д) $z=\ln\left(x^4+xy^3\right)-3^{\sqrt{x}}$.
54:	а) $y=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}$;	б) $y=\sin\dfrac{1}{x}\cdot\cos x^2$;	в) $y=\ln\sqrt[3]{1-x^2}$;	г) $y=(artg2^x)^3$;	д) $z=8^{\sin y}+6^{\cos x}-x^2y$.
55:	а) $y=\dfrac{\sqrt{1-2x}}{x}$;	б) $y=\cos 2x\cdot\left(2+\sin^2 x\right)$;	в) $y=\ln\left(2^x tgx\right)$;	г) $y=(e^{\cos x}-1)^3$;	д) $z=3x^3y^4-10^{xy}$.
56:	а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}}{3x-1}$;	б) $y=tg2x\cdot\cos^2 x$;	в) $y=\ln\sin(1-4x)$;	г) $y=(artg3^x)^2$;	д) $z=x^3+yx^7+x^{tgy}$.
57:	а) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;	б) $y=arctgx\cdot\sin^2 x$;	в) $y=\ln(5x+ctgx)$;	г) $y=\sqrt[3]{\arcsin 5x}$;	д) $z=x^2y^4+y^{\sin x}$.
58:	а) $y=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x+2}}$;	б) $y=\cos\left(x^2\cdot\ln^2 x\right)$;	в) $y=\arccos\left(e^{-2x}\right)$;	г) $y=2^{\sin^3 x}+tg^2 x$;	д) $z=\arcsin\left(x^2+y^2\right)-2^y$.
59:	а) $y=\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{3}{x}-4x$;	б) $y=\cos x\cdot\sin^2 x$;	в) $y=5^{arctg\sqrt{x}}$;	г) $y=\ln\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)$;	д) $z=tg^3(xy)-x^3y^4$.

60: а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{4x-5}$; б) $y=\sin 3x\cdot tg6x-5\cos^2 x$; в) $y=\arccos\left(e^{-x}\right)$; г) $y=5^{\ln\sqrt{x}}$; д) $z=\sqrt[5]{x^2+y^2}-4^{\sin(xy)}$.

ЗАДАНИЯ 61–80.

Исследовать функции и построить графики этих функций:

61: а) $y=3x^2-4x^4$; б) $y=\dfrac{3x^2+2x+15}{x+4}$.

62: а) $y=x^4-2x^2+1$; б) $y=\dfrac{4x^2+3x+15}{x+5}$.

63: а) $y=\dfrac{1}{4}x^4-3x^3$; б) $y=\dfrac{x^2-3x-6}{x+2}$.

64: а) $y=\dfrac{1}{5}x^5-3x^3+1$; б) $y=\dfrac{2x^2+4x+2}{x+3}$.

65: а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+2$; б) $y=\dfrac{2x^2+3x+13}{x-1}$.

66: а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-5x^5$; б) $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.

67: а) $y=3x^3-9x$; б) $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x+4}$.

68: а) $y=x^4-2x^2+2$; б) $y=\dfrac{3x\ -2x^2+3}{x+1}$.

69: а) $y=3x^3-36x$; б) $y=\dfrac{4x^2+6x}{x+2}$.

70: а) $y = x^6 - \frac{3x^4}{2}$; б) $y = \frac{4x - 0.5x^2}{x+1}$.

71: а) $y = 2x^3 - 6x + 1$; б) $y = \frac{8x - x^2 - 16}{x-1}$.

72: а) $y = 2x^4 - 8x + 1$; б) $y = -\frac{2x^2 + 3x + 13}{x-1}$.

73: а) $y = 2x^4 - 4x + 2$; б) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+2}$.

74: а) $y = 4x^4 - 2x^3 + 1$; б) $y = -\frac{x^2 - 3x - 3}{x+1}$.

75: а) $y = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^4 + 2$; б) $y = \frac{3x - 2x^2}{x-2}$.

76: а) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$; б) $y = \frac{x^2 - 4x - 16}{x-1}$.

77: а) $y = 2x^3 - 4x^2 + 2$; б) $y = \frac{x^2 - 3x - 3}{x-1}$.

78: а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$; б) $y = \frac{x^2 - 3x - 6}{x+1}$.

79: а) $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{8}{3}x^3 + 2$; б) $y = \frac{3x^2 + 4x + 16}{x+4}$.

80: а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$; б) $y = -\frac{3x - x^2}{x-2}$.

ЗАДАНИЯ 81–100.

Найти выражение для функции $u = u(x,\ y)$, если функция $z = f(x,\ y)$ задана:

81) $u = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \cos(xy)$,

82) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; *если* $z = \sin(x + ay)$,

83) $u = \dfrac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = z + x\dfrac{\partial z}{\partial x}$; *если* $z = e^{xy}$,

84) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \ln(x^2 - y^2)$,

85) $u = x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$; *если* $z = \dfrac{x}{y}$,

86) $u = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \cos(y + 2x)$,

87) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \cos(y + 2x)$,

88) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + xy)z$; *если* $z = e^{yx+y^2}$,

89) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, *если* $z = \ln(x^2 + (y+1)^2)$,

90) $u = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$; *если* $z = \dfrac{x}{y}$,

91) $u = x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$; *если* $z = \dfrac{x}{y}$,

92) $u = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \cos(y + 2x)$,

93) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \cos(y + 2x)$,

94) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + xy)z$; *если* $z = e^{yx+y^2}$,

95) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \ln(x^2 + (y+1)^2)$,

96) $u = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; *если* $z = \dfrac{x}{y}$;

97) $u = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial x}$; *если* $z = \dfrac{x^3 + 5}{y}$;

98) $u = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; *если* $z = \dfrac{x^2}{y^3}$;

99) $u = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \dfrac{x^3}{y^4}$;

100) $u = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; *если* $z = \dfrac{x^2}{y^2}$.

ЗАДАНИЯ 101–120.

Для заданной функция $Z = f(x, y)$ найти:

1) вектор-градиент в точке $M_0(x_0, y_0)$;
2) наибольшую скорость возрастания функции в точке $M_0(x_0, y_0)$;
3) экстремум функции $Z = f(x, y)$;
4) построить вектор-градиент и линию уровня, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Заданные функции:

101. $Z = x^2 + y^2 + 4x + 4y,\ M_0(2,1)$.
102. $Z = x^2 + y^2 - 2x - 2y,\ M_0(1,-1)$.
103. $Z = x^2 + y^2 + 2x - 2y,\ M_0(1,1)$.
104. $Z = x^2 + y^2 + 2x + 2y,\ M_0(1,3)$.
105. $Z = x^2 + y^2 - 4x - 4y,\ M_0(3,1)$.
106. $Z = x^2 + y^2 - 6x - 6y,\ M_0(2,0)$.
107. $Z = x^2 + y^2 - 8x - 8y,\ M_0(2,-2)$.
108. $Z = x^2 + y^2 + 8x + 8y,\ M_0(1,1)$.
109. $Z = x^2 + y^2 + 2x - 12y,\ M_0(1,-1)$.
110. $Z = x^2 + y^2 + 12x + y,\ M_0(3,5)$.
111. $Z = x^2 + y^2 - 10x + 10y,\ M_0(1,1)$.
112. $Z = x^2 + y^2 + 2x + 14y,\ M_0(2,1)$.
113. $Z = x^2 + y^2 - x - 12y,\ M_0(1,1)$.
114. $Z = x^2 + y^2 + 2x - 4y,\ M_0(-1,1)$.
115. $Z = x^2 + y^2 + 6x - 2y,\ M_0(1,3)$.
116. $Z = x^2 + y^2 + 4x + 2y,\ M_0(2,3)$.
117. $Z = x^2 + y^2 - 12x - 4y,\ M_0(1,2)$.
118. $Z = x^2 + y^2 - 4x - 2y,\ M_0(1,3)$.
119. $Z = x^2 + y^2 + 12x + 12y,\ M_0(1,1)$.
120. $Z = x^2 + y^2 - 5x + 5y,\ M_0(1,-2)$.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Лукинова Светлана Георгиевна
Иванов Владимир Иванович
Жданова Вера Даниловна

Электронное издание

Редактор Л.Ю. Беликова

Подписано в свет 19.06.2024. Регистрационный номер 142
Редакционно-издательская служба Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru