Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

О. Е. Носкова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 2. ДИНАМИКА

Рекомендовано Учебно-методическим советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Красноярский государственный аграрный университет» для внутривузовского использования для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции

Электронное издание

Красноярск 2024

ББК 34.1
Н 84

Рецензенты:

К. В. Сафонов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева

О. А. Масанский, кандидат технических наук, заведующий кафедрой материаловедения и технологии обработки материалов Сибирского федерального университета

Носкова, О. Е.
Н 84 **Теоретическая механика. Ч. 2. Динамика** [Электронный ресурс]: учебное пособие. / О. Е. Носкова; Красноярский государственный аграрный университет. – Красноярск, 2024. – 168 с.

Рассмотрены теоретические и практические основы динамики по курсу «Теоретическая механика». Пособие содержит теоретический материал, контрольные вопросы для самопроверки, задания и примеры их выполнения для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции.

ББК 34.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное развитие сельскохозяйственной техники требует от инженерных кадров решения задач, связанных с исследованием механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Теоретическая механика является фундаментальной дисциплиной, закладывающей основы для изучения общетехнических наук (сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин), а также многих специальных дисциплин.

Изучение теоретической механики формирует у будущих специалистов склонность и способность к творческому мышлению, умение самостоятельно строить и использовать математические и физические модели объектов сельскохозяйственного назначения. В рамках данной дисциплины студенты получают возможность практического применения общих понятий математики и физики к исследованию технических систем сельскохозяйственного назначения, квалифицированно используя алгоритмы высшей математики.

Законы и методы теоретической механики широко применяются при решении разнообразных и сложных инженерных задач: при проектировании и исследовании машин и механизмов сельскохозяйственной техники.

В учебном пособии приведены основные положения одного из наиболее сложных разделов теоретической механики «Динамика точки и механической системы». Материал систематизирован в удобной форме для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции».

Особенность данной работы заключается в выявлении межпредметных связей теоретической механики с такими дисциплинами как физика, информационные технологии и математика.

В учебном пособии рассмотрены примеры решения типовых и профессионально-ориентированных задач, сопровождаемые соответствующими методическими рекомендациями; имеются задания для самостоятельной работы и контрольные вопросы для самопроверки.

Знания, приобретенные студентами при изучении курса теоретической механики, закрепляются при выполнении курсовой работы.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие является логическим продолжением разработанной автором первой части учебного пособия по теоретической механике, в которой рассмотрены разделы «Статика» и «Кинематика».

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. В статике, как известно, также изучается действие сил на материальные тела, однако действие сил ограничивается частным случаем – равновесием тел. Движение тел изучается в кинематике с чисто геометрической точки зрения, без анализа причин, вызывающих то или иное движение. Таким образом, в динамике нас будут одинаково интересовать и силы, действующие на материальные тела, и движение этих тел под действием сил.

Простейшим объектом исследования в динамике является материальная точка – **материальное тело**, размерами которого при изучении данного движения можно пренебречь. Размеры тела не учитываются в двух случаях:

– когда тело совершает поступательное движение;

– путь, пройденный телом, значительно больше самого тела.

Например, при изучении движения планет Солнечной системы размерами планет пренебрегают, считая их материальными точками.

Под действием приложенных сил скорость тел изменяется постепенно и тем медленнее, чем больше инертность тел. **Инертностью** тел называется способность материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость движения под действием приложенных к ним сил.

Количественной мерой инертности является физическая величина, называемая **массой**. В теоретической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для тела. Единицей измерения массы в системе СИ является килограмм [*кг*].

В основе динамики лежат законы, называемые законами классической механики (или законами Ньютона), которые были установлены путем обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и нашли подтверждение при практическом применении. Это позволяет рассматривать знания, основанные на законах механики, как достоверные, на которые можно опираться в практической деятельности.

Глава 1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1. Законы динамики

В основе динамики лежат законы, полученные экспериментально на основе опытов и наблюдений.

Первый закон (закон инерции) – изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется **движением по инерции**.

Система отсчета, в которой справедлив закон инерции, – **инерциальная система**. При решении рассматриваемых в курсе теоретической механики задач инерциальной можно считать систему отсчета, связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики) – произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление совпадает с направлением силы. Закон выполняется только в инерциальных системах отсчета.

Математически этот закон выражается векторным равенством:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1.1}$$

где m – масса точки;

a – ускорение, получаемое точкой от действия на нее силы F.

Из этого закона наглядно видно, что мерой инертности является масса: точка, обладающая большей массой, т. е. имеющая большую инертность, получит меньшее ускорение.

Если на точку действуют одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе, т. е. **равнодействующей** R, равной векторной сумме этих сил. Уравнение, выражающее второй закон динамики, принимает в этом случае следующий вид:

$$m\bar{a} = \bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k. \tag{1.2}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению (рис. 1.1), т. е. $\left|\overline{F}_{12}\right| = \left|-\overline{F}_{21}\right|$.

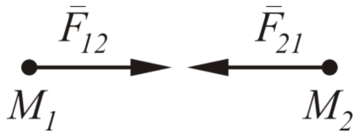


Рисунок 1.1 – Закон равенства действия и противодействия сил

Четвертый закон (принцип независимости действия сил) – ускорение, полученное материальной точкой под действием приложенной к ней системы сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ...\overline{F}_n\}$, равно геометрической сумме ускорений, получаемых точкой от действия на нее каждой силы в отдельности:

$$\sum \overline{a}_k = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ...\overline{a}_n = \frac{\overline{F}_1}{m} + \frac{\overline{F}_2}{m} + ...\frac{\overline{F}_n}{m},$$

или

$$\sum \overline{a}_k = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k}{m}.$$

Это значит, что основное уравнение динамики справедливо при действии на точку нескольких сил:

$$m\overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ...\overline{F}_n$$

или

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k,$$

где n – число действующих на точку сил.

1.2. Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие:

1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу;

2) зная действующую на точку силу, определить закон движения точки.

Решаются обе задачи с помощью уравнений (1.1) или (1.2), выражающих основной закон динамики, так как эти уравнения связывают между собой ускорение точки и действующие на нее силы.

В технике чаще всего приходится сталкиваться с изучением несвободного движения точки, т. е. со случаем, когда точка, благодаря наложенным на нее связям, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

В этих случаях, как и в статике, применяют аксиому связей, согласно которой всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи $\overline{N}$. Тогда основной закон динамики для несвободного движения точки будет иметь вид

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^a + \overline{N}, \tag{1.3}$$

где $\overline{F}_k^a$ – действующие на точку активные силы;

$\overline{N}$ – реакция связи.

Первая задача динамики для движения несвободной точки сводится обычно к тому, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи. Вторая (основная) задача динамики для движения несвободной точки распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить:

– закон движения точки;

– реакцию связи.

1.3. Решение первой задачи динамики точки

Если ускорение движущейся точки задано, то действующая сила или реакция связи определяется по уравнениям (1.2) или (1.3). При этом для определения реакции связи надо дополнительно знать действующие активные силы. Если ускорение непосредственно не задано, но известен закон движения точки, то для определения силы (или реакции) надо предварительно определить ускорение по формулам кинематики.

Пусть задан закон движения точки в декартовых координатах:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

Из кинематики известно, что проекции ускорения точки на оси декартовых координат следующие:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Проецируя уравнение (1.3) на оси координат, получим

$$\begin{cases} ma_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^a + N_x, \\ ma_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}^a + N_y, \\ ma_z = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}^a + N_z. \end{cases} \tag{1.5}$$

Модуль равнодействующей активных сил

$$R=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^{a}\right)^{2}+\left(\sum_{k=1}^{n}F_{ky}^{a}\right)^{2}+\left(\sum_{k=1}^{n}F_{kz}^{a}\right)^{2}}\,. \qquad (1.6)$$

Направляющие косинусы равнодействующей сил определяются по формулам

$$\begin{cases} cos\left(\bar{R}\wedge\bar{i}\right)=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kx}^{a}}{R}, \\ cos\left(\bar{R}\wedge\bar{j}\right)=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_{ky}^{a}}{R}, \\ cos\left(\bar{R}\wedge\bar{k}\right)=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kz}^{a}}{R}. \end{cases} \qquad (1.7)$$

где i, j, k – орты (единичные векторы) координатных осей x, y, z.

Первая задача динамики материальной точки решается посредством дифференцирования заданных уравнений движения точки.

Первую задачу динамики рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней силы;

2) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;

3) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;

4) составить основные уравнения динамики материальной точки в проекциях на оси координат;

5) из системы составленных уравнений определить искомые величины.

Пример 1.1. Точка M, имеющая массу m, движется в плоскости oxy согласно закону: $x=a\cdot cos(kt)$, $y=b\cdot sin(kt)$. Найти силу F, под действием которой точка совершает движение по заданному закону.

Решение. Согласно заданным уравнениям движения точки траекторией движения является эллипс с полуосями a и b (рис. 1.2).

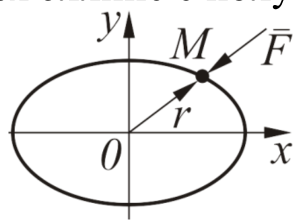


Рисунок 1.2 – Расчетная схема к примеру 1.1

Изобразим на траектории движения точку M в ее произвольном положении. Определим проекции векторов скорости и ускорения точки M на оси координат:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = x' = -ak\sin kt, \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = y' = bk\cos kt. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = v_x' = -ak^2\cos kt = -xk^2, \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = v_y' = -bk^2\sin kt = -yk^2 \end{cases},$$

где $\cos kt = \dfrac{x}{a}$, $\sin kt = \dfrac{y}{b}$.

Вычислим проекции силы $\bar{F}$ и ее полный модуль:

$$\begin{cases} F_x = ma_x = -mk^2x, \\ F_y = ma_y = -mk^2y \end{cases},$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r,$$

где r – радиус вектор (см. рис. 1.2).

Определим направляющие косинусы, определяющие положение силы $\bar{F}$ относительно осей координат:

$$\begin{cases} cos\left(\bar{F}\wedge x\right)=\dfrac{F_x}{F}=-\dfrac{x}{r}, \\ cos\left(\bar{F}\wedge y\right)=\dfrac{F_y}{F}=-\dfrac{y}{r}. \end{cases}$$

Направляющие косинусы радиуса-вектора $\bar{r}$ точки:

$$\begin{cases} cos\left(\bar{r}\wedge x\right)=\dfrac{x}{r}, \\ cos\left(\bar{r}\wedge y\right)=\dfrac{y}{r}. \end{cases}$$

Поскольку направляющие косинусы силы $\bar{F}$ и радиуса-вектора $\bar{r}$ одинаковы по величине, но противоположны по знаку, приходим к выводу, что сила $\bar{F}$ имеет направление, противоположное вектору $\bar{r}$.

Пример 1.2. Лифт весом *P* начинает двигаться вверх с ускорением *a* (рис. 1.3). Определить натяжение троса.

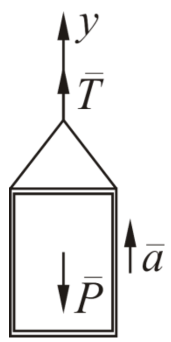


Рисунок 1.3 – Расчетная схема к примеру 1.2

Решение. Рассмотрим лифт как свободный. Для этого отбросим трос и его действие на лифт заменим реакцией связи *T*. Составим уравнение согласно второму закону динамики (1.3) для несвободного движения точки в проекции на ось *y*:

$$\frac{P}{g}a=T-P,$$

где $\dfrac{P}{g} = m$.

Отсюда находим

$$T = P\left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Если лифт начнет движение вниз с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно:

$$T = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Пример 1.3. Прямолинейное движение ножа режущего аппарата комбайна приближенно описывается уравнением

$$s=5\cdot cos(10\pi t)\ (см),$$

где t выражено в секундах. Определить силу Q, приводящую нож в движение, в зависимости от перемещения s, если масса ножа $m=10\ кг$.

Решение. Поступательно движущийся нож можно считать материальной точкой, дифференциальное уравнение движения которой имеет следующий вид:

$$m\frac{d^2\overline{s}}{dt^2} = \overline{Q}.$$

Продифференцируем дважды уравнение движения ножа s:

$$\frac{ds}{dt} = \left(5cos(10\pi t)\right)' = -50\pi\, sin(10\pi t),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left(-50\pi\, sin(10\pi t)\right)' = -500\pi^2 cos(10\pi t).$$

Подставим вторую производную в дифференциальное уравнение движения ножа и определим силу, приводящую нож в движение:

$$Q = -m\cdot 500\pi^2 cos(10\pi t) = -987s.$$

1.4. Решение основной задачи динамики точки

Напомним, что смысл основной задачи динамики точки заключается в том, чтобы зная силы, действующие на материальную точку и ее массу, получить уравнение движения точки.

Рассмотрим решение второй (основной) задачи динамики для ряда простых случаев.

1.4.1. Решение основной задачи динамики в случае прямолинейного движения точки

Из кинематики известно, что при прямолинейном движении скорость и ускорение точки все время направлены вдоль одной и той же прямой. Так как направление ускорения совпадает с направлением действия силы, то отсюда следует, что *свободная материальная точка будет двигаться прямолинейно только тогда, когда действующая на нее сила имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент времени равна нулю или направлена вдоль силы*.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся прямолинейно под действием приложенной к ней силы $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$. Положение точки на траектории определяется ее координатой *x*. Основная задача динамики в этом случае состоит в том, чтобы, зная равнодействующую сил $\overline{R}$, найти закон движения точки, т. е. $x = f(t)$. Связь между x и R дает уравнение (1.2). Проектируя обе части этого уравнения на ось $0x$, получим

$$ma_x = R_x = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kx} \tag{1.8}$$

или, так как $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = x''$, то

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) называется **дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки**. Часто уравнение (1.9) заменяют двумя дифференциальными уравнениями, содержащими первые производные:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}, \\ \dfrac{dx}{dt} = v_x. \end{cases} \tag{1.10}$$

Для того чтобы получить закон движения точки $x = f(t)$, надо проинтегрировать дифференциальное уравнение движения (1.9). Поскольку в общем случае сила может быть функцией времени, координат и скорости движущейся точки, то дифференциальное уравнение движения точки принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{1.11}$$

Решить это уравнение можно для каждой конкретной задачи в отдельности, установив, какой вид в зависимости от действующих сил, будет иметь его правая часть. Из теории решения дифференциальных уравнений известно, что решение одного уравнения второго порядка содержит две произвольные константы (постоянные интегрирования). Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.11) второго порядка имеет следующий вид:

$$x = f(t, C_1, C_2). \tag{1.12}$$

Чтобы довести решение задачи до конца, надо определить значения постоянных интегрирования C_1 и C_2. Для этого используют так называемые ***начальные условия***.

Изучение движения точки мы начинаем с некоторого момента времени, называемого *начальным моментом времени*. За начальный момент времени принимают время $t = 0$. Положение, которое точка занимала в начальный момент времени, называется *начальным поло-*

жением, а ее скорость в этот момент – *начальной скоростью*. Чтобы решить основную задачу динамики, надо кроме действующих сил знать еще *начальные условия*, т. е. положение и скорость в начальный момент времени.

В случае прямолинейного движения начальные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } t = 0 \;\; x = x_0,\; v_x = v_0. \tag{1.13}$$

По начальным условиям можно определить конкретные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 и найти частное решение дифференциального уравнения (1.11), дающее закон движения точки в виде

$$x = f\left(t, x_0, v_0\right). \tag{1.14}$$

1.4.2. Алгоритм решения основной задачи динамики путем интегрирования дифференциальных уравнений движения

Решение основной задачи динамики точки путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения сводится к следующим операциям.

1. *Составление дифференциального уравнения движения*. Для его составления в случае прямолинейного движения надо:

а) выбрать начало отсчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки) и провести координатную ось, направляя ее вдоль траектории и, как правило, в сторону движения; если под действием приложенных сил точка может находиться в каком-нибудь положении в равновесии, то начало отсчета удобно помещать в положении статического равновесия;

б) изобразить движущуюся точку в произвольном положении (но так, чтобы было $x>0$ и $v_x>0$; последнее существенно, когда среди сил есть силы, зависящие от скорости) и показать все действующие на точку силы;

в) подсчитать сумму проекций всех сил на координатную ось и подставить эту сумму в правую часть дифференциального уравнения движения; при этом надо обязательно все переменные силы выразить через те величины (t, x или v), от которых эти силы зависят.

2. *Интегрирование дифференциального уравнения движения*. Интегрирование производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида полученного уравнения, т. е. от вида правой части уравнения (1.11). В тех случаях, когда на точку, кроме постоянных сил, действует одна переменная сила, зависящая только от времени t, или только от расстояния x, или же только от скорости v, уравнение прямолинейного движения можно проинтегрировать *методом разделения переменных*. Если при этом в задаче требуется определить только скорость, то часто можно при решении ограничиться интегрированием одного из уравнений (1.10).

3. *Определение постоянных интегрирования*. Для определения постоянных интегрирования надо по данным задачи установить начальные условия в виде (1.13). При этом постоянные можно определять непосредственно после каждого интегрирования.

Если дифференциальное уравнение движения является уравнением с разделяющимися переменными, то вместо введения постоянных интегрирования можно брать сразу от обеих частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах.

4. *Нахождение искомых в задаче величин и исследование полученных результатов*. Чтобы иметь возможность исследовать решение, а также произвести косвенную проверку результата подсчетом размерностей, надо все решение проводить до конца в общем виде (в буквах), подставляя числовые данные только в окончательные результаты.

Сделанные здесь указания относятся и к случаю криволинейного движения.

Рассмотрим наиболее важные случаи прямолинейного движения материальной точки, когда сила постоянна или является функцией какой-либо одной переменной.

1.4.3. Частные случаи решения основной задачи динамики для прямолинейного движения точки

Случай 1. Сила, действующая на точку, постоянна

Пусть на материальную точку массой m действует постоянная по модулю и направлению сила Q, направленная вдоль оси x. Тогда основное дифференциальное уравнение динамики будет иметь следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=Q_x.$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt}=v_x$, основное уравнение динамики принимает вид:

$$m\frac{dv_x}{dt}=Q_x.$$

Для решения дифференциального уравнения воспользуемся методом разделения переменных:

$$dv_x=\frac{Q_x}{m}dt.$$

Проинтегрируем левую и правую части дифференциального уравнения:

$$\int dv_x=\int\frac{Q_x}{m}dt.$$

Учитывая, что действующая сила постоянная ($Q=const$), после интегрирования получим:

$$v_x=\frac{Q_x}{m}t+C_1.$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 воспользуемся начальными условиями, когда $t = 0$, $v_x = v_0$:

$$v_0=\frac{Q_x}{m}\cdot 0+C_1\Rightarrow C_1=v_0.$$

Тогда выражение для проекции вектора скорости на ось x будет иметь вид:

$$v_x = \frac{Q_x}{m} t + v_0 .$$

Заменим в полученном уравнении $v_x = \dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q_x}{m} t + v_0 .$$

Снова разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int dx = \int \left(\frac{Q_x}{m} t + v_0 \right) dt ,$$

$$x = \frac{Q_x}{2m} t + v_0 t + C_2 .$$

Для определения постоянной интегрирования C_2 используем начальные условия, когда $t=0$ $x=x_0$. Тогда

$$x_0 = \frac{Q_x}{2m} \cdot 0 + v_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0 .$$

Подставляя постоянную интегрирования, получим уравнение движения точки в окончательном виде:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{Q_x}{m} t . \tag{1.15}$$

Как видно из уравнения (1.14), точка под действием постоянной силы совершает *равнопеременное движение*.

Пример 1.4. Для фрикционной чистки зерна используют неподвижную наклонную плоскость (горку), установленную под углом α к горизонту (рис. 1.4). Все зерна (материальные частицы), поступающие на плоскость с начальной скоростью, равной нулю, движутся по ней вниз под действием двух сил: собственного веса P и силы трения зерна о поверхность $F_{тр}=fN$, где f – коэффициент трения. Определить конечную скорость зерна в конце горки, если длина горки L.

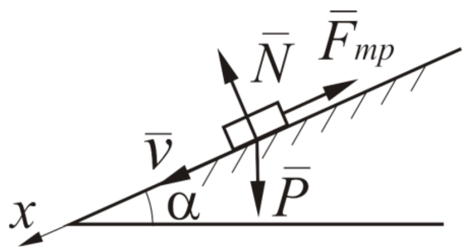


Рисунок 1.4 – Расчетная схема к примеру 1.4

Решение. Направим ось $0x$ вдоль наклонной плоскости (см. рис. 1.4). Дифференциальное уравнение прямолинейного движения материальной частицы в проекции на направление движения имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_x = P\,sin(\alpha)-F_{тр},$$

где $F_{тр}=fN=fmgcos(\alpha)$.

В итоге будем иметь

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\,sin(\alpha)-fmgcos(\alpha)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g\,sin(\alpha)-fgcos(\alpha).$$

Заменяем $\frac{dx}{dt}=v_x$ и решаем дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dv_x}{dt}=g\,sin(\alpha)-fgcos(\alpha),$$

$$\int dv_x = \int \left(g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha) \right) dt,$$

$$v_x = \left(g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha) \right) t + C_1.$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 воспользуемся начальными условиями: при $t = 0,\ v_x = 0.$ Тогда $C_1 = 0$ и выражение для v_x окончательно будет иметь вид:

$$v_x = \left(g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha) \right) t.$$

Таким образом, получили выражение для определения скорости зерна в зависимости от времени. Для определения конечной скорости зерна в конце горки найдем уравнение движения зерна, заменяя $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и дифференцируя полученное выражение для скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha) \right) t,$$

$$\int dx = \int \left(\left(g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha) \right) t \right) dt,$$

$$x = \left(g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha) \right) \frac{t^2}{2}.$$

Приравнивая x к L, найдем время движения зерна по наклонной поверхности:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g\,sin(\alpha) - fg cos(\alpha)}}.$$

Подставим полученное выражение для времени в выражение для скорости зерна:

$$v = \sqrt{2gL\left(sin(\alpha) - f\,cos(\alpha) \right)}.$$

Из полученного выражения можно сделать вывод, что в конце горки большую скорость будут иметь зерна, у которых меньший коэффициент трения.

Случай 2. Сила является функцией времени

Пример 1.5. Груз весом P начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы F, значение которой растет пропорционально времени по закону $F=kt$. Найти закон движения груза.

Решение. Выберем начало отсчета O в начальном положении груза и направим ось Ox в сторону движения (рис. 1.5). Тогда начальные условия будут следующими: при $t=0$ $x_0=0$, $v_{x0}=0$. Изображаем в произвольном положении груз и действующие на него силы.

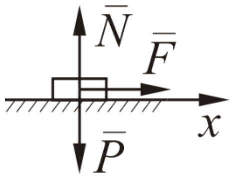


Рисунок 1.5 – Расчетная схема к примеру 1.5

Запишем основное дифференциальное уравнение динамики в проекции на ось x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F.$$

Подставим в это уравнение исходные данные и заменим $\frac{dx}{dt}=v_x$:

$$\frac{P}{g}\frac{dv_x}{dt}=kt.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dv_x=\int\frac{kg}{P}tdt.$$

После интегрирования получим

$$v_x = \frac{1}{2}\frac{kg}{P}t^2 + C_1.$$

Подставляя начальные условия, определим постоянную интегрирования C_1:

$$v_{x0} = \frac{1}{2}\frac{kg}{P}t_0{}^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

В окончательном виде получим

$$v_x = \frac{1}{2}\frac{kg}{P}t^2.$$

Заменим в полученном выражении $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и разделим переменные:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{kg}{P}t^2,$$

$$\int dx = \int \frac{1}{2}\frac{kg}{P}t^2 dt.$$

После интегрирования получим

$$x = \frac{1}{2}\frac{kg}{P}\frac{1}{3}t^3 + C_2.$$

Подставляя начальные условия, определим постоянную интегрирования C_2:

$$x_0 = \frac{1}{2}\frac{kg}{P}\frac{1}{3}t_0{}^3 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

В окончательном виде получим уравнение движения точки:

$$x = \frac{1}{6}\frac{kg}{P}t^3.$$

Таким образом, под действием силы F проходимый точкой путь будет изменяться прямо пропорционально кубу времени.

Пример 1.6. Ракета начинает движение из состояния покоя под действием реактивной силы F (рис. 1.6), зависящей от времени $F=F_0e^{-bt}$, где F_0 – максимальное значение реактивной тяги, b – постоянная величина. Масса ракеты m; начальные условия: при $t=0$, $x_0=0$, $v_0=0$. Определить уравнение движения ракеты под действием силы F.

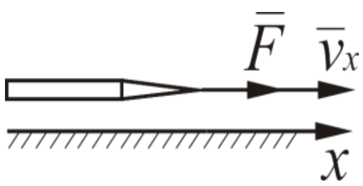


Рисунок 1.6 – Расчетная схема к примеру 1.6

Решение. Запишем основное уравнение динамики в проекции на ось x, направленную в сторону движения ракеты:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_0e^{-bt}.$$

Произведем понижение порядка дифференциального уравнения.

Так как $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}$, получим $m\dfrac{dv}{dt}=F_0e^{-bt}$, т. е. вместо дифференциального уравнения второго порядка получим два дифференциальных уравнения первого порядка, поскольку $v=\dfrac{dx}{dt}$.

Разделяем переменные и выполняем интегрирование полученного уравнения:

$$dv=\frac{F_0}{m}e^{-bt}dt\ ,$$

$$v=-\frac{F_0}{bm}e^{-bt}+C_1.$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 воспользуемся начальными условиями: при $t_0 = 0,\ v_0 = 0.$

$$0 = -\frac{F_0}{bm} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{F_0}{bm}.$$

Подставляя постоянную интегрирования C_1, получим в окончательном виде зависимость скорости ракеты от времени:

$$v = \frac{F_0}{bm}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

Поставим в полученное выражение $v = \dfrac{dx}{dt}$ и снова разделим переменные:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{bm}\left(1 - e^{-bt}\right),$$

$$dx = \frac{F_0}{bm}\left(1 - e^{-bt}\right)dt.$$

Проинтегрировав полученное выражение, получим

$$x = \frac{F_0}{bm}\left(t + \frac{1}{b}e^{-bt}\right) + C_2.$$

Для определения постоянной интегрирования C_2 воспользуемся начальными условиями при $t_0 = 0,\ x_0 = 0$, тогда

$$0 = \frac{F_0}{bm} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{F_0}{b^2 m}.$$

Подставляя постоянную интегрирования C_2, получим в окончательном виде уравнение движение ракеты под действием силы F:

$$x=\frac{F_0}{bm}\left(t-\frac{1}{b}\left(1-e^{-bt}\right)\right).$$

Исследуем результаты решения задачи. При $t >> 0$, $e^{-bt} \approx 0$ (рис. 1.7), скорость ракеты будет равна $v=\frac{F_0}{bm}$. Следовательно, по истечении некоторого промежутка времени ракета будет двигаться с постоянной скоростью. Тогда закон равномерного движения ракеты

$$x=\frac{F_0}{bm}\left(t-\frac{1}{b}\right).$$

Рисунок 1.7 – График функции e^{-bt}

Случай 3. Сила является функцией скорости

Пример 1.7. Автомобиль массой m совершает прямолинейное движение под действием силы F, зависящей от скорости и изменяющейся согласно уравнению $F = a - bv$, где a и b – постоянные величины; v – скорость автомобиля. Определить закон движения автомобиля.

Решение. Рассмотрим автомобиль как материальную точку массой m. Запишем основное дифференциальное уравнение динамики в проекции на ось x:

$$m\frac{dv}{dt}=a-bv.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{1}{a-bv}dv = \int \frac{1}{m}dt,$$

$$-\frac{1}{b}ln(a-bv) = \frac{1}{m}t + C_1.$$

При $t_0 = 0, \; v_0 = 0, \; C_1 = -\frac{1}{b}ln(a)$.

После подстановки постоянной интегрирования C_1 получим

$$-\frac{1}{b}ln(a-bv) = \frac{t}{m} - \frac{1}{b}ln(a).$$

Из полученного выражения определим скорость автомобиля:

$$v = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right).$$

Так как $v = \frac{dx}{dt}$, то

$$dx = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)dt.$$

После интегрирования уравнения получим

$$x = \frac{a}{b}\left(t + \frac{m}{b}e^{-\frac{bt}{m}}\right) + C_2.$$

При $t_0 = 0, x_0 = 0,$ следовательно

$$0=\frac{a}{b^2}m+C_2 \Rightarrow C_2=-\frac{a}{b^2}m.$$

После подстановки постоянной интегрирования получим закон движения автомобиля:

$$x=\frac{a}{b}\left(t-\frac{m}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right)\right).$$

Пример 1.8. Большинство современных машин для внесения минеральных удобрений имеет в качестве рассеивающего (разбрасывающего) рабочего органа вращающийся диск с радиальными лопатками. Частицы удобрений движутся вдоль лопаток и, достигнув их конца, сбрасываются.

При определении дальности полета частиц принимают, что их движение происходит в одной плоскости и в момент схода с лопатки на них действуют две силы (рис. 1.8): сила тяжести P и сила сопротивления воздуха $R=k\rho F_M v^2$, направленная вдоль оси $0x$, где k – коэффициент сопротивления воздуха; ρ – плотность воздуха; F_M – миделево сечение частицы, т. е. площадь проекции ее на плоскость, перпендикулярную направлению скорости v частицы. Определить дальность полета частицы удобрения, если считать, что частицы в момент отрыва от лопатки находятся над поверхностью на высоте h и имеют начальную скорость v_0, направленную вдоль оси $0x$.

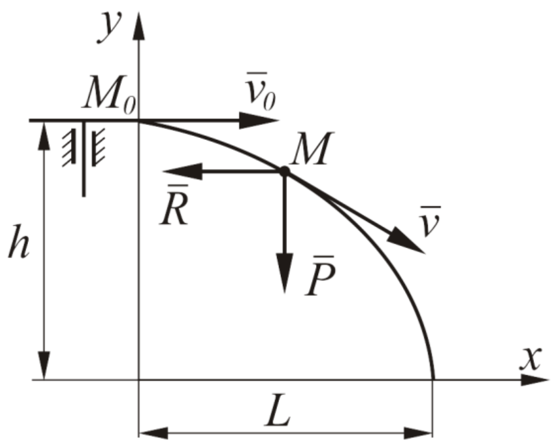


Рисунок 1.8 – Расчетная схема к примеру 1.8

Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения частиц в проекции на ось $0x$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-R,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k\rho F_M}{m}v_x^2.$$

Введем обозначение $k_П=\dfrac{k\rho F_M}{m}$, где $k_П$ – коэффициент парусности, тогда дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_П v_x^2.$$

Произведем понижение порядка дифференциального уравнения и разделим переменные:

$$\frac{dv_x}{dt}=-k_П v_x^2,$$

$$\frac{dv_x}{v_x^2}=-k_П dt,$$

$$\int\frac{dv_x}{v_x^2}=\int -k_П dt,$$

$$-\frac{1}{v_x}=-k_П t+C_1$$

или

$$v_x=\frac{1}{k_П t+C_1}.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим, используя начальные условия: при $t=0$ $v_{0x}= v_0$. Тогда:

$$v_0 = \frac{1}{k_П \cdot 0 + C_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{v_0}.$$

После подстановки постоянной интегрирования получим:

$$v_x = \frac{1}{k_П t + \frac{1}{v_0}} = \frac{v_0}{v_0 k_П t + 1}.$$

Так как $v_x = \frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{v_0 k_П t + 1}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем дифференциальное уравнение:

$$\int dx = \int \frac{v_0}{v_0 k_П t + 1} dt,$$

$$x = v_0 \frac{ln(v_0 k_П t + 1)}{v_0 k_П} + C_2 = \frac{ln(v_0 k_П t + 1)}{k_П} + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 определим, используя начальные условия: при $t = 0$, $x_0 = 0$. Так как при таком начальном условии $C_2 = 0$, то уравнение движения частицы удобрения вдоль оси $0x$ в окончательном виде будет:

$$x = \frac{ln(v_0 k_П t + 1)}{k_П}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения частиц в проекции на ось $0y$:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-P$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g\,.$$

Решим это дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv_y}{dt}=-g\,,$$

$$\int v_y=\int -g dt,$$

$$v_y=-gt+C_3\,.$$

Постоянную интегрирования C_3 определим, используя начальное условие: при $t = 0$, $v_{0y} = 0$. Тогда получаем, что $C_3 = 0$ и в окончательном виде:

$$v_y=-gt\,.$$

Так как $v_y=\frac{dy}{dt}$, то

$$\frac{dy}{dt}=-gt\,.$$

Разделяем переменные и решаем дифференциальное уравнение:

$$\int dy=\int -gtdt,$$

$$y=-\frac{gt^2}{2}+C_4\,.$$

Постоянную интегрирования C_4 определим, используя начальное условие: при $t = 0$ $y_0 = h$. Тогда получаем, что $C_4 = h$, а следовательно,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + h.$$

Время, соответствующее максимальной дальности полета частицы L, определим из последнего уравнения, учитывая, что $y = 0$:

$$0 = -\frac{gt^2}{2} + h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Подставляя полученное время в уравнение движения частицы вдоль оси $0x$, получим выражение для определения дальности полета частицы минерального удобрения:

$$x = L = \frac{ln\left(v_0 k_П \sqrt{\frac{2h}{g}} + 1\right)}{k_П}.$$

1.4.4. Решение основной задачи динамики для криволинейного движения точки

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $F_1, F_2, \ldots F_n$. Распишем основное уравнение динамики в проекции на координатные оси $0xyz$:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Получили **дифференциальные уравнения криволинейного движения точки в проекциях на координатные оси.**

Так как силы, действующие на точку, могут зависеть от времени, от положения точки и ее скорости, то по аналогии с уравнением (1.11) правые части уравнений (1.16) могут содержать время t, координаты x, y, z и проекции вектора скорости v_x, v_y, v_z.

Уравнения (1.16) могут решать как первую, так и вторую (основную) задачу динамики. Чтобы решить основную задачу динамики, надо кроме действующих сил знать начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент времени:

$$\text{при } t=0 \quad \begin{cases} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0, \\ v_x = v_{x0}, & v_y = v_{y0}, & v_z = v_{z0}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений (1.16) получают уравнения движения точки:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases} \tag{1.18}$$

При этом полученные решения будут содержать шесть постоянных интегрирования C_1, $C_2 ... C_6$, значения которых определяются с использованием начальных условий (1.17).

Пример 1.9. Задача Галилея (движение тела, брошенного под углом к горизонту). Определить закон движения, траекторию движения, дальность полета, высоту подъема, время полета материальной точки M массой m, брошенной с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту.

Решение. Движение точки будем рассматривать в однородном поле тяжести. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Изобразим движущуюся точку M в произвольном положении (рис. 1.9).

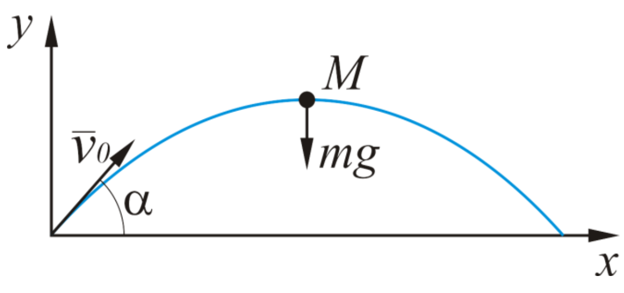


Рисунок 1.9 – Расчетная схема к примеру 1.9

На точку *M* действует только сила тяжести $P = mg$, проекции которой на координатные оси равны: $P_x = 0, \quad P_y = -P, \quad P_z = 0$.

Подставив проекции силы тяжести в дифференциальные уравнения движения точки, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0, \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g, \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 0. \end{cases}$$

Умножая обе части этих уравнений на *dt* и интегрируя, находим

$$\begin{cases} v_x = C_1, \\ v_y = -gt + C_2, \\ v_z = C_3. \end{cases}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 и C_3 воспользуемся начальными условиями:

при $t=0$ $\begin{cases} x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0; \\ v_{x0} = v_0 \cos(\alpha), \quad v_{y0} = v_0 \sin(\alpha), \quad v_{z0} = 0. \end{cases}$

Удовлетворяя начальным условиям, получим:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0,$$

тогда

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos(\alpha), \\ v_y = -gt + v_0 \sin(\alpha), \\ v_z = 0. \end{cases}$$

Заменяя $v_x = \frac{dx}{dt}$, $\quad v_y = \frac{dy}{dt}$, $\quad v_z = \frac{dz}{dt}$, получим

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\alpha), \\ \frac{dy}{dt} = v_0 \sin(\alpha) - gt, \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

Разделяя переменные и интегрируя эти выражения, получим

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos(\alpha) + C_4, \\ y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2} + C_5, \\ z = C_6. \end{cases}$$

Подставляя начальные условия, получаем, что $C_4 = C_5 = C_6 = 0$. Тогда уравнения движения точки в окончательном виде

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos(\alpha), \\ y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}, \\ z = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Траектория полета. Исключив из уравнений движения точки (1.18) параметр времени t, получим уравнение траектории движения точки:

$$y = x \cdot tg(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2. \tag{1.20}$$

Брошенная под углом к горизонтальной плоскости тяжелая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (Галилей).

Дальность полета. Если принять в уравнении траектории (1.19) $y = 0$, то найдем координаты x точек пересечения траектории с осью $0x$:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Окончательно дальность полета определится:

$$L = x_2 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}. \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что наибольшая горизонтальная дальность полета получается, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при угле $45°$.

Если бросать точку с разными начальными скоростями v_1, v_2, v_3, v_4, причем такими, что $v_1 > v_2 > v_3 > v_4$, то дальность полета будет наибольшей в том случае, когда скорость бросания наибольшая. На рисунке 1.10 дана иллюстрация того, как будут выглядеть траектории точек при разных начальных скоростях бросания.

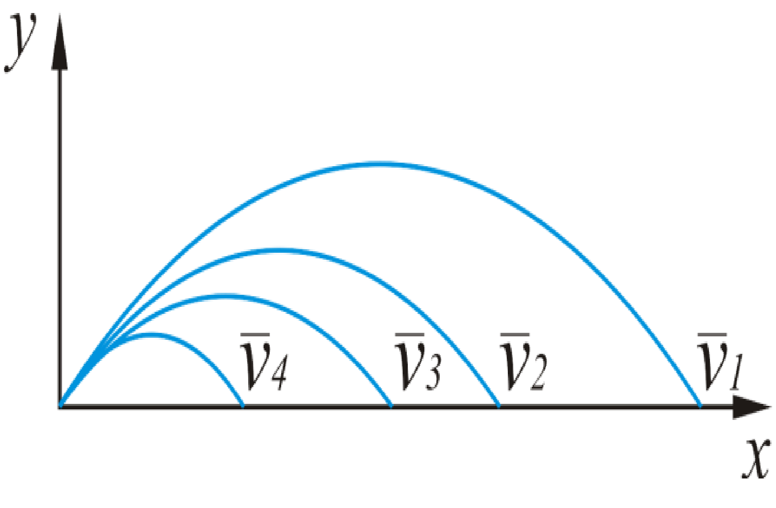


Рисунок 1.10 – Дальность полета точки при различных начальных скоростях бросания

На рисунке 1.11 показаны траектории движения точек, брошенных под разными углами к горизонту.

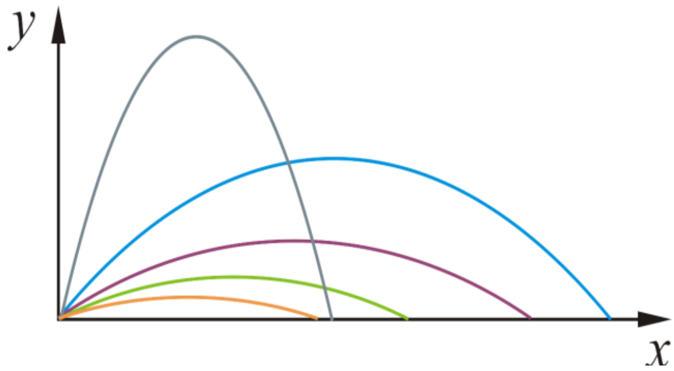


Рисунок 1.11 – Траектории движения точек, брошенных под разными углами к горизонту

При углах бросания α и $(90-\alpha)$ дальность полета одинаковая.

Высота полета. Если принять в уравнении траектории (1.19) координату x равной половине горизонтальной дальности, то получим уравнение высоты траектории:

$$H=\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}. \tag{1.22}$$

Время полета. Из первого уравнения системы (1.18) следует, что полное время полета T определяется равенством

$$T=\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}.$$

Заменяя значение x его максимальным значением (дальность полета L), получим

$$T=\frac{2v_0\sin(\alpha)}{g}.$$

При угле наибольшей дальности полета $\alpha = 45°$ все найденные параметры полета равны:

$$L_{max}=\frac{v_0^2}{g},\qquad H_{max}=\frac{v_0^2}{4g}=\frac{1}{4}L_{max},\qquad T_{max}=\frac{v_0}{g}\sqrt{2}.$$

1.5. Общие теоремы динамики материальной точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между соответствующими динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движения механических систем, широко применяемых в инженерной практике. Кроме того, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения.

Перейдем к рассмотрению общих теорем динамики точки.

1.5.1. Количество движения и кинетическая энергия точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются количество движения и кинетическая энергия.

Количеством движения материальной точки *q* называется вектор, равный произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\bar{q} = m\bar{v}. \tag{1.23}$$

Направлен вектор количества движения так же, как и вектор скорости точки, т. е. по касательной к ее траектории. Единица измерения количества движения – [*кг·м/с*].

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина *T,* равная половине произведения массы материальной точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{1.24}$$

Необходимость введения двух динамических характеристик движения объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки.

1.5.2. Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за элементарный промежуток времени dt.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\bar{S}$, равная произведению вектора силы $\bar{F}$ на элементарный промежуток времени dt:

$$d\bar{S} = \bar{F}dt. \tag{1.25}$$

Направлен вектор импульса силы по линии действия силы.

Полный импульс $\bar{S}$ любой силы $\bar{F}$ за конечный промежуток времени t_1 определяется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} d\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F}dt. \tag{1.26}$$

В частном случае, когда сила $\bar{F}$ и по модулю, и по направлению постоянна ($\bar{F} = const$), будем иметь $\bar{S} = \bar{F}t_1$.

Импульс – это мера воздействия силы на тело за данный промежуток времени, так как результат действия силы зависит не только от самой силы, но и от времени ее воздействия.

В общем случае модуль импульса определяется через его проекции на координатные оси. Проекции импульса силы на оси декартовых координат определяются по формулам

$$\begin{cases} S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \\ S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \\ S_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \end{cases} \tag{1.27}$$

Для решения основной задачи динамики важно выделить те силы, импульсы которых можно вычислить заранее, не зная закона движения, совершаемого точкой под действием этих сил. Из равенства (1.26) видно, что к таким силам относятся только постоянные силы и силы, зависящие от времени.

Для вычисления импульсов сил, зависящих от положения или от скорости движения точки, надо дополнительно знать закон ее движения, т. е. $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Тогда, выразив x, y, z или v_x, v_y, v_z через t, можно вычислить интегралы (1.27). Не зная закона движения точки, вычислить импульсы таких сил нельзя.

1.5.3. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Поскольку масса точки величина постоянная, а ее ускорение $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$, то уравнение (1.2), выражающее второй закон Ньютона, можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = \frac{d(m\bar{v})}{dt}. \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) выражает **теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме**: *производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на точку силе*.

Пусть движущаяся точка массы m имеет в момент времени $t_0=0$ скорость v_0, а в момент t_1 – скорость v_1. Умножим обе части равенства (1.28) на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интеграла будут 0 и t_1, а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости v_0 и v_1. Так как интеграл от $d(m\bar{v})$ равен mv, то в результате получим

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k dt,$$

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

Стоящие справа интегралы, как следует из формулы (1.27), представляют собой импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k, \tag{1.29}$$

или

$$\bar{q}_1 - \bar{q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k. \tag{1.30}$$

Уравнение (1.28) выражает **теорему об изменении количества движения точки в конечном виде**: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.*

При решении задач вместо векторного уравнения (1.28) часто пользуются уравнениями в проекциях. Проектируя обе части равенства (1.28) на координатные оси, получим

$$\begin{cases} m\bar{v}_{1x} - m\bar{v}_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}, \\ m\bar{v}_{1y} - m\bar{v}_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}, \\ m\bar{v}_{1z} - m\bar{v}_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}. \end{cases} \tag{1.31}$$

В случае прямолинейного движения точки вдоль оси $0x$ теорема выражается первым из уравнений (1.31).

Уравнения (1.29) или (1.31) позволяют, зная как при движении точки изменяется ее скорость, определить импульс действующих сил (первая задача динамики) или, зная импульсы действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). При решении второй задачи, когда заданы силы, надо вычислить их импульсы. Как видно из равенств (1.26) или (1.27), это можно сделать лишь тогда, когда силы постоянны или зависят только от времени.

Таким образом, уравнения (1.28) и (1.30) можно непосредственно использовать для решения второй задачи динамики, когда в задаче в число данных и искомых величин входят действующие силы, время движения точки и ее начальная и конечная скорости (т. е. величины F, t, v_0), причем силы должны быть постоянными или зависящими только от времени.

Пример 1.10. Тело массой m поднимается вверх по шероховатой наклонной плоскости под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ *м/с*. Определить время, через которое тело остановится, если коэффициент трения скольжения тела о шероховатую плоскость $f = 0,4$.

Решение. Изобразим силы, действующие на тело (рис. 1.12).

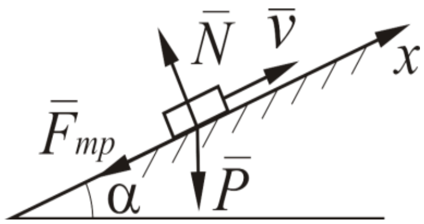


Рисунок 1.12 – Расчетная схема к примеру 1.10

Сила трения скольжения равна

$$F_{тр} = fN = fP\cos\alpha,$$

а сила тяжести

$$P = mg.$$

Согласно теореме об изменении количества движения точки (1.28)

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \bar{S},$$

где

$$S = \left(-F_{тр} - P\sin\alpha\right)\cdot t.$$

Так как $v_1 = 0$, а $m = \dfrac{P}{g}$, получим:

$$\frac{P}{g}v_0 = \left(fP\cos\alpha + P\sin\alpha\right)t_1.$$

Отсюда найдем время до остановки тела:

$$t_1 = \frac{v_0}{g(f\,cos\alpha + sin\alpha)} = \frac{10}{9{,}8(0{,}4 \cdot 0{,}866 + 0{,}5)} = 1{,}21c\,.$$

Пример 1.11. Грузу, имеющему массу m и лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают (толчком) начальную скорость v_0. Последующее движение груза тормозится постоянной силой F. Определить через какое время груз остановится.

Решение. По данным задачи видно, что для определения времени движения можно воспользоваться теоремой об изменении количества движения точки. Изображаем груз в произвольном положении (рис. 1.13).

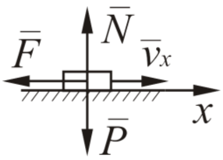


Рисунок 1.13 – Расчетная схема к примеру 1.11

На груз действуют сила тяжести P, реакция опорной поверхности N и тормозящая сила F. Направляя ось Ox в сторону движения, составляем первое из уравнений (1.30):

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}\,.$$

В данном случае $v_{1x}=0$ (v_{1x} – скорость в момент остановки), $v_{0x}= v_0$. Из всех сил проекцию на ось Ox дает только сила F. Так как она постоянна, то $S_x = F_x t_1 = -Ft_1$, где t_1 – время торможения. Подставляя все эти данные в верхнее уравнение, получаем:

$$-mv_0 = -Ft_1,$$

откуда искомое время

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}\,.$$

Пример 1.12. Транспортирующие устройства уборочных машин предназначаются для перемещения растительной массы или продуктов ее обработки от одних рабочих органов к другим. Рабочее полотно транспортера расположено под углом α к горизонту (рисунок такой же, как и в примере 1.10). Движущееся полотно транспортера приводит растительную массу в движение при помощи силы трения. При поступлении на транспортер срезанные стебли не могут мгновенно приобрести скорость транспортера из-за проскальзывания. Какова должна быть длина полотна транспортера, чтобы транспортируемый материал мог приобрести скорость полотна, если масса стеблей m, коэффициент трения f, скорость полотна v?

Решение. Время t, в течение которого транспортируемый материал приобретает скорость v полотна транспортера, можно определить с помощью теоремы об изменении количества движения точки, записанной в проекции на направление движения (ось $0x$):

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}.$$

Полагая, что начальная скорость v_0 материала равна нулю, будем иметь

$$mv = F_{mp}t - mgt\sin(\alpha),$$

где $F_{mp} = fN = fmg\cos(\alpha)$, тогда

$$mv = [fmg\cos(\alpha) - mg\sin(\alpha)]t.$$

Из полученного выражения определим время, необходимое для приобретения растительной массой скорости полотна транспортера:

$$t = \frac{v}{g[f\cos(\alpha) - \sin(\alpha)]}.$$

Так как скорость движения транспортера постоянная, то путь, который пройдет ветвь транспортера за время t:

$$l = vt = \frac{v^2}{g[f\cos(\alpha) - \sin(\alpha)]}.$$

Чтобы транспортируемый материал мог приобрести скорость полотна, длина l_p рабочей ветви транспортера должна удовлетворять условию $l_p \geq l$.

1.5.4. Теорема об изменении момента количества движения точки

Из двух основных динамических характеристик движения точки (1.22) и (1.23) только количество движения является векторной величиной. Иногда при решении некоторых задач динамики вместо вектора количества движения удобно пользоваться его моментом относительно некоторого центра или оси (кинетический момент). Определяется момент вектора $(m\bar{v})$ так же, как и момент силы. При этом вектор $(m\bar{v})$ считается приложенным к движущейся точке.

Моментом количества движения точки относительно данного центра *O* (кинетический момент*)* называется вектор $\bar{K}_O$, направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор количества движения и центр *O*, в ту сторону, откуда вектор $m\bar{v}$ виден направленным против хода часовой стрелки (рис. 1.14), т. е.

$$\bar{K}_O = \bar{m}_O(m\bar{v}), \tag{1.32}$$

или

$$\bar{K}_O = \bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}. \tag{1.33}$$

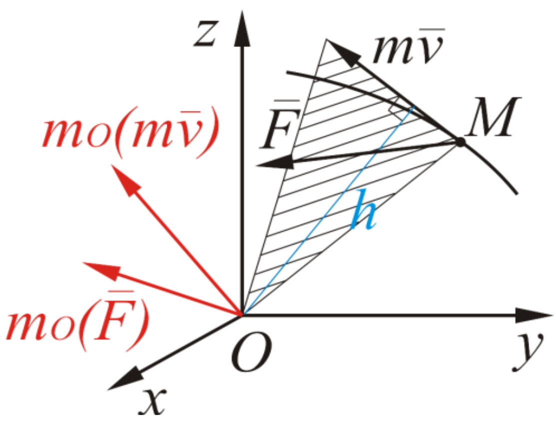


Рисунок 1.14 – Момент количества движения

Модуль вектора момента количества движения

$$K_O = m \cdot v \cdot h, \tag{1.34}$$

где h – плечо вектора $\bar{v}$ относительно центра O.

Момент количества движения точки относительно оси z, проходящей через центр O, равен проекции вектора момента количества движения точки на эту ось:

$$K_z = m_z(m\bar{v}). \tag{1.35}$$

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра *O*: производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов, действующих на точку сил относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{m}_O(\bar{F}). \tag{1.36}$$

Из этой теоремы следует, что если $\bar{m}_O(\bar{F}) = 0$, то $m_O(m\bar{v}) = const$, т. е. *если момент действующей силы относительного некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительного этого же центра постоянен и по направлению, и по величине*. Такой результат важен при решении задач на движение под действием *центральной силы*.

Центральной называется сила, линия действия которой проходит все время через данный центр.

Аналогичная **теорема** имеет место и **для момента количества движения точки относительно оси**: производная по времени от момента количества движения точки относительно какой-нибудь оси равна сумме моментов действующих на точку сил относительно той же оси:

$$\frac{d\bar{K}_z}{dt} = \bar{m}_z(\bar{F}). \tag{1.37}$$

Пример 1.13. Шарик M привязан к нити MBA, часть BA которой продета сквозь вертикальную трубку (рис. 1.15). В момент, когда шарик находится на расстоянии h_0 от оси z трубки, ему сообщают начальную скорость v_0, перпендикулярную плоскости MBA. Одновременно нить начинают медленно втягивать в трубку. Найти, какую скорость v_1 будет иметь шарик, когда его расстояние от оси z станет равно h_1.

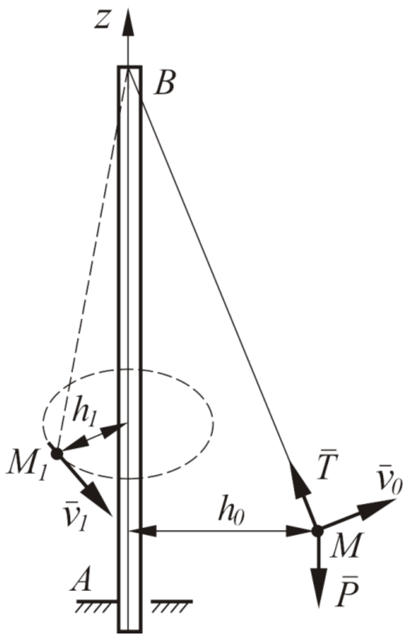


Рисунок 1.15 – Расчетная схема к примеру 1.13

Решение. На шарик действуют сила тяжести P и реакция нити T. Моменты этих сил относительно оси z равны нулю, так как сила P параллельна оси z, а сила T эту ось пересекает. Тогда по уравнению (1.37)

$$\frac{d\overline{K}_z}{dt} = \overline{m}_z(\overline{F}) = 0,$$

откуда $K_z = m_z(m\overline{v}) = mvh = const$. Так как масса точки постоянна, то отсюда следует, что при движении шарика $v_0 h_0 = v_1 h_1$. Следовательно,

$$v_1 = v_0 \frac{h_0}{h_1}.$$

Из полученного выражения следует, что по мере приближения шарика к оси его скорость растет.

1.5.5. Работа силы

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы, широко используемое не только в механике.

Под работой в физике понимается процесс перехода одного вида движения или энергии в другой. Например, при сжатии пружины совершается работа, так как при этом кинетическая энергия точки, движущейся под действием силы, переходит в потенциальную энергию сил упругости сжатой пружины.

Мерой действия силы при превращении механического движения в другую форму движения является работа силы. При этом работа характеризует только то действие силы, которое приводит к изменению модуля скорости движущегося тела.

Сначала введем понятие об элементарной работе. **Элементарной работой силы** *F*, приложенной в точке *M*, называется скалярная величина *dA*:

$$dA = F_{\tau} \cdot dS, \tag{1.38}$$

где F_{τ} – проекция силы *F* на касательную к траектории точки *M*, направленную в сторону перемещения этой точки (рис. 1.16);

dS – бесконечно малое перемещения точки, направленное вдоль этой касательной.

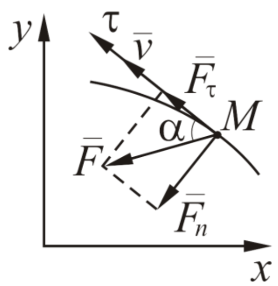


Рисунок 1.16 – Определение проекций силы

Такое определение соответствует представлению о работе как о мере того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. Если разложить силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}_\tau$ и $\overline{F}_n$ (рис. 1.16), то изменять модуль скорости будет $\overline{F}_\tau$, так как $F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$ (составляющая $\overline{F}_n$ изменяет или направление вектора $\overline{v}$, или при несвободном движении – силу давления на связь).

Учитывая, что $F_\tau = F\cos(\alpha)$, где α – угол между вектором силы $\overline{F}$ и касательной τ, получим из (1.38) другое выражение для элементарной работы силы dA:

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos(\alpha). \tag{1.39}$$

Таким образом, элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения точки, умноженной на элементарное перемещение dS.

Если угол α острый, то работа силы *положительна*. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $dA = F \cdot dS$.

Если угол α тупой, то работа *отрицательна*. В частности, при $\alpha = 180°$ элементарная работа $dA = -F \cdot dS$.

Если угол $\alpha = 90°$, т. е. сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы *равна нулю*.

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая F_τ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая F_τ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Аналитическое выражение элементарной работы можно получить, если разложить силу F на составляющие F_x, F_y, F_z по направлению координатных осей:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{1.40}$$

Уравнение (1.40) является аналитическим выражением элементарной работы силы.

Работа силы на конечном перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы силы.

В случае криволинейного перемещения точки M на участке M_0M_1 конечная работа силы в скалярной форме будет равна следующему:

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau dS, \tag{1.41}$$

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right). \tag{1.42}$$

Следовательно, работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы. Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_0 и M_1.

Если величина F_τ постоянна, то конечная работа

$$A_{M_0M_1} = F_\tau S_1, \tag{1.43}$$

где S_1 – перемещение точки приложения силы от точки M_0 до точки M_1.

В частности, такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($F = const$), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно. В этом случае $F_\tau = F\cos(\alpha) = const$ и работа силы определяется следующим образом:

$$A_{M_0M_1} = F \cdot S_1 \cdot \cos(\alpha). \tag{1.44}$$

Единица работы в системе СИ – 1 джоуль (*1 Дж = 1Н ⋅ м*).

Свойства работы сил

1. Работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении.

2. Работа силы на конечном перемещении равна сумме работ этой силы на составляющих перемещениях, на которые любым образом разбито все перемещение.

1.5.6. Мощность. Коэффициент полезного действия

Мощность силы, или работоспособность какого-либо источника силы оценивается той работой, которую он может совершить в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность определяется

$$N = \frac{A}{t_1},$$

где t_1 – время, в течение которого произведена работа A. В общем случае

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau \cdot dS}{dt} = F_\tau v. \tag{1.45}$$

Таким образом, мощность равна скалярному произведению касательной составляющей силы на скорость точки.

Из формулы (1.44) очевидно, чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Следовательно, если от источника силы с заданной мощностью нужно получить большую силу, то ее можно получить только при малой скорости. Например, когда железнодорожному локомотиву надо увеличить силу тяги, то для этого надо уменьшить скорость поезда. Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт: *1 Вт = 1 Дж/с*. В технике за единицу мощности часто принимается *1 л.с.* (лошадиная сила), равная *736 Вт*.

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час ($1\ кВт{\cdot}ч = 3{,}6{\cdot}10^4\ Дж \approx 367100\ кГм$).

Как известно, **силы**, производящие работу, можно разделить на **движущие**, работа которых *положительна*, и **силы сопротивления**, работа которых *отрицательна*.

Силы сопротивления, в свою очередь, можно разделить на **полезные и вредные**. Полезные силы сопротивления связаны с полезной работой, затрачиваемой на выполнение непосредственно той части технологического процесса, для которой предназначена данная машина: подъем в башенную водокачку, рыхление пласта, перемещение груза и т. п.

Однако работа любой машины или механизма содержит не только полезную ее часть, но и вредную, затрачиваемую на преодоление вредных сил сопротивления, – трение в соединениях деталей; трение рабочих органов почвообрабатывающих машин о почву; преодоление сопротивление воздуха или другой среды, в которой совершает движение тело, и т. п.

Таким образом, полную работу, затрачиваемую машиной, можно представить как сумму работ по преодолению полезных $A_П$ и вредных $A_В$ сопротивлений:

$$A_З = A_П + A_В.$$

Коэффициентом полезного действия машины или механизма (КПД) называется отношение полезной работы к затрачиваемой:

$$\eta = \frac{A_П}{A_З}. \tag{1.46}$$

Коэффициент полезного действия можно выразить через отношение соответствующих мощностей:

$$\eta = \frac{N_П}{N_З}. \tag{1.47}$$

По формуле (1.45) определяют КПД машины за некоторый промежуток времени, а по формуле (1.46) – в данный момент времени.

1.5.7. Частные случаи вычисления работы силы

Работа силы тяжести

Пусть точка M, на которую действует сила тяжести P, перемещается из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение M_l (x_1, y_1, z_1) (рис. 1.17).

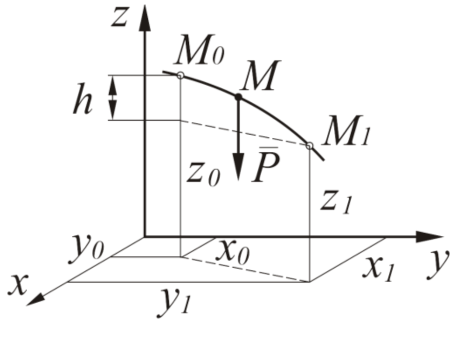


Рисунок 1.17 – Работа силы тяжести

Выберем координатные оси так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх. Тогда $P_x = 0,\ P_y = 0,\ P_z = -P$. Подставляя эти значения в формулу (1.41), получим следующее, учитывая, что переменной интегрирования является z:

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} (-P)dz = -P\int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1).$$

Если точка M_0 выше M_1, то $z_0 - z_1 = h$, где h – вертикальное перемещение точки; если же точка M_0 ниже точки M_1, то $z_0 - z_1 = -h$.

Окончательно получаем

$$A_{M_0M_1} = \pm Ph, \tag{1.48}$$

где h – величина вертикального перемещения точки.

Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной, т. е. *работа считается положительной, если тело приближается к земле*.

Из полученного результата следует, что работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются **потенциальными.**

Работа силы упругости

Рассмотрим груз M, лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к свободному концу некоторой пружины (рис. 1.18). На плоскости отметим точкой 0 положение, занимаемое концом пружины, когда она не напряжена (l_0 – длина ненапряженной пружины), и примем эту точку за начало координат.

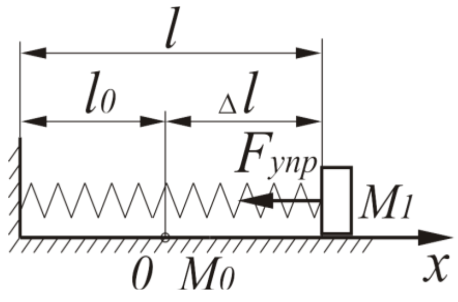


Рисунок 1.18 – Работа силы упругости

Если теперь оттянуть груз от равновесного положения *0*, растянув пружину до величины *l*, то пружина получит удлинение $\Delta l = l - l_0$ и на груз будет действовать сила упругости $F_{упр}$, направленная к точке *0*:

$$F_{упр} = -cx. \qquad (1.49)$$

Коэффициент *c* называется **коэффициентом жесткости пружины**. В технике обычно коэффициент жесткости численно равен силе, которую надо приложить к пружине, чтобы растянуть ее на *1 см*.

Найдем работу, совершаемую силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. Так как в данном случае $F_x = F_{упр} = -cx$, $F_y = F_z = 0$, то, подставляя эти значения в формулу (1.41), получим:

$$A(F_{упр}) = \int_{M_0}^{M_1} (-cx)dx = -c\int_{x_0}^{x_1} xdx = \frac{c}{2}\left(x_0^2 - x_1^2\right)$$

или

$$A(F_{упр}) = \frac{c}{2}\left[(\Delta l_{нач})^2 - (\Delta l_{кон})^2\right], \qquad (1.50)$$

т. е. работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

Работа будет положительной, когда $|\Delta l_{нач}| > |\Delta l_{кон}|$, т. е. когда конец пружины перемещается к равновесному положению, и отрицательной, когда $|\Delta l_{нач}| < |\Delta l_{кон}|$, т. е. когда конец пружины удаляется от равновесного положения.

Можно доказать, что формула (1.48) остается справедливой и в случае, когда перемещение точки *M* не является прямолинейным. Таким образом, оказывается, что работа силы $F_{упр}$ зависит только от значений $\Delta l_{нач}$ и $\Delta l_{кон}$ и не зависит от вида траектории точки *M*. Следовательно, сила упругости также является *потенциальной*.

Работа силы трения

Рассмотрим точку, движущуюся по какой-нибудь шероховатой поверхности или кривой. Действующая на точку сила трения равна по модулю fN, где f – коэффициент трения, а N – нормальная реакция поверхности. Направлена сила трения противоположно перемещению точки. Следовательно, $F_{тр} = -fN$, и по формуле (1.41) будем иметь

$$A(F_{тр}) = -\int_{M_0}^{M_1} F_{тр} ds = -\int_{M_0}^{M_1} fNds. \tag{1.51}$$

Если численно сила трения постоянна, то $A(F_{тр}) = -F_{тр}s$, где s – длина дуги кривой M_0M_1, по которой перемещается точка. Таким образом, *работа силы трения при скольжении всегда отрицательна*. Так как эта работа зависит от длины дуги M_0M_1, то, следовательно, сила трения является силой *непотенциальной*.

1.5.8. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Наряду с количеством движения существует другая мера механического движения – кинетическая энергия.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \tag{1.52}$$

Единица измерения кинетической энергии та же, что и работы (в СИ – *1Дж*). Найдем зависимость, которой связаны эти две величины.

Рассмотрим материальную точку с массой m, перемещающуюся из положения M_0, где она имеет скорость v_0, в положение M_1, где ее скорость равна v_1.

Для получения искомой зависимости обратимся к выражающему основной закон динамики уравнению $m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$. Проектируя обе его части на касательную τ к траектории точки M, направленную в сторону движения, получим

$$ma_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}.$$

Входящее сюда касательное ускорение точки представим в виде

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = v\frac{dv}{ds}.$$

В результате будем иметь

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}.$$

Умножим обе части этого равенства на ds и внесем m под знак дифференциала. Тогда, учитывая, что $F_{k\tau}ds = dA_k$, где dA_k – элементарная работа силы F_k, получим выражение **теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме**:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k. \tag{1.53}$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1, найдем окончательно

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}. \tag{1.54}$$

Полученная формула (1.53) выражает **теорему об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме**: изменение кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно работе сил, действующих на точку, на этом же перемещении.

Случай несвободного движения. При несвободном движении точки в правую часть равенства (1.53) войдет работа заданных (активных) сил и работа реакции связи. Ограничимся рассмотрением движения точки по неподвижной гладкой (лишенной трения) поверхности или кривой. В этом случае реакция *N* будет направлена по нормали к траектории точки. Тогда работа реакции неподвижной гладкой поверхности (или кривой) при любом перемещении точки будет равна нулю, и уравнение (1.53) будет иметь вид

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A^a_{(M_0 M_1)}. \tag{1.55}$$

Следовательно, *при перемещении по неподвижной гладкой поверхности (или кривой) изменение кинетической энергии точки равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к точке активных сил*.

Если поверхность (кривая) не является гладкой, то к работе активных сил прибавится работа силы трения.

1.5.9. Решение задач при помощи общих теорем динамики материальной точки

Приступая к решению задач, следует прежде всего установить, можно ли для решения данной задачи воспользоваться одной из теорем динамики точки и какой именно.

С помощью *теоремы об изменении количества движения точки* легко решаются задачи:

а) в которых действующие силы постоянны или зависят только от времени;

б) в число исходных данных и искомых величин которых входят действующие силы, *время движения*, начальная и конечные скорости точки.

С помощью теоремы *об изменении кинетической энергии* точки легко решаются задачи:

а) в которых действующие силы постоянны или зависят только от расстояния;

б) в число исходных данных и искомых величин которых входят действующие силы, *перемещение точки*, скорости в начале и в конце перемещения.

Применяя обе теоремы одновременно, можно решить некоторые смешанные задачи, в которых данными (или искомыми) являются и время движения, и перемещение точки.

Если в числе действующих сил есть сила, зависящая от скорости движения, то решить основную задачу динамики с помощью какой-нибудь из общих теорем нельзя (невозможно определить работу или импульс силы). В этом случае надо пользоваться методом интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Алгоритм решения задач при помощи общих теорем динамики точки:

1. По данным задачи определить, какой из общих теорем можно воспользоваться для ее решения.

2. Составить расчетную схему: изобразить движущуюся точку в произвольном положении и показать все действующие на нее активные силы и реакции связи.

3. Определить по соответствующим формулам импульсы или работу всех сил за время движения точки.

4. Пользуясь выражениями основных теорем динамики точки, составить соответствующие уравнения и определить из них искомые величины. При всех вычислениях обращать особое внимание на то, чтобы все величины вычислялись в одной и той же системе единиц.

1.5.10. Примеры решения задач с применением общих теорем динамики точки

Пример 1.14. На наклонной шероховатой плоскости, составляющей с горизонтом угол *30°*, спускается без начальной скорости тело (рис. 1.19). Определить, какую скорость приобретет тело, пройдя *2 м* от начала движения, если коэффициент трения скольжения *f = 0,1*.

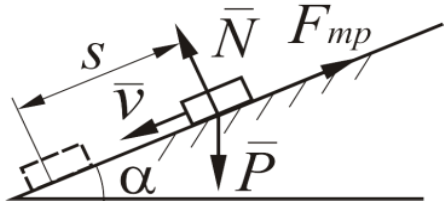


Рисунок 1.19 – Расчетная схема к примеру 1.14

Решение. Для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии, рассматривая тело как материальную точку:

$$m\frac{v_1^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \sum A,$$

где $m = P/g$, $v_0 = 0$.

Выразим работы всех сил, действующих на тело, обозначив перемещение тела как s:

$$\sum A = A(P) + A(F_{тр}),$$

где $A(P) = P \cdot sin30° \cdot s$ – работа силы тяжести;

$A(F_{тр}) = – F_{тр} \cdot s = –f\, sP\, cos30°$ – работа силы трения.

После подстановки полученных выражений исходная формула примет вид

$$\frac{Pv_1^2}{g2} = P\left(sin30^0 - f\,cos30^0\right)s,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2g\left(sin30^0 - f\,cos30^0\right)s}.$$

Подставим численные значения и получим скорость тела, равную $v_1 = \sqrt{16{,}2} = 4{,}02 м/с$.

Пример 1.15. Груз M массой $m = 2\ кг$, брошенный со скоростью $v_0 = 20\ м/с$ из пункта A, находящегося на высоте $h = 5\ м$, имеет в точке падения C скорость $v_1 = 16\ м/с$ (рис. 1.20). Определить, чему равна работа действующей на груз при его движении силы сопротивления воздуха R.

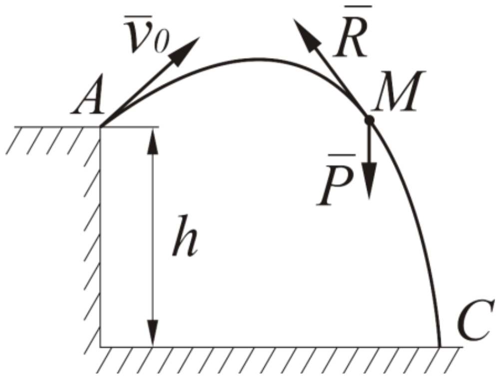


Рисунок 1.20 – Расчетная схема к примеру 1.15

Решение. На груз M при его движении действуют сила тяжести P и сила сопротивления воздуха R. По теореме об изменении кинетической энергии, считая груз материальной точкой, имеем следующее:

$$m\frac{v_1^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = A(P) + A(R),$$

где $A(P) = Ph = mgh$ – работа силы тяжести груза.

Тогда работа сил сопротивления воздуха равна

$$A(R) = m\frac{v_1^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} - mgh = -242 Дж.$$

Пример 1.16. Колесный трактор массой *3070 кг* идет по пашне со скоростью *1,33 м/с*. После включения муфты сцепления он остановился, пройдя при этом путь *1,13 м*. Определить силу сопротивления R движению трактора (рис. 1.21).

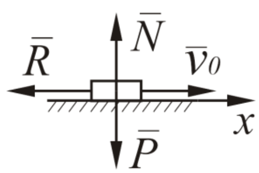


Рисунок 1.21 – Расчетная схема к примеру 1.16

Решение. Для решения этой задачи рассмотрим поступательно движущийся трактор как материальную точку и применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Так как конечная скорость трактора равна нулю, а сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению трактора, будем иметь:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -Rs,$$

откуда

$$R = \frac{mv_0^2}{2s} = \frac{3070 \cdot 1{,}33^2}{2 \cdot 1{,}13} = 2{,}4 кН.$$

1.6. Прямолинейное колебательное движение точки

Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и прочих, отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той причине, что такие колебания очень часто имеют место в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и уяснения колебательных явлений в других областях.

Колебания материальной точки возникают в том случае, если на точку, отклоненную от **положения равновесия**, действуют силы, стремящиеся вернуть точку в положение равновесия. Такие силы называются **восстанавливающими**.

Кроме того, на материальную точку могут действовать **силы сопротивления** – силы, препятствующие движению материальной точки, и любые силы, зависящие от времени, называемые **возмущающими** силами.

На практике чаще всего встречаются следующие случаи:

– **восстанавливающие силы**, пропорциональные отклонениям точки от положения равновесия $F_x = -cx$ (c – коэффициент пропорциональности ($Н/м$), называемый **коэффициентом жесткости или коэффициентом упругости**);

– **силы сопротивления**, пропорциональные скорости точки $R_x = -b\dot{x}$ (b – **коэффициент сопротивления**);

– **возмущающие силы**, изменяющиеся с течением времени по периодическому закону $Q_x = H \sin pt$ (H – **амплитуда возмущающей силы**, p – **частота возмущающей силы**).

Различают основные случаи колебательного движения материальной точки:

1) **свободные** колебания, происходящие под действием только восстанавливающих сил;

2) **затухающие** колебания, происходящие под действием восстанавливающих сил и сил сопротивления движению;

3) **вынужденные** колебания, происходящие под действием восстанавливающих сил и возмущающих сил (вынужденные колебания ***при отсутствии сопротивления***), и вынужденные колебания, происходящие под действием восстанавливающих сил, возмущающих сил и сил сопротивления движению (вынужденные колебания ***при наличии сопротивления***).

1.6.1. Свободные колебания

Рассмотрим колебательное движение точки вдоль оси x под действием восстанавливающей силы $F_{упр}$, которая пропорциональна отклонению материальной точки (тела) от положения статического равновесия (рис. 1.22).

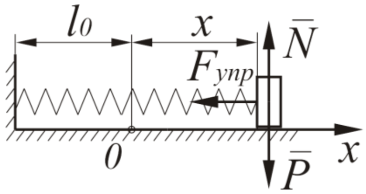


Рисунок 1.22 – Свободные колебания точки

$$F_x = F_{упр} = -cx, \qquad (1.56)$$

где c – коэффициент пропорциональности (упругости), *Н/м*;

l_0 – длина недеформированной пружины, *м*.

Запишем второй закон динамики в векторном виде для данной системы сил:

$$m\bar{a} = \bar{F}_{упр} + \bar{N} + \bar{P}.$$

В проекции на ось $0x$ уравнение примет вид

$$ma_x = -F_{упр},$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Обозначив

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad (1.57)$$

получим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, называемое **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \qquad (1.58)$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – **циклическая (круговая) частота собственных колебаний**.

Уравнение (1.58) представляет собой **дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления**.

Циклическая частота k показывает, сколько полных колебаний совершит материальная точка (тело) в единицу времени.

Промежуток времени, в течение которого материальная точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний** (*T*) – величина обратная циклической частоте, которая определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (1.59)$$

Общее решение уравнения (1.56) имеет вид

$$x = C_1 coskt + C_2 sinkt. \qquad (1.60)$$

Чтобы определить значения постоянных интегрирования C_1 и C_2, найдем уравнение, определяющее скорость точки, продифференцировав уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \qquad (1.61)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точка имеет координату x_0 и проекцию скорости на ось x, равную v_{0x}. Тогда, подставив начальные условия в уравнения (1.59) и (1.61), найдем

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_{0x}}{k}.$$

Подставляя значения постоянных интегрирования в уравнение движения (1.60), получим

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_{0x}}{k} \sin kt. \qquad (1.62)$$

Уравнение (1.62) можно записать в более компактном виде, положив

$$C_1 = a \sin\alpha \quad \text{и} \quad C_2 = a \cos\alpha.$$

При этом получим

$$x = a(\sin\alpha \cos kt + \cos\alpha \sin kt)$$

или

$$x = a \sin(kt + \alpha), \qquad (1.63)$$

где a – **амплитуда колебаний** – наибольшее отклонение точки от положения равновесия, *м*:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{k^2}}; \qquad (1.64)$$

$\varphi = kt + \alpha$ – **фаза колебаний**;

α – **начальная фаза колебаний**:

$$\alpha = arctg\frac{kx_0}{v_{0x}}. \tag{1.65}$$

Фаза колебаний, в отличие от координаты x, определяет не только положение точки в данный момент, но и направление ее последующего движения.

Уравнение (1.62) является **уравнением гармонического колебательного движения материальной точки**.

График гармонического колебательного движения при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ показан на рисунке 1.23.

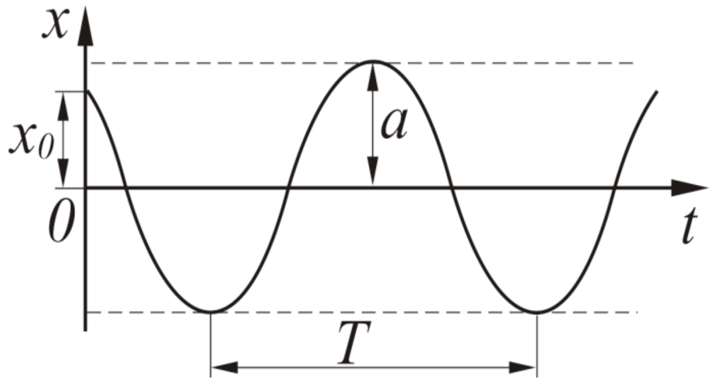


Рисунок 1.23 – График свободных колебаний точки

Амплитуда A и начальная фаза α колебаний *зависят как от начальных условий*, так и от физико-механических свойств колебательной системы (c, m), и определяются по начальным условиям движения.

Период T и частота k зависят только от физико-механических свойств колебательной системы (c, m), а *от начальных условий не зависят*.

Уравнение, определяющее скорость, соответственно примет вид

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ka\cos(kt + \alpha). \tag{1.66}$$

1.6.2. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки

Пусть на точку *M*, кроме восстанавливающей силы *F*, направленной к центру *O* и пропорциональной расстоянию от центра *O*, действует еще постоянная по модулю и направлению сила *R* (рис. 1.24).

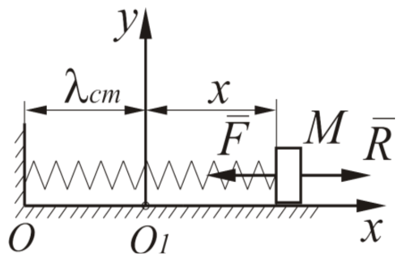


Рисунок 1.24 – Свободные колебания под действием постоянной силы

В этом случае положением равновесия точки *M*, где сила *R* уравновешивается силой *F*, будет точка O_1 (отстоящая от *O* на расстоянии $OO_1=\lambda_{ст}$, которое определяется равенством

$$\lambda_{ст} = \frac{R}{c}. \tag{1.67}$$

Величина $\lambda_{ст}$ называется **статическим отклонением**.

Примем точку O_1 за начало координат и направим ось Ox в сторону действия силы *R*. Тогда $F_x= -c\ (x + \lambda_{ст})$ и $R_x= R$. В результате, составляя дифференциальное уравнение движения и учитывая, что согласно равенству (1.66) $c\ \lambda_{ст} = R$, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Полученное уравнение, где *k* определяется равенством (1.56), совпадает с уравнением (1.57). Отсюда заключаем, что *постоянная сила R, не изменяя характера колебаний, смещает центр колебаний в сторону действия силы на величину статического отклонения* $\lambda_{ст}$.

Выразим период колебаний через $\lambda_{ст}$. Из (1.66) и (1.57) находим, что $k^2= R\ /m\ \lambda_{ст}$. Тогда равенство (1.58) принимает вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{P}\lambda_{cm}}\,. \tag{1.68}$$

Таким образом, *период колебаний пропорционален корню квадратному из статического отклонения* λ_{cm}.

В частности, если силой R является сила тяжести (что имеет место при колебаниях груза на вертикальной пружине), то $R = mg$ и формула (1.68) принимает вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}\,.$$

Пример 1.17. Груз весом G подвешивают на пружине жесткостью c, имеющей в нерастянутом состоянии длину l_0, и отпускают без начальной скорости (рис. 1.25). Определить закон колебаний груза, период колебаний и наибольшую силу упругости (реакции) пружины, если в положении равновесия груз растягивает пружину на величину λ_{cm}.

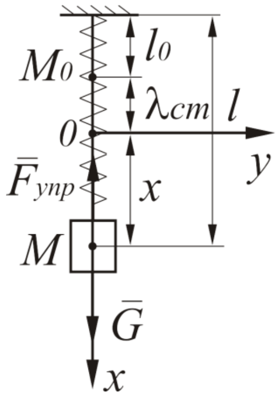


Рисунок 1.25 – Расчетная схема к примеру 1.17

Решение. Начало координат выберем в положении статического равновесия, при котором $G=c\,\lambda_{cm}$, ось Ox направлена по вертикали вниз.

Согласно закону Гука сила упругости пружины пропорциональна ее удлинению:

$$F_{упр} = c\lambda.$$

Удлинение пружины, соответствующее положению M груза,

$$\lambda = l - l_0 = \lambda_{cm} + x.$$

Следовательно, $F_{упр} = c(\lambda_{cm} + x)$, тогда:

$$\frac{G}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=G-F_{упр}$$

или

$$\frac{G}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=G-c(\lambda_{cm}+x).$$

В положении равновесия модуль силы упругости пружины $F_{упр}$ равен весу груза $G = c\,\lambda_{cm}$, поэтому

$$\frac{G}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-cx$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0,$$

где $k^2=\dfrac{gc}{G}$.

Следовательно, груз, подвешенный на пружине, будет совершать колебания около положения равновесия O. Период колебаний груза

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{G}{gc}}=2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}},$$

так как $G = c\,\lambda_{cm}$.

Общее решение полученного дифференциального уравнения

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

Постоянные интегрирования найдем, составив второе дифференциальное уравнение и воспользовавшись начальными условиями:

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt.$$

При $t = 0$ $x_0 = -\lambda_{cm}$, $v_0=0$.

Отсюда $C_1 = -\lambda_{cm}$, $C_2 = 0$.

Искомый закон движения груза примет вид

$$x = -\lambda_{cm} \cos kt.$$

Так как $F_x = c(\lambda_{cm} + x)$, то

$$F_x = c(\lambda_{cm} - \lambda_{cm} \cos kt),$$

$$F_x = c\, \lambda_{cm}\, (1 - \cos kt).$$

Максимальное значение силы упругости будет при $\cos kt = 0$.

Пример 18. Определить период колебаний груза весом G, подвешенного на двух пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2.

Решение. Каждая из пружин, расположенных последовательно, в статическом положении растягивается силой G (рис. 1.26).

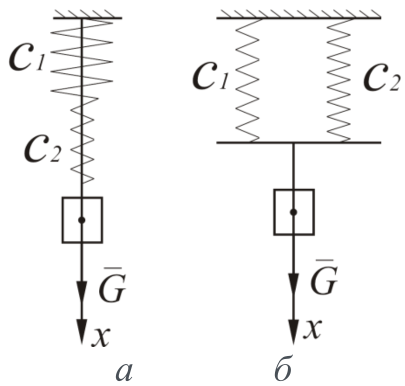


Рисунок 1.26 – Расчетная схема к примеру 1.18

Статические удлинения пружин:

$$\lambda_{1cm} = \frac{G}{c_1}, \quad \lambda_{2cm} = \frac{G}{c_2}.$$

Общее удлинение пружин

$$\lambda_{cm} = \lambda_{1cm} + \lambda_{2cm} = G\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) = G\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2},$$

где $\dfrac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} = c_{np}$ – приведенная жесткость пружины.

Отсюда период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{G}{g}\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}}\,.$$

Если пружины расположены параллельно (рис. 1.26, б), то статические удлинения обоих пружин одинаковы, сила G уравновешивается силами упругости пружин $c_1\lambda_{cm}$ и $c_2\lambda_{cm}$. Отсюда

$$G = (c_1 + c_2)\lambda_{cm},$$

где $c_1 + c_2 = c_{np}$ – приведенная жесткость пружины.

Тогда период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{G}{g \cdot c_{np}}}\,.$$

1.6.3. Затухающие колебания

Затухающие колебания – колебания, происходящие под действием восстанавливающих сил и сил сопротивления движению. Рассмотрим, как влияет на свободные колебания сопротивление, создаваемое силой вязкого трения, т. е. силой, пропорциональной первой степени скорости: $R = -\mu v$ (знак минус указывает, что сила R направлена противоположно v) (рис. 1.27).

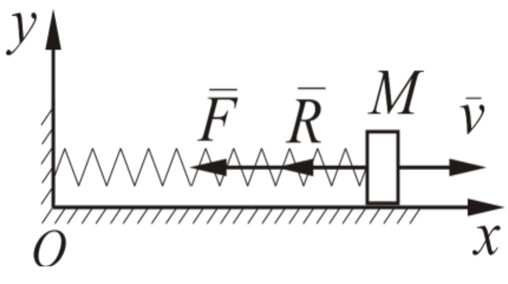


Рисунок 1.27 – Затухающие колебания

Пусть на точку при ее движении действуют восстанавливающая сила F и сила сопротивления R. Тогда $F_x = -cx$, $R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}$, а дифференциальное уравнение движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

Деля обе части уравнения на массу m, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \tag{1.69}$$

где введены обозначения:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2b. \tag{1.70}$$

При этом легко проверить, что величины k и b имеют одинаковые размерности (*1/с*); это позволяет сравнивать их друг с другом.

Уравнение (1.68) представляет собой **дифференциальное уравнение свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости**. Его решение, как и решение уравнения (1.58), ищут в виде $x = e^{nt}$. Подставляя это значение x в уравнение (1.69), получим **характеристическое уравнение**:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0,$$

корни которого будут равны

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \tag{1.71}$$

1. Рассмотрим случай, когда $k > b$, т. е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой мало. Введя обозначение

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}\ , \tag{1.72}$$

получим из (1.71), что $n_{12} = -b \pm ik_1$, т. е. корни характеристического уравнения являются комплексными. Тогда общее решение уравнения (1.69) будет отличаться от решения уравнения (1.58) только множителем e^{-bt}, т. е. будет иметь вид

$$x = e^{-bt}\left(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t\right), \tag{1.73}$$

или по аналогии с равенством (1.63)

$$x = ae^{-bt}\sin\left(k_1 t + \alpha\right). \tag{1.74}$$

Входящие в (1.73) величины a и α являются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям.

Колебания, происходящие по закону (1.74), называются **затухающими**, так как благодаря множителю e^{-bt} величина $x = OM$ с течением времени убывает, стремясь к нулю. График этих колебаний показан на рисунке 1.28 (график заключен между пунктирными кривыми $x=ae^{-bt}$ и $x=-ae^{-bt}$, так как $\sin(k_1t+\alpha)$ по модулю не может стать больше единицы).

Промежуток времени T_1, равный периоду $\sin(k_1t+\alpha)$, т. е. величину

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \tag{1.75}$$

принято называть **периодом затухающих колебаний**. За период точка совершает одно полное колебание, т. е., например, начав двигаться из положения $x = 0$ вправо, приходит в то же положение, двигаясь также вправо. Формулу (1.75), если учесть равенство (1.59), можно еще представить в виде

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} \approx T\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\right). \tag{1.76}$$

Из полученных формул видно, что $T_1>T$, т. е. что при наличии сопротивления период колебаний несколько увеличивается. Однако когда сопротивление мало ($b<<k$), то величиной b^2/k^2 по сравнению с единицей можно пренебречь и считать $T_1\approx T$. Следовательно, малое сопротивление на период колебаний практически не влияет.

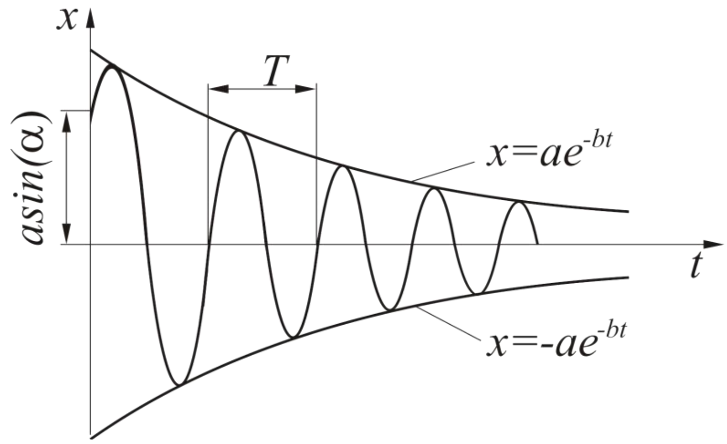


Рисунок 1.28 – График затухающих колебаний

Рассмотрим влияние сопротивления на изменение амплитуды колебаний.

В некоторый момент времени $t=t_1$:

$$x_1(t_1)=ae^{-bt}\sin(k_1t_1+\alpha).$$

Расстояние до следующего наибольшего отклонения от положения покоя в течение каждого колебания точка пройдет за половину периода, тогда:

$$x_2\left(t_1+\frac{T_1}{2}\right)=ae^{-bt\left(t_1+\frac{T_1}{2}\right)}\sin(k_1t_1+k_1T_1+\alpha)=x_1e^{-bT_1}.$$

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается по закону геометрической прогрессии со знаменателем e^{-bT_1}, который называется **декрементом затухающих колебаний**, а модуль его логарифма, т. е. величина b_1T_1 называется **логарифмическим декрементом**.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $b > k$, т. е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой велико. Вводя

обозначение $b^2 - k^2 = r^2$, найдем, что в этом случае корни характеристического уравнения (1.70) равны $n_{1,2} = -b \pm r$, т. е. оба действительны и отрицательны (так как $r < b$). Следовательно, решение уравнения (1.68), описывающее закон движения точки, имеет при $b > k$ вид

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}.$$

Так как функция e^{-at}, где $a>0$ со временем монотонно убывает, стремясь к нулю, то движение точки в этом случае не будет колебательным и она под действием восстанавливающей силы будет постепенно (асимптотически) приближаться к равновесному положению $x=0$. График такого движения (если при $t = 0$ $x = x_0$, $v_0 > 0$) имеет вид, показанный на рисунке 1.29.

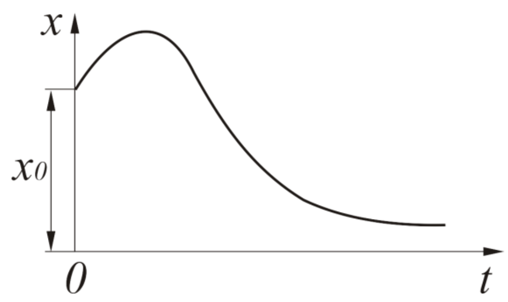


Рисунок 1.29 – График затухающих колебаний при b > k

3. При $n = k$ имеем равные действительные корни (предельный или граничный случай). Тогда закон движения примет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2).$$

Движение точки в данном случае тоже не будет колебательным и она со временем стремится асимптотически к равновесному положению $x = 0$.

1.6.4. Вынужденные колебания

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих когда на точку, кроме восстанавливающей силы F, действует еще периодически изменяющаяся со временем сила Q, проекция которой на ось Ox равна

$$Q_x = Q_0 sin(pt). \qquad (1.77)$$

Эта сила называется **возмущающей силой**, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются **вынужденными**. Величина p в равенстве (1.77) является **частотой возмущающей силы**.

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Q_x определяется равенством (1.77). Такая возмущающая сила называется **гармонической**.

1. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления.

Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы F, действует только возмущающая сила Q. Дифференциальное уравнение движения в этом случае будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 sin(pt). \qquad (1.78)$$

Преобразуем уравнение (1.77), разделив его обе части на m и введя следующие обозначения:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{Q_0}{m} = P_0, \qquad (1.79)$$

где P_0 имеет размерность ускорения. Тогда дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P_0 sin(pt). \qquad (1.80)$$

Уравнение (1.80) является **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления**. Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x=x_1+ x_2$, где x_1 – общее решение уравнения без правой части, т. е. решение уравнения (1.56), а x_2 – какое-нибудь частное решение полного уравнения (1.79).

Полагая, что $p \neq k$, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = B \sin(pt),$$

где B – постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство (1.79) обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение (1.79), получим

$$-p^2 B \sin(pt) + k^2 B \sin(pt) = P_0 \sin(pt).$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если $B\left(k^2 - p^2\right) = P_0$, или $B = \frac{P_0}{\left(k^2 - p^2\right)}$.

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt). \tag{1.81}$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а значение x_1 дается равенством (1.62), то общее решение уравнения (1.79) имеет вид

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt), \tag{1.82}$$

где A и α – постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным.

Решение (1.82) показывает, что колебания точки слагаются в этом случае:

1) из колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k, называемых **собственными колебаниями**;

2) колебаний с амплитудой B (не зависящей от начальных условий) и частотой p, которые называются **вынужденными колебаниями**.

Благодаря неизбежному наличию тех или иных сопротивлений, собственные колебания будут довольно быстро затухать. Поэтому основное значение в рассматриваемом движении имеют вынужденные колебания, закон которых дается уравнением (1.80).

Частота p вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде:

$$B = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{\lambda_0}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}, \tag{1.83}$$

где согласно равенствам (1.78) $\lambda_0 = P_0/k^2 = Q_0/c$, т. е. λ_0, есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0. Как видим, B зависит от отношения частоты p возмущающей силы к частоте k собственных колебаний. Введем обозначения:

$$z = p/k, \quad \eta = B/\lambda_0.$$

Безразмерный коэффициент η называют **коэффициентом динамичности**. Он показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний B (т. е. максимальное отклонение точки от центра колебаний) больше статического отклонения λ_0, и зависит от отношения частот z.

при $p < k$

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2},$$

при $p > k$

$$\eta = \frac{k^2}{p^2 - k^2}.$$

Из формулы (1.82) видно, что, подбирая различные соотношения между p и k, можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p = 0$ (или $p \ll k$) амплитуда равна λ_0, (или близка к этой величине). Если величина p близка к k, амплитуда B становится очень большой. Наконец, когда $p \gg k$, амплитуда B становится очень малой (практически близка к нулю).

Отметим еще, что при $p < k$, как видно из сравнения формул (1.77) и (1.81), фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы все время совпадают (обе равны pt). Если же $p > k$, то, внося минус под знак синуса, можно представить уравнение (1.81) в виде

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin(pt - \pi).$$

Следовательно, при $p > k$ сдвиг между фазами вынужденных колебаний и возмущающей силы равен π (когда сила Q имеет максимальное значение и направлена вправо, колеблющаяся точка максимально смещена влево и т. д.).

Резонанс. В случае, когда $p = k$, т. е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление **резонанса**. Формулами (1.80), (1.82) этот случай не описывается, но можно доказать, что размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как это показано на рисунке 1.30.

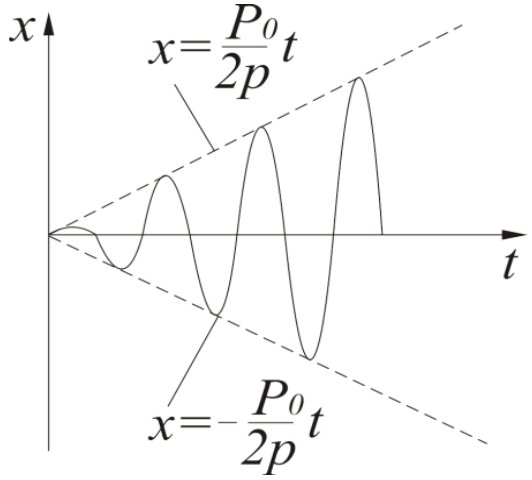


Рисунок 1.30 – Явление резонанса

При возрастании частоты возмущающей силы от нуля коэффициент динамичности увеличивается; при резонансе ($p = k$) становится бесконечным, а при дальнейшем увеличении частоты становится меньше единицы, т. е. динамический эффект от возмущающей силы слабее, чем при ее статическом действии. Этим свойством пользуются для уменьшения колебаний технических объектов, подверженных действию гармонических возмущающих сил.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. При каком условии тело движется по инерции? Что является мерой инертности тела?

2. Запишите основной закон динамики для свободного и несвободного движения точки (тела).

3. Сформулируйте две задачи динамики.

4. При каком условии точка движется прямолинейно?

5. Запишите дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки.

6. Что такое начальные условия? Для чего они необходимы?

7. Запишите дифференциальное уравнение и его решение для прямолинейного движения точки под действием постоянной силы.

8. Составьте дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки под действием силы $Q = kt$, зависящей от времени, и получите его решение в общем виде.

9. Сколько необходимо составить дифференциальных уравнений для описания криволинейного движения точки на плоскости, в пространстве?

10. В чем смысл задачи Галилея?

11. В чем преимущество применения общих теорем динамики?

12. Что такое количество движения, кинетическая энергия и импульс силы? Назовите их единицы измерения.

13. Запишите теорему об изменении количества движения точки в конечном виде.

14. Что такое момент количества движения точки относительно данного центра О?

15. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и оси.

16. Дайте определение элементарной работы силы и работы силы на конечном перемещении. Назовите условия, при которых работа будет положительной и отрицательной.

17. Что характеризует мощность силы?

18. Чем отличаются движущие силы от сил сопротивления? Какие бывают силы сопротивления? Приведите примеры.

19. Что такое коэффициент полезного действия?

20. Запишите формулы для определения работы сил тяжести, упругости и трения.

21. В чем смысл теоремы об изменении кинетической энергии точки?

22. Перечислите основные этапы решения задач при помощи общих теорем динамики точки.

23. Перечислите основные виды колебательного движения.

24. Что такое циклическая частота, период колебаний и амплитуда?

25. Запишите уравнение гармонического колебательного движения материальной точки.

26. Что такое статическое отклонение? В каком случае оно появляется?

27. Что такое резонанс? При каких условиях он возникает?

28. Изобразите графики резонанса, свободных и затухающих колебаний.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИНАМИКЕ ТОЧКИ

Задание 1.1. Составление дифференциальных уравнений движения материальной точки

Вариант задания в таблице 1.1 выбирается по номеру студента в списке группы. Номер схемы в таблице 1.2 указан в таблице 1.1.

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость V_A, движется в изогнутой трубе ABC.

На участке AB на груз действует постоянная сила Q (ее направление показано на схеме). Трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз D, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила трения $F_{тр}$ и переменная сила F, проекция которой F_x на ось x задана в таблице 1.2 (направление оси x указано на схеме).

Считая груз D материальной точкой и зная время t движения на участке AB, найти закон движения груза D на участке BC, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Ход решения задачи

1. Составить дифференциальное уравнение движения точки (груза D) на участке AB и проинтегрировать его методом разделения переменных, учитывая начальные условия.

2. Зная время движения груза на участке AB, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной на участке BC.

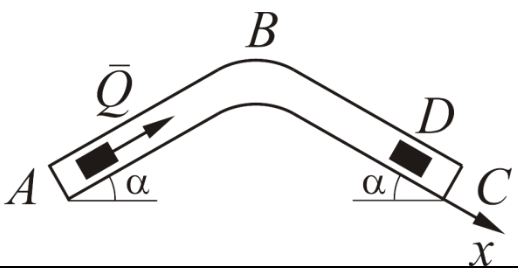
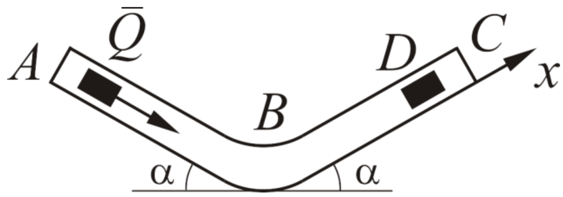
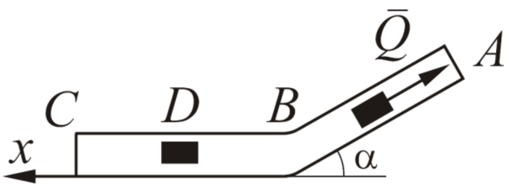
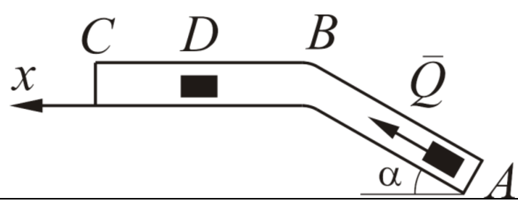
3. Составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC с учетом начальных условий. Получить уравнение для скорости движения груза D на участке BC.

4. Учитывая, что $V = dx/dt$, еще раз проинтегрировать это уравнение методом разделения переменных. Полученный закон $x = f(t)$ и будет являться законом движения груза на участке BC. Численные значения взять из таблицы 1.1.

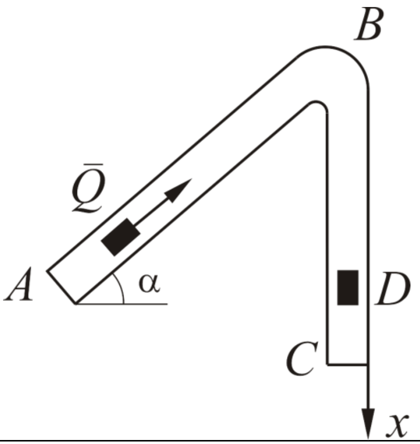
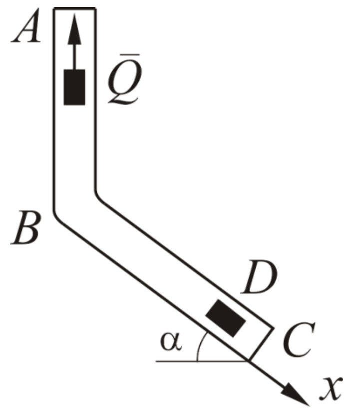
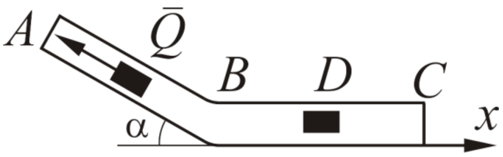
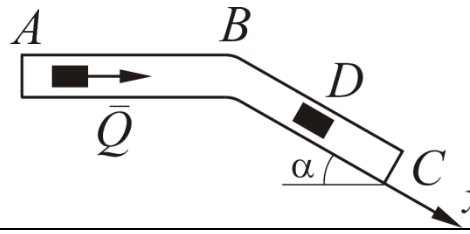
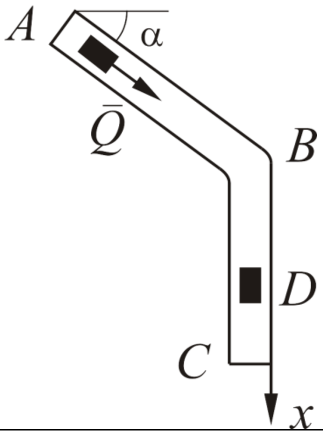
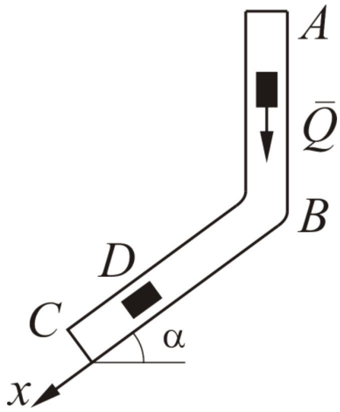
Таблица 1.1 – Числовые значения для задания 1.1

Вариант	Номер схемы	m, кг	V_A, м/с	Q, Н	t, с	F_x Н	f	α, град.
0	0	1,6	24	19	2	6 sin(4t)	0,1	30
1	1	1,8	22	6	2	2 cos(2t)	0,2	60
2	2	4	20	5	3	8t	0,15	45
3	3	2,4	18	22	1,5	8 cos(4t)	0,25	30
4	4	3	16	6	2	3 sin(2t)	0,1	50
5	5	4	14	9	4	4 cos(2t)	0,15	25
6	6	5,5	12	7	2,5	4t	0,2	35
7	7	4,8	12	12	3	2 cos(4t)	0,1	40
8	8	7	10	10	2	3 sin(4t)	0,25	45
9	9	6	10	18	4	9t	0,3	60
10	0	2,5	20	16	3	6 sin(2t)	0,2	45
11	1	4	18	8	3	cos(4t)	0,25	30
12	2	8	15	12	5	$8t^2$	0,15	60
13	3	2	19	20	1	4 cos(4t)	0,2	40
14	4	3,5	20	5	3	3 sin(3t)	0,3	50
15	5	6,2	16	6	3	2 cos(4t)	0,15	25
16	6	5	14	5	2,5	$2t^2$	0,1	35
17	7	2,8	16	10	2	4 cos(2t)	0,10	40
18	8	4,5	10	8	2	4 sin(t/2)	0,2	30
19	9	2,5	12	17	3	5t+2	0,3	45
20	0	1,6	8	20	4	9t-7	0,35	60

Таблица 1.2 – Схемы к заданию 1.1

Вариант 0	Вариант 1
	
Вариант 2	**Вариант 3**
	

Окончание табл. 1.2

Вариант 4	Вариант 5
	
Вариант 6	Вариант 7
	
Вариант 8	Вариант 9
	

Пример выполнения задания 1.1

Дано. На наклонном участке *AB* трубы на груз *D* массой $m=2,5$ *кг* действует сила тяжести и постоянная сила $Q = 20$ *Н* (рис. 1.31). В точке *A* груз имеет начальную скорость $V_A = 6$ *м/с*. Движение от точки *A* до точки *B* длится $t = 2c$. На горизонтальном участке *BC* действует сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0,2$) и переменная сила $F = 5\cos(4t)$, заданная в Ньютонах. Определить $x = f(t)$ – закон движения груза на участке *BC*.

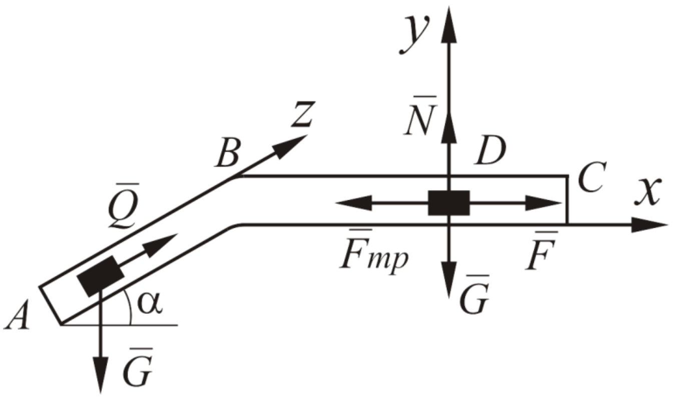


Рисунок 1.31 – Схема к примеру решения задания 1.1

Решение.

1. Рассмотрим движение груза *D* **на участке *AB***, считая груз материальной точкой. Изобразим положение груза в произвольный момент времени и все силы, действующие на него: силу тяжести $\bar{G}$ и внешнюю силу $\bar{Q}$. Вдоль участка *AB* проведем ось *Az* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum\bar{F}_z,$$

$$m\frac{dv_z}{dt}=Q-G\sin 30^o.$$

Учитывая, что $G=mg$, получим

$$m\frac{dv_z}{dt}=Q-mg\sin 30^o.$$

Разделим обе части уравнения на массу *m* и решим это дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dv_z}{dt}=\frac{Q}{m}-g\sin 30^o,$$

$$dv_z=\left(\frac{Q}{m}-g\sin 30^o\right)dt,$$

$$\int dv_z = \int\left(\frac{Q}{m} - g\,sin30^o\right)dt,$$

$$v_z = \frac{Q}{m}t - gt\,sin30^o + C_1. \qquad (1)$$

Для определения постоянной интегрированной C_1 подставим в (1) начальные условия: при $t = 0$ $\quad v_z = v_{0z} = v_A$.

Получим $C_1 = v_A$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$v_z = \frac{Q}{m}t - gt\,sin30^o + v_A.$$

Определим скорость груза в точке *B*, т. е. в момент времени *t = 2 с.*:

$$v_B = \frac{20}{2{,}5}\cdot 2 - 10\cdot 2\cdot 0{,}5 + 6 = 12 м/с.$$

2. Рассмотрим движение груза **на участке *BC***. Найденная скорость v_B будет начальной для движения на этом участке. Изобразим груз в произвольном положении и действующие на него силы: силу тяжести $\overline{G} = m\overline{g}$, силу трения $\overline{F}_{тр}$, нормальную реакцию $\overline{N}$ и силу $\overline{F}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *x*:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F - F_{тр}, \qquad (2)$$

где $\overline{F}_{тр} = f\cdot N$.

Для определения $\overline{N}$ составим уравнение движения груза проекции на ось *y*:

$$m\frac{dv_y}{dt} = N - G.$$

Так как движение груза вдоль оси y отсутствует, то $v_y = 0$, следовательно,

$$0 = N - G,$$

$$N = G = mg.$$

Тогда сила трения

$$F_{тр} = fmg.$$

Подставим силы в дифференциальное уравнение (2):

$$m\frac{dv_x}{dt} = 5cos4t - fmg.$$

Разделив обе части уравнения на массу m и подставив данные условия задачи, получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 2cos4t - 2. \tag{3}$$

Разделим переменные и решим дифференциальное уравнение (3):

$$v_x = \frac{1}{2}sin4t - 2t + C_2. \tag{4}$$

Подставив в (4) начальные условия $v_{0x} = v_B = 12 м/с$ и $t = 0$, получим $C_2 = 12$.

Подставим постоянную интегрирования C_2 в уравнение (4):

$$v_x = \frac{1}{2}sin4t - 2t + 12. \tag{5}$$

Подставим вместо v_x в уравнение (5) $\frac{dx}{dt}$, разделим переменные и решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} sin4t - 2t + 12,$$

$$\int dx = \int \left(\frac{1}{2} sin4t - 2t + 12 \right) dt,$$

$$x = -\frac{1}{8} cos4t - t^2 + 12t + C_3. \tag{6}$$

Постоянную интегрирования C_3 определим, используя начальные условия при $t = 0$ и $x_0 = 0$:

$$0 = -\frac{1}{8} + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{8}.$$

Подставляя постоянную интегрирования C_3 в уравнение (6), получим уравнение движения груза в окончательном виде:

$$x = 12t - t^2 - \frac{1}{8} cos4t + \frac{1}{8}.$$

Задание 1.2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Вариант задания в таблице 1.3 выбирается по номеру студента в списке группы.

Точка движется прямолинейно под действием силы F, направленной вдоль прямой, по которой движется точка. Сила выражается в ньютонах, масса – в килограммах, время – в секундах, координаты – в метрах. Задание состоит из трех задач: в первой задаче сила, действующая на точку, постоянная; во второй – зависит от времени; в третьей – от скорости.

Входные параметры и задание сведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Числовые значения для задания 1.2

Номер	Сила *F, Н*	Масса, *кг*	Начальные условия	Задание
1	2	3	4	5
Вариант 1				
1	40	8	$t=0,\ x_0=-1,\ V_0=6$	Найти x при $V=8$
2	$5t$	8	$t=0,\ V_0=6,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/9V$	100	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=10$	Найти закон движения точки
Вариант 2				
1	8	8	$t=0,\ x_0=-1,\ V_0=6$	Найти x при $V=8$
2	$8t^2$	10	$t=0,\ V_0=6,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$2/10V$	20	$t=0,\ x_0=1,\ V_0=10$	Найти закон движения точки
Вариант 3				
1	40	10	$t=0,\ x_0=-1,\ V_0=6$	Найти x при $V=9$
2	$5t$	6	$t=0,\ V_0=6,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$3/V$	30	$t=0,\ x_0=1,\ V_0=12$	Найти закон движения точки
Вариант 4				
1	36	12	$t=0,\ x_0=-3,\ V_0=8$	Найти x при $V=13$
2	$5t+6$	6	$t=0,\ V_0=8,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$3/V^2$	3	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=10$	Найти закон движения точки
Вариант 5				
1	42	12	$t=0,\ x_0=-1,\ V_0=6$	Найти x при $V=8$
2	$12t+5$	8	$t=0,\ V_0=6,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$3/V$	30	$t=0,\ x_0=1,\ V_0=12$	Найти закон движения точки
Вариант 6				
1	50	18	$t=0,\ x_0=-2,\ V_0=7$	Найти x при $V=13$
2	$5t^2+6$	6	$t=0,\ V_0=10,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/V^3$	5	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=2$	Найти закон движения точки

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5
		Вариант 7		
1	72	12	$t=0,\ x_0=-3,\ V_0=8$	Найти x при $V=9$
2	$2cos(\pi t/6)$	13	$t=0,\ V_0=8,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/2V^2$	5	$t=0,\ x_0=1,\ V_0=3$	Найти закон движения точки
		Вариант 8		
1	60	20	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=8$	Найти x при $V=9$
2	$cos(\pi t/2)$	11	$t=0,\ V_0=3,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/5V$	5	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=6$	Найти закон движения точки
		Вариант 9		
1	27	9	$t=0,\ x_0=-4,\ V_0=13$	Найти x при $V=22$
2	$2cos(\pi t/4)$	11	$t=0,\ V_0=9,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/V^3$	4	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
		Вариант 10		
1	50	25	$t=0,\ x_0=-3,\ V_0=10$	Найти x при $V=12$
2	$sin(\pi t/2)$	6	$t=0,\ V_0=6,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$2/3V^2$	7	$t=0,\ x_0=1,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
		Вариант 11		
1	62	14	$t=0,\ x_0=-4,\ V_0=0$	Найти x при $V=12$
2	$2cos(\pi t/5)$	13	$t=0,\ V_0=8,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$2/5V$	10	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=1$	Найти закон движения точки
		Вариант 12		
1	18	16	$t=0,\ x_0=-2,\ V_0=9$	Найти x при $V=11$
2	$4sin(\pi t/2)$	11	$t=0,\ V_0=5,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/3V^2$	15	$t=0,\ x_0=4,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
		Вариант 13		
1	45	15	$t=0,\ x_0=-2,\ V_0=7$	Найти x при $V=14$
2	$15t^2+t$	9	$t=0,\ V_0=7,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/5V^3$	15	$t=0,\ x_0=4,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
		Вариант 14		
1	108	22	$t=0,\ x_0=-4,\ V_0=5$	Найти x при $V=6$
2	$5t^3+2t$	12	$t=0,\ V_0=12,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$2/3V$	15	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=2$	Найти закон движения точки
		Вариант 15		
1	27	7	$t=0,\ x_0=-1,\ V_0=6$	Найти x при $V=7$
2	$4cos(\pi t/4)$	10	$t=0,\ V_0=5,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/V^4$	5	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
		Вариант 16		
1	70	14	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=6$	Найти x при $V=12$
2	$4sin(\pi t/4)$	5	$t=0,\ V_0=0,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/3V^3$	20	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=0$	Найти закон движения точки

Окончание табл. 1.3

1	2	3	4	5
Вариант 17				
1	*54*	*9*	$t=0,\ x_0=-4,\ V_0=9$	Найти x при $V=13$
2	$4sins(\pi t/2)$	*7*	$t=0,\ V_0=9,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$1/3V^2$	*15*	$t=0,\ x_0=3,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
Вариант 18				
1	*30*	*10*	$t=0,\ x_0=-3,\ V_0=7$	Найти x при $V=8$
2	t^3-t	*15*	$t=0,\ V_0=7,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$9/5V$	*25*	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=3$	Найти закон движения точки
Вариант 19				
1	*70*	*14*	$t=0,\ x_0=0,\ V_0=5$	Найти x при $V=10$
2	$2t^2$-t	*20*	$t=0,\ V_0=7,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$2/5V^2$	*10*	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=0$	Найти закон движения точки
Вариант 20				
1	*32*	*8*	$t=0,\ x_0=-1,\ V_0=7$	Найти x при $V=6$
2	$3cos(\pi t)$	*16*	$t=0,\ V_0=9,\ x_0=0$	Найти закон движения точки
3	$3/V^3$	*10*	$t=0,\ x_0=2,\ V_0=0$	Найти закон движения точки

Пример выполнения задания 1.1

Дано. Точка движется прямолинейно под действием силы F, направленной вдоль прямой, по которой движется точка. Решить задачу в трех вариантах:

1. Определить перемещение точки вдоль оси x в момент времени, когда ее скорость будет равна $v=15$ *м/с*, если сила $F=25$ *Н* постоянная, масса $m=10$ *кг*, в начальный момент времени $x_0=3$ *м*, $v_0=9$ *м/с*.

2. Построить график перемещения точки, если сила $F=6cos(\pi t/3)$ является функцией времени, масса $m=6$ *кг*, в начальный момент времени $x_0=1$*м*, $v_0=5$*м/с*.

3. Найти закон движения точки, если сила $F=5/v^3$ является функцией скорости, масса $m=10$ *кг*, в начальный момент времени $x_0=0$ *м*, $v_0=3$ *м/с*.

Решение

1. Случай, когда сила, действующая на точку, постоянная

Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось $0x$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_x .$$

Заменим $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ на $\dfrac{dv_x}{dt}$ и подставим заданную силу:

$$m\frac{dv_x}{dt}=F.$$

Разделим переменные и решим дифференциальное уравнение:

$$dv_x=\frac{F}{m}dt,$$

$$\int dv_x=\int\frac{F}{m}dt,$$

$$v_x=\frac{F}{m}t+C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим, используя начальное условие: при $t=0$ $v_0=9$ *м/с*:

$$9=\frac{F}{m}\cdot 0+C_1 \Rightarrow C_1=9\text{м/с}.$$

Тогда проекция скорости на ось $0x$ будет иметь вид

$$v_x=\frac{F}{m}t+9.$$

Определим время, когда скорость точки будет равна $v=15$ *м/с*:

$$t=\frac{(v_x-9)m}{F}=\frac{(15-9)10}{25}=2{,}4c.$$

Заменим v_x на $\dfrac{dx}{dt}$ и решим полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{F}{m}t+9,$$

$$\int dx=\int\left(\frac{F}{m}t+9\right)dt,$$

$$x=\frac{F}{2m}t^2+9t+C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 определим, используя начальное условие при $t = 0$ $x_0 = 3$ *м*:

$$3=\frac{F}{2m}0^2+9\cdot 0+C_2 \Rightarrow C_2=3м.$$

После подстановки постоянной интегрирования в уравнение движения получим

$$x=\frac{F}{2m}t^2+9t+3.$$

Определим перемещение точки в момент времени $t = 2,4$ *с*:

$$x=\frac{25}{2\cdot 10}2{,}4^2+9\cdot 2{,}4+3=31{,}8\ м.$$

2. *Случай, когда сила, действующая на точку, зависит от времени*

В этом случае дифференциальное уравнение движения точки будет иметь вид:

$$m\frac{dv_x}{dt}=6\,cos\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

Разделим переменные и решим дифференциальное уравнение:

$$\int dv_x=\int\frac{6\,cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)}{m}dt,$$

$$v_x = \frac{18}{m\pi} sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + C_1$$

или подставляем численные значения:

$$v_x = 0{,}95 sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим, используя начальное условие при $t = 0$ $v_0 = 5$ *м/с*:

$$5 = 0{,}95 sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{3}\right) + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 5 м/с.$$

Подставляя постоянную интегрирования C_1, получим

$$v_x = 0{,}95 sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 5.$$

Заменим v_x на $\frac{dx}{dt}$ и решим полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\int dx = \int\left(0{,}95 sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 5\right)dt,$$

$$x = -\frac{2{,}85}{\pi} cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 5t + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 определим, используя начальное условие при $t = 0$ $x_0 = 1$ *м*:

$$1 = -\frac{2{,}85}{\pi} cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{3}\right) + 5 \cdot 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 1 + \frac{2{,}85}{\pi} = 1{,}9 м.$$

Подставляя постоянную интегрирования, получим уравнение движения точки в окончательном виде:

$$x = -0{,}9\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 5t + 1{,}9.$$

3. *Случай, когда сила, действующая на точку, зависит от скорости*

В этом случае дифференциальное уравнение движения точки будет иметь вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{5}{v^3}.$$

Разделим переменные и решим дифференциальное уравнение:

$$\int v_x^3 dv_x = \int \frac{5}{m}dt,$$

$$\frac{1}{4}v_x^4 = \frac{5}{m}t + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим, используя начальное условие при $t = 0$ $v_0 = 3$ *м/с*:

$$\frac{1}{4}3^4 = \frac{5}{m}\cdot 0 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 20{,}25 м/с.$$

Подставляя постоянную интегрирования C_1, получим

$$\frac{1}{4}v_x^4 = \frac{5}{m}t + 20{,}25.$$

Выразим из полученного уравнения проекцию скорости v_x:

$$v_x^4 = 2t + 81,$$

$$v_x = \sqrt[4]{2t+81}.$$

Заменим v_x на $\dfrac{dx}{dt}$ и решим полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\int dx = \int \left(\sqrt[4]{2t+81}\right) dt.$$

В правой части выражения под интегралом имеем степенную функцию. Беря интегралы, получим

$$x = \frac{2}{5}(2t+81)^{\frac{5}{4}} + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 определим, используя начальное условие при $t = 0$ $x_0 = 0$ *м*:

$$0 = \frac{2}{5}(2 \cdot 0 + 81)^{\frac{5}{4}} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -97{,}2\,м.$$

Подставляя постоянную интегрирования C_2, получим уравнение движения точки в окончательном виде:

$$x = \frac{2}{5}(2t+81)^{\frac{5}{4}} - 97{,}2.$$

Глава 2. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Введение в динамику механической системы

2.1.1. Механическая система материальных точек. Свойства внутренних сил системы

Механической системой материальных точек (тел) называется такая ее совокупность, при которой положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения или движения все остальных точек (тел).

Существование механической системы обусловлено наличием сил взаимодействия между точками (телами) системы. *Силы взаимодействия между точками (телами) данной системы* называются **внутренними силами** и обозначаются $\overline{F}^{i}$. А *силы взаимодействия между точками данной системы и точками или телами, не входящими в рассматриваемую систему*, называются **внешними силами** и обозначаются $\overline{F}^{e}$.

Свойства внутренних сил системы:

1. Главный вектор внутренних сил системы равен нулю.
2. Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю.

2.1.2. Масса системы. Центр масс системы

Движение системы кроме действующих сил зависит также от ее суммарной массы и распределения масс. Для системы, состоящей из материальных точек (тел), масса системы равна арифметической сумме масс всех точек системы $M = \Sigma m_k$.

Распределение масс в системе определяется значениями масс m_k ее точек и их взаимными положениями, т. е. их координатами $x_к$, $y_к$, $z_к$. Однако оказывается, что при решении тех задач динамики, в частности динамики твердого тела, для учета распределения масс достаточно знать не все величины m_k $x_к$, $y_к$, $z_к$, а некоторые, выражаемые через них, суммарные характеристики. Ими являются **координаты центра масс, осевые моменты инерции и центробежные моменты инерции**.

В однородном поле сил тяжести, для которого ускорения свободного падения тел одинаковы $g = 9{,}81$ *м/с*^{2}, вес тела пропорционален его массе $P = Mg$. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести, координаты которого определяются по формулам

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum p_k x_k}{P}, \\ y_C = \dfrac{\sum p_k y_k}{P}, \\ z_C = \dfrac{\sum p_k z_k}{P}. \end{cases}$$

Преобразуем выражения, определяющие координаты центра тяжести тела, к виду, явно содержащему массу. Для этого произведем замену: $p_k = m_k g$ и $P = Mg$, после чего, сократив на g, найдем

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_k x_k}{M}, \\ y_C = \dfrac{\sum m_k y_k}{M}, \\ z_C = \dfrac{\sum m_k z_k}{M}. \end{cases} \tag{2.1}$$

В полученные равенства входят теперь массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты $x_к$, $y_к$, $z_к$ этих точек. Следовательно, положение точки C ($x_к$, $y_к$, $z_к$) действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе.

Точка C, координаты которой определяются формулами (2.1), называется **центром масс или центром инерции механической системы**.

Если положение центра масс определяется радиусом-вектором r_c, то с учетом формулы (2.1) будем иметь

$$r_C = \frac{\sum m_k r_k}{M}, \tag{2.2}$$

где r_k – радиусы-векторы точек, образующих систему.

Из полученных результатов следует, что для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают. Но в отличие от центра тяжести понятие о центре масс сохраняет свой смысл для тела, находящегося в любом силовом поле (например в центральном поле тяготения) и, кроме того, как характеристика распределения масс имеет смысл не только для твердого тела, но и для любой механической системы.

2.1.3. Инерционные характеристики механической системы (тела). Момент инерции твердого тела относительно оси

Ранее рассматривалось такое понятие, как инертность. Количественной мерой инертности механической системы (тела), движущейся поступательно, является масса. При вращательном движении тела (системы) инертность определяется физической величиной, называемой **моментом инерции**.

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси *Oz* (или **осевым моментом инерции**) называется *скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадрат их расстояний до этой оси*:

$$I_z = \sum m_k h_k^2. \tag{2.3}$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной скалярной, положительной и не равной нулю.

Единица измерения момента инерции в системе СИ: *1 кг·м*^{2}.

Если расстояния точек до осей координат выразить через координаты x_k, y_k, z_k этих точек, то квадрат расстояния точки до оси *Ox* можно представить в виде $h_k^2 = y_k^2 + z_k^2$ и т. д.

Тогда для вычисления моментов инерции относительно осей координат можно пользоваться следующими формулами:

$$I_x = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right), \quad I_y = \sum m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right), \quad I_z = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right). \tag{2.4}$$

В технических расчетах для определения моментов инерции тел, имеющих сложную конфигурацию, используют радиусы инерции этих тел:

$$I_z = Mi^2, \tag{2.5}$$

где M – масса тела;

i – радиус инерции – *расстояние от оси вращения, на котором необходимо разместить массу тела, чтобы момент инерции размещенной массы равнялся моменту инерции тела относительно этой оси, м*.

Для сложных тел, для которых момент инерции математически выразить затруднительно, определяется и задается именно радиус инерции.

Момент инерции тела относительно оси проходящей через его центр масс (центральной оси) всегда наименьший.

Формулы (2.3) и (2.4) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (2.3), обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm=\rho dV$, где ρ – плотность, а V – объем, получим

$$I_z = \int_V h^2 dm$$

или

$$I_z = \int_V \rho h^2 dV. \tag{2.6}$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность и расстояние зависят от координат точек тела. Аналогично формулы (2.4) для сплошных тел примут вид

$$I_x = \int_V \rho\left(y^2 + z^2\right)dV. \tag{2.7}$$

Формулами (2.6) и (2.7) удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При этом плотность будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

Теорема Гюйгенса – Штейнера

Момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр его масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между этими осями:

$$I_z = I_{z1} + md^2, \qquad (2.8)$$

где I_{z1} – момент инерции относительно оси z_1, проходящей через центр масс C (рис. 2.1).

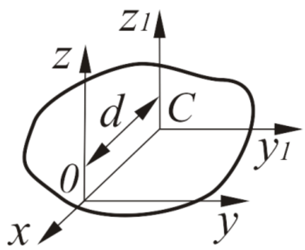
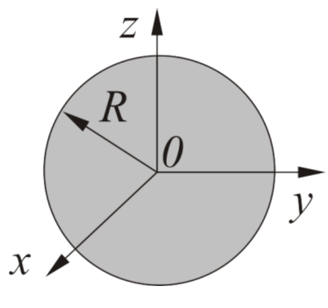


Рисунок 2.1 – Момент инерции относительно параллельных осей

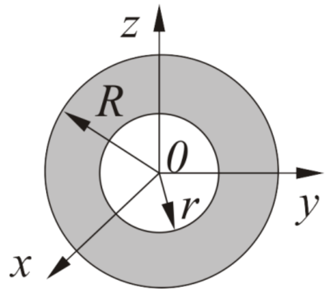
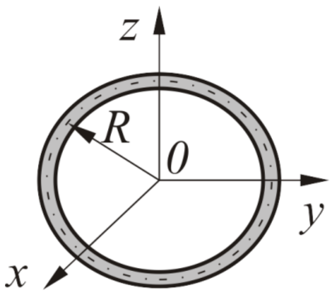
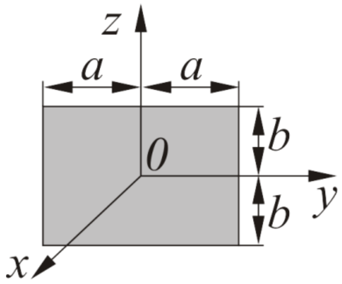
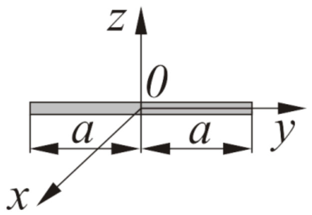
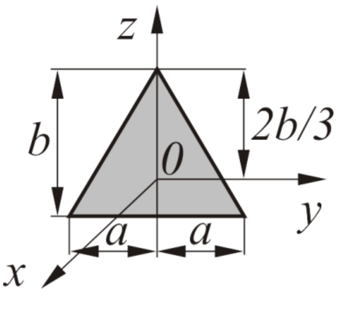
2.1.4. Моменты инерции некоторых однородных тел

В таблице 2.1 приведены формулы для вычисления осевых моментов инерции однородных тел, наиболее часто встречаемых в инженерных расчетах.

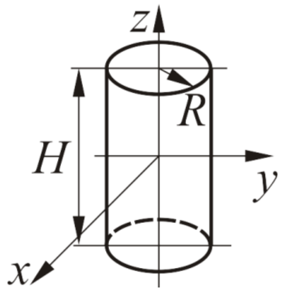
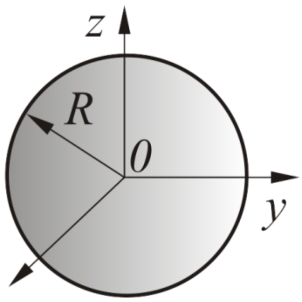
Таблица 2.1 – Осевые моменты инерции однородных тел

Наименование тела	Схема	I_x	I_y	I_z
1	2	3	4	5
Круглая пластина		$\dfrac{mR^2}{2}$	$\dfrac{mR^2}{4}$	$\dfrac{mR^2}{4}$

Продолжение табл. 2.1

1	2	3	4	5
Круглое кольцо		$\dfrac{m(R+r)^2}{2}$	$\dfrac{m(R+r)^2}{4}$	$\dfrac{m(R+r)^2}{4}$
Тонкостенное кольцо		$\dfrac{1}{2}mR^2$	$\dfrac{1}{2}mR^2$	mR^2
Прямоугольная пластина		$\dfrac{m(a^2+b^2)}{3}$	$\dfrac{mb^2}{3}$	$\dfrac{ma^2}{3}$
Прямой стержень		$\dfrac{ma^2}{3}$	0	$\dfrac{ma^2}{3}$
Треугольная пластина		$\dfrac{m(3a^2+b^2)}{18}$	$\dfrac{mb^2}{18}$	$\dfrac{ma^2}{6}$

Окончание табл. 2.1

1	2	3	4	5
Цилиндр		$m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right)$	$m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right)$	$m\frac{R^2}{2}$
Шар		$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$

Пример 2.1. Определим осевой момент инерции стержня относительно оси z_1 (рис. 2.2) , применив теорему Гюйгенса:

$$I_{z1}=I_{zC}+ma^2=\frac{ma^2}{3}+ma^2=\frac{4}{3}ma^2 .$$

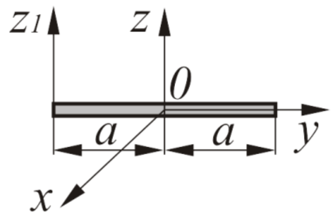


Рисунок 2.2 – Определение осевого момента однородного стержня

2.1.5. Центробежные моменты инерции. Понятие о главных осях инерции тела

В механике в качестве характеристик, учитывающих асимметрию в распределении масс, вводят так называемые центробежные моменты инерции. Если через точку *O* провести координатные оси *Oxyz*, то по отношению к этим осям центробежными моментами инерции называют величины I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, определяемые равенствами

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \\ I_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \\ I_{zx} = \sum m_k z_k x_k. \end{cases} \tag{2.9}$$

Для сплошных тел формулы (2.9) принимают вид

$$\begin{cases} I_{xy} = \int\limits_V \rho xy dV, \\ I_{yz} = \int\limits_V \rho yz dV, \\ I_{zx} = \int\limits_V \rho zx dV. \end{cases} \tag{2.10}$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и в частности при определенным образом выбранных осях *Oxyz* могут обращаться в ноль.

Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии. Проведем координатные оси *Oxyz* так, чтобы ось *Oz* была направлена вдоль оси симметрии. Тогда в силу симметрии каждой точке тела с массой $m_к$ и координатами ($x_к$, $y_к$, $z_к$) будет соответствовать точка с другим индексом, но с такой же массой и с координатами, равными ($–x_к$, $–y_к$, $z_к$). В результате получим, что $\sum m_k x_k z_k = 0$ и $\sum m_k y_k z_k = 0$, так как в этих суммах все слагаемые попарно одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Отсюда, учитывая равенства (2.9), находим

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0.$$

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно оси *Oz* характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции I_{xz} и I_{yz}. Ось *Oz*, для которой центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется **главной осью инерции тела для точки *O***.

Из изложенного следует, что ***если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки***.

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются **главными моментами инерции тела**.

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют **главными центральными осями инерции тела**. Из доказанного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси.

2.2. Общие теоремы динамики механической системы

При исследовании движения механической системы, состоящей из множества точек, нет необходимости исследовать движение каждой точки в отдельности. Во многих случаях достаточно определить некоторые суммарные характеристики движения системы. Эти суммарные характеристики движения можно определить с помощью общих теорем динамики системы.

2.2.1. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим систему, состоящую из *n* материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой $m_к$. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке *внешних сил* (и активных, и реакций связей) через $\overline{F}_k^e$, а равнодействующую всех *внутренних сил* – через $\overline{F}_k^i$. Если точка имеет при этом ускорение $a_к$, то по основному закону динамики

$$m_k\overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы это будет

$$\begin{cases} m_1\overline{a}_1 = \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i, \\ m_2\overline{a}_2 = \overline{F}_2^e + \overline{F}_2^i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\overline{a}_n = \overline{F}_n^e + \overline{F}_n^i. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Уравнения (2.11) представляют собой **дифференциальные уравнения движения системы** в векторной форме. Входящие в правые части уравнений силы могут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя равенства (2.11) на какие-нибудь координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы будет состоять в том, чтобы, зная заданные силы и наложенные связи, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить в результате закон движения каждой из точек системы и реакции связей. Сделать это аналитически удается лишь в отдельных случаях, когда число точек системы невелико, или же интегрируя уравнения численно.

Однако при решении конкретных задач необходимость находить закон движения каждой из точек системы не возникает, а бывает достаточно найти какие-то характеристики, определяющие движение системы в целом. Например, чтобы установить, как движется под действием приложенных сил кривошипно-ползунный механизм, достаточно определить закон вращения кривошипа, т. е. найти зависимость угла его поворота от времени. Обычно для отыскания подобных решений уравнения (2.11) непосредственно не применяют, а применяют другие, разработанные в динамике методы. К их числу относятся методы, которые дают широко используемые в инженерной практике **общие теоремы динамики системы**, получаемые как следствия уравнений (2.11).

2.2.2. Теорема о движении центра масс системы

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) требуется знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы (2.11) и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i . \qquad (2.12)$$

Так как сумма внутренних сил системы $\sum \bar{F}_k^i = 0$, то

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e . \tag{2.13}$$

Преобразуем левую часть уравнения (2.13).

Так как

$$\bar{a}_k = \sum \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2},$$

то $\sum m_k \bar{a}_k = \sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum (m_k \bar{r}_k) = \frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C) = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = M \bar{a}_C .$

Тогда

$$M \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e . \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) выражает **теорему о движении центра масс системы**: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*. Сравнивая уравнение (2.14) с уравнением движения материальной точки, придем к другому выражению теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Проектируя обе части равенства (2.14) на координатные оси, получим

$$\begin{cases} M \dfrac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{kx}^e , \\ M \dfrac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{ky}^e , \\ M \dfrac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum \bar{F}_{kz}^e . \end{cases} \tag{2.15}$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на координатные оси.

Основной смысл теоремы состоит в следующем:

1. Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений (2.15) видно, что решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела, т. е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, *поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела*. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс и допустимо по условиям решаемой задачи не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

2. Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Пример 2.2. Электрический мотор массой m_1 прикреплен к фундаменту болтами (рис. 2.3). Масса ротора равна m_2, а его центр масс C_2 смещен относительно оси вращения на расстояние $OC_2 = a$. Ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Определить наибольшее суммарное вертикальное давление мотора на фундамент и наибольшее суммарное горизонтальное усилие на болты крепления.

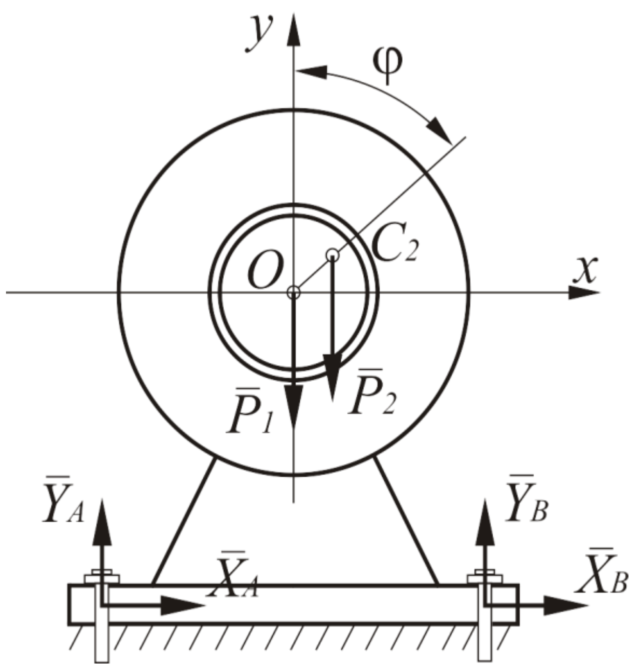


Рисунок 2.3 – Расчетная схема к примеру 2.2

Решение. В данном случае механическая система состоит из двух тел: корпуса мотора и ротора. Внешними силами, действующими на систему, являются: вес корпуса мотора $P_1 = m_1g$, вес ротора $P_2 = m_2g$, реакции в болтах крепления мотора.

Для решения задачи применим теорему о движении центра масс системы в координатной форме:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = X_A + X_B, \\ M\dfrac{d^2y_C}{dt^2} = Y_A + Y_B - P_1 - P_2, \end{cases}$$

где X_A и X_B – горизонтальные реакции в болтах;

Y_A и Y_B – вертикальные реакции в болтах.

Найдем координаты центра масс системы:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_k x_k}{M} = \dfrac{m_1x_0 + m_2x_{C2}}{M}, \\ y_C = \dfrac{\sum m_k y_k}{M} = \dfrac{m_1y_0 + m_2y_{C2}}{M}, \end{cases}$$

где x_0 и y_0 – координаты центра масс корпуса мотора;

x_{C2} и y_{C2} – координаты центра масс ротора.

Учитывая, что $x_0 = y_0 = 0$, $x_{C2} = a\,sin\varphi$, $y_{C2} = a\,cos\varphi$, будем иметь

$$\begin{cases} Mx_C = m_2a\,sin(\varphi), \\ My_C = m_2a\,cos(\varphi). \end{cases}$$

Для того чтобы подставить полученные выражения в дифференциальные уравнения движения, найдем первую и вторую производную по времени от левой и правой части системы уравнений:

$$\begin{cases} M\dfrac{x_C}{dt} = \dfrac{m_2a\,sin(\varphi)}{dt}, \\ M\dfrac{y_C}{dt} = \dfrac{m_2a\,cos(\varphi)}{dt}. \end{cases}$$

Умножим правые части полученных выражений на $\frac{d\varphi}{d\varphi}$:

$$\begin{cases} M\dfrac{x_C}{dt} = \dfrac{m_2 a\, sin(\varphi)}{dt}\dfrac{d\varphi}{d\varphi}, \\ M\dfrac{y_C}{dt} = \dfrac{m_2 a\, cos(\varphi)}{dt}\dfrac{d\varphi}{d\varphi}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, получим

$$\begin{cases} M\dfrac{dx_C}{dt} = m_2 a\omega\, cos(\varphi), \\ M\dfrac{dy_C}{dt} = -m_2 a\omega\, sin(\varphi). \end{cases}$$

Взяв еще раз производную по времени и умножив на $\frac{d\varphi}{d\varphi}$, получим

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2 x_C}{dt^2} = -m_2 a\omega^2\, sin(\varphi), \\ M\dfrac{d^2 y_C}{dt^2} = -m_2 a\omega^2\, cos(\varphi). \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения в дифференциальные уравнения движения системы, будем иметь

$$\begin{cases} -m_2 a\omega^2\, sin(\varphi) = X_A + X_B, \\ -m_2 a\omega^2\, cos(\varphi) + P_1 + P_2 = Y_A + Y_B. \end{cases}$$

Таким образом, из полученных уравнений следует, что максимальная суммарная вертикальная реакция на болты будет при угле $\varphi = 180°$, т. е. когда $cos\varphi = -1$:

$$Y_A + Y_B = m_2 a \omega^2 + P_1 + P_2,$$

а максимальная суммарная горизонтальная реакция на болты будет при угле $\varphi = 90°$, т. е. когда $sin\varphi = 1$:

$$X_A + X_B = m_2 a \omega^2.$$

2.2.3. Закон сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс получим следующие следствия:

1. ***Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то центр масс находится в покое или движется прямолинейно и равномерно***.

Заметим, что ***если скорость центра масс в начальный момент времени была равна нулю, то центр масс останется в покое***, в противном случае центр масс будет двигаться прямолинейно и равномерно с начальной скоростью.

2. ***Если проекция внешних сил на какую-либо неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось есть величина постоянная.***

Если $\sum \overline{F}_k^e = 0$, то $M\dfrac{dv_{Cx}}{dt} = 0$, т. е. $v_{Cx} = const$.

В частности, *если в начальный момент времени $v_{Cx0} = 0$, то и в любой последующий момент времени $v_{Cx} = 0$, следовательно, $x_C = const$, т. е. центр масс системы вдоль оси Ох перемещаться не будет.*

Все эти результаты выражают собой **закон сохранения движения центра масс системы**.

Пример 2.3. Дана механическая система, состоящая из ползуна *1* весом G и точечного груза *2* весом P, соединенных невесомым стержнем (рис. 2.4).

Сравните горизонтальные координаты центров масс механической системы, перемещающейся без начальной скорости, в положениях а и б.

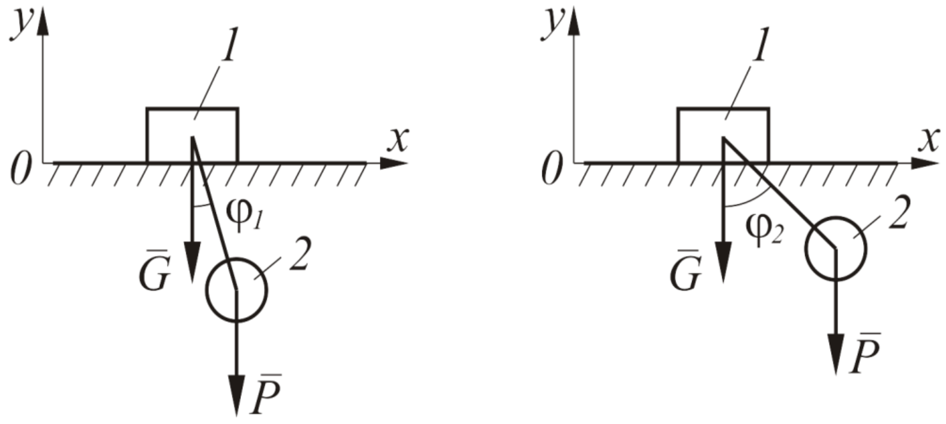


Рисунок 2.4 – Расчетная схема к примеру 2.3

Решение. Так как проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю, то скорость центра масс – величина постоянная. По условию задачи $v_{C0} = 0$, следовательно, $x_C = const$.

Пример 2.4. Электрический двигатель *1* массой m_1 установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте (рис. 2.5). На валу двигателя установлен однородный стержень *2* массой m_2 и длиной $2l$, несущий на конце точечный груз *3* массой m_3. Вал вращается равномерно с угловой скоростью ω. В начальный момент времени двигатель неподвижен и стержень находится в горизонтальном положении. Определить: 1) уравнение движения двигателя, пренебрегая трением; 2) давление двигателя на фундамент; 3) угловую скорость вала, при которой двигатель будет отрываться от фундамента.

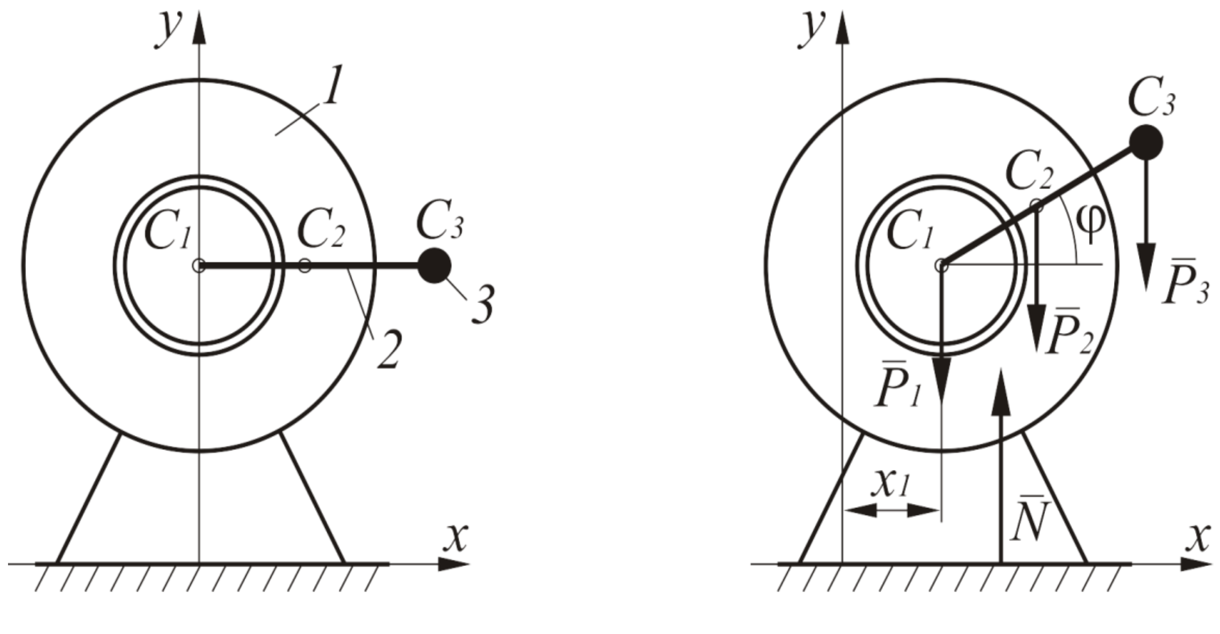


Рисунок 2.5 – Расчетная схема к примеру 2.4

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из двигателя, стержня и груза в системе отсчета, связанной с фундаментом. Для этого проведем ось Oy через центр тяжести двигателя (точка C_1) в его начальном положении.

Изобразим систему в произвольный момент времени. Ее положение задается координатой x_1 центра тяжести двигателя и углом φ, задающего положение стержня относительно оси Oy.

2. Внешними силами для системы являются силы тяжести P_1, P_2, P_3 и N – суммарная реакция опоры (гладкой поверхности). Обозначим суммарную силу тяжести $P = P_1 + P_2 + P_3$, причем $P = (m_1 + m_2 + m_3)g = Mg$, где M – масса системы.

3. По теореме о движении центра масс $M\bar{a}_C = \bar{R}^e$, записанной в проекциях на оси координат, имеем

$$\begin{cases} M\dfrac{dv_{Cx}}{dt} = 0, \\ M\dfrac{dv_{Cy}}{dt} = N - P. \end{cases} \tag{1}$$

Интегрируя первое уравнение системы (1), получим

$$v_{Cx} = C_1, \quad x_C = C_1 t + C_2. \tag{2}$$

Определим положение центр масс всей системы по оси x:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}. \tag{3}$$

При $t = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = l$, $x_3 = 2l$. Следовательно,

$$x_{C0} = \frac{l(m_2 + 2m_3)}{M}.$$

Определим проекцию скорости центра масс на ось Ox как первую производную от координаты x_C:

$$\frac{dx_C}{dt}=\frac{m_1\frac{dx_1}{dt}+m_2\frac{dx_2}{dt}+m_3\frac{dx_3}{dt}}{M},$$

или

$$v_{Cx}=\frac{m_1v_{1x}+m_2v_{2x}+m_3v_{3x}}{M}. \tag{4}$$

При $t = 0$ $v_{1x} = 0$, так как двигатель неподвижен; $v_{2x} = v_{3x} = 0$, так как скорости центров тяжестей стержня и груза в начальный момент вертикальны (стержень в горизонтальном положении), а значит их проекции на ось Ox равны нулю. Следовательно,

$$v_{Cx} = C_1 = 0,$$

$$x_C = C_2.$$

Таким образом, получили, что ***положение по оси Ox центра тяжести системы не меняется***.

Уравнение движения центра тяжести двигателя по оси Ox получим из соотношения

$$x_C(t)=x_C(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{M}=\frac{l(m_2+2m_3)}{M},$$

где $x_2 = l\cos\varphi + x_1$; $x_3 = 2l\cos\varphi + x_1$, откуда

$$x_1=\frac{l(m_2+2m_3)}{M}(1-\cos\varphi).$$

4. Давление мотора на фундамент по величине равно реакции N опорной поверхности, которую найдем из второго дифференциального уравнения движения центра масс системы (1):

$$M\frac{dv_{Cy}}{dt}=N-P \qquad \Rightarrow \qquad N=P+M\frac{dv_{Cy}}{dt}. \tag{5}$$

Вычислим координату y_C центра масс системы:

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M}, \tag{6}$$

где $y_1 = const$; $y_2 = l\sin\varphi + y_1$; $y_3 = 2l\sin\varphi + y_1$.

Подставляя y_1, y_2, y_3 в формулу (6), получаем

$$y_C = y_1 + \frac{l(m_2 + 2m_3)}{M}\sin\varphi, \tag{7}$$

где $\varphi = \omega t$.

Дифференцируя дважды по времени выражение (7), получим

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = -\frac{l(m_2 + 2m_3)}{M}\omega^2 \sin\varphi. \tag{8}$$

Введя обозначение $A = \frac{l(m_2 + 2m_3)}{M}$, в окончательном виде будем иметь

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\varphi. \tag{9}$$

Реакцию поверхности определим из выражения (5) с учетом выражения (8):

$$N = P - l\omega^2(m_2 + 2m_3)\sin\varphi.$$

Давление двигателя на фундамент меняется в процессе движения и зависит от угла φ. Максимальное давление будет при $\sin\varphi = -1$, т. е. при $\varphi = 3\pi/2 = 270°$:

$$N_{max} = P + l\omega^2(m_2 + 2m_3).$$

Минимальное давление будет при $\sin\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = \pi/2 = 90°$:

$$N_{min} = P - l\omega^2(m_2 + 2m_3).$$

Давление на фундамент, как и реакция N, зависит от угловой скорости вала (ротора). При некоторых значениях ω минимальное давление может быть равным нулю. В этом случае мотор не будет давить на опору и начнет отрываться от опоры. Очевидно, это будет при $N_{min} \le 0$, т. е.

$$P - l\omega^2 (m_2 + 2m_3) \le 0.$$

Это возможно, когда угловая скорость имеет значение

$$\omega \ge \sqrt{\frac{P}{l(m_2 + 2m_3)}}.$$

2.2.4. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения системы $\overline{Q}$ называют векторную сумму количеств движения всех точек системы:

$$\overline{Q} = \sum m_k \bar{v}_k.$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum (m_k \bar{r}_k) = \frac{d}{dt} (M\bar{r}_C) = M\bar{v}_C.$$

Количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\overline{Q} = M\bar{v}_C. \tag{2.16}$$

Из формулы (2.16) видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина количества движения не будет зависеть от его вращательного движения вокруг центра масс.

Например, для катящегося колеса $\overline{Q} = M\overline{v}_C$ независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс C.

Таким образом, *количество движения можно рассматривать как характеристику поступательного движения системы (тела), а при сложном движении – как характеристику поступательной части движения вместе с центром масс*.

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\sum m_k \overline{a}_k = \sum \overline{F}_k^e .$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\sum m_k \overline{a}_k = \sum m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \overline{v}_k \text{, так как } \sum m_k \overline{v}_k = \overline{Q} .$$

Получаем

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e . \tag{2.17}$$

Полученная формула является выражением **теоремы об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме**: *производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*.

В проекциях на координатные оси выражение (2.17) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum \overline{F}_{kx}^e, \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum \overline{F}_{ky}^e, \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = \sum \overline{F}_{kz}^e. \end{cases} \tag{2.18}$$

Разделим переменные и проинтегрируем систему уравнений (2.17):

$$\int d\overline{Q} = \sum \int \overline{F}_k^e dt,$$

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k. \quad (2.19)$$

Полученная формула (2.19) является выражением **теоремы об изменении количества движения механической системы в интегральной форме**: *изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени*.

В проекциях на координатные оси выражение (2.19) будет иметь вид

$$\begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}, \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}, \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Пример 2.5. Подкрановая тележка массой *M = 1т* движется по рельсам со скоростью *1 м/с* (рис. 2.6). Определить время торможения тележки, если коэффициент трения колес о рельсы равен *f = 0,2*. Массой колес пренебречь.

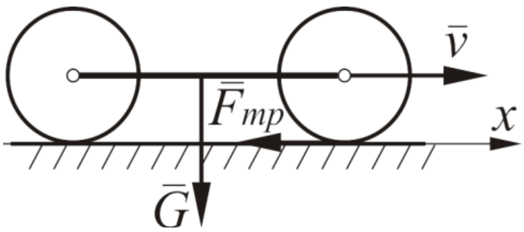


Рисунок 2.6 – Расчетная схема к примеру 2.5

Решение. Согласно теореме об изменении количества движения системы в интегральной форме

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k,$$

где $\overline{Q}_0 = M\overline{v}_0$ – количество движения тележки в начале торможения;

$\overline{Q}_1$ – количество движения тележки в конце торможения: $\overline{Q}_1 = 0$, так как $v_1 = 0$.

Поскольку сила трения скольжения является величиной постоянной и равной

$$F_{тр} = f\,N = f\,M\,g,$$

то импульс силы трения скольжения равен $S = -\,F_{тр}\,t = -f\,M\,g\,t$.

Спроецировав исходное уравнение на горизонтальную ось, получим

$$0 - Mv_0 = -fMgt,$$

$$t = \frac{v_0}{gf} = 0{,}51c.$$

Пример 2.6. Электрический мотор массой m_1 прикреплен к фундаменту болтами (рис. 2.7). Масса ротора равна m_2, а его центр масс C_2 смещен относительно оси вращения на расстояние $OC_2 = a$. Ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Определить наибольшее суммарное вертикальное давление мотора на фундамент и наибольшее суммарное горизонтальное усилие на болты крепления.

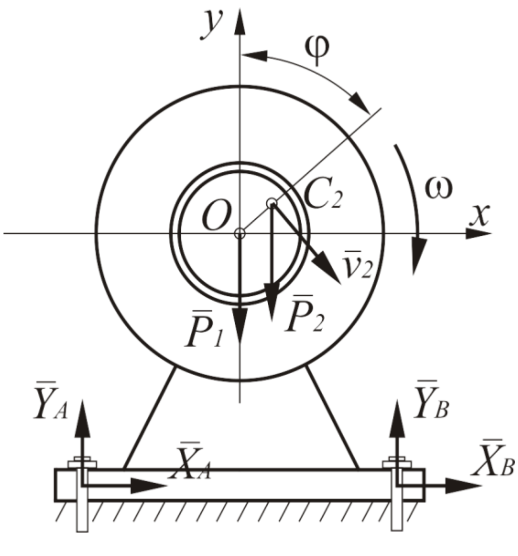


Рисунок 2.7 – Расчетная схема к примеру 2.6

Эта задача была решена в п. 2.2.2 при помощи теоремы о движении центра масс системы. Теперь решим эту же задачу при помощи теоремы об изменении количества движения системы.

Количество движения данной системы равно

$$\overline{Q} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2,$$

где $\overline{Q}_1 = 0$ – количество движения неподвижного мотора;

$\overline{Q}_2 = m_2 \overline{v}_2$ – количество движения ротора.

Следовательно,

$$\overline{Q} = \overline{Q}_2 = m_2 \overline{v}_2.$$

Так как ротор совершает вращательное движение, скорость его центра масс C_2

$$v_2 = a\omega.$$

Определим проекции количества движения системы на координатные оси:

$$\begin{cases} Q_x = Q_{2x} = m_2 v_{2x}, \\ Q_y = Q_{2y} = m_2 v_{2y}, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} v_{2x} = a\omega cos\varphi, \\ v_{2y} = -a\omega sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} Q_x = Q_{2x} = m_2 a\omega cos\varphi, \\ Q_y = Q_{2y} = -m_2 a\omega sin\varphi. \end{cases}$$

Применим теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме, записанной в проекциях на координатные оси:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum \overline{F}^e_{kx}, \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum \overline{F}^e_{ky}. \end{cases}$$

Найдем производные от Q_x и Q_y по времени. Для этого произведя замену переменных $\varphi = \omega t$, будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = m_2 a\omega \dfrac{d\cos(\omega t)}{dt} = -m_2 a\omega^2 \sin(\omega t) = -m_2 a\omega^2 \sin\varphi, \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = -m_2 a\omega \dfrac{d\sin(\omega t)}{dt} = -m_2 a\omega^2 \cos(\omega t) = -m_2 a\omega^2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Подставив полученные производные в теорему об изменении количества движения системы, будем иметь

$$\begin{cases} X_A + X_B = -m_2 a\omega^2 \sin\varphi, \\ Y_A + Y_B = P_1 + P_2 - m_2 a\omega^2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили те же результаты, что и при решении этой задачи при помощи теоремы о движении центра масс системы.

Закон сохранения количества движения

Из теоремы об изменении количества движения получим следующее:

1. ***Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то количество движения системы постоянно по величине и направлению***.

Уравнение $\dfrac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}^e_k$ можно представить как $\dfrac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e$, если $\overline{R}^e = 0$, то $\dfrac{d\overline{Q}}{dt} = 0$, т. е. $\overline{Q} = MvV_C = const$.

2. ***Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на эту ось есть величина постоянная***.

Если $\overline{R}_x^e = 0$, то $\dfrac{dQ_x}{dt} = 0$, т. е. $Q_x = Mv_{Cx} = const$.

Примерами закона сохранения количества движения являются отдача ружья при выстреле (откат орудия), реактивное движение.

Закон сохранения количества движения удобно применять в тех случаях, когда по изменению поступательной скорости одной части системы надо определить скорость другой части. В частности, этот закон широко используется в теории удара.

Пример 2.7. Трактор весом $m_1 = 1{,}5$ *т* начинает движение с постоянной скоростью $v_0 = 1{,}5$ *м/с*. После того как буксирующий канат, соединенный с трактором, натянулся, трактор приводит в движение буксируемый прицеп весом $m_2 = 0{,}8$ *т*. Найти общую скорость v_1 трактора с прицепом, если движущая сила и сила сопротивления почвы уравновешиваются.

Решение. Так как движущая сила и сила сопротивления почвы уравновешенны, то сумма проекций внешних сил на ось *Ox* равна нулю: $\sum \overline{F}_k^e = 0$. Следовательно, по закону о сохранении количества движения системы количество движения системы, состоящей из трактора и прицепа, постоянно:

$$Q_{x1} = Q_{x0},$$

где $Q_{x0} = m_1 v_0$ – количество движения трактора;

$Q_{x1} = (m_1 + m_2)v_1$ – количество движения трактора с прицепом.

Тогда

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v_1.$$

Отсюда определим скорость трактора с прицепом:

$$v_1 = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}5}{1{,}5 + 0{,}8} = 0{,}98 м/с.$$

2.2.5. Теорема об изменении главного момента количества движения (кинетического момента) системы относительно оси

Главным моментом количества движения системы относительно данного центра называется *вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра*:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{m}_O(m_k \bar{v}_k). \tag{2.21}$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$\begin{cases} K_x = \sum m_x(m_k \bar{v}_k), \\ K_y = \sum m_y(m_k \bar{v}_k), \\ K_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k). \end{cases} \tag{2.22}$$

Главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом системы) относительно оси называется *алгебраическая величина, равная сумме моментов количеств движения точек системы относительно этой оси*.

При этом K_x, K_y, K_z представляют собой одновременно проекции вектора K_O на координатные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой поступательного движения, *главный момент количества движения системы является характеристикой вращательного движения системы*.

Определим момент количества движения тела, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси Oz.

Для любой k-й точки системы ее линейная скорость равна $v_k = \omega h_k$, где h_k – расстояние от точки до оси вращения (рис. 2.8). Тогда кинетический момент вращающегося тела

$$K_z = \sum m_k(m_k \bar{v}_k) = \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega.$$

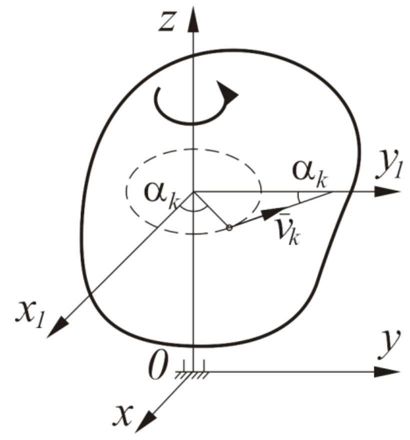


Рисунок 2.8 – Определение кинетического момента системы

Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси Oz. Окончательно получим

$$K_z = I_z\omega. \tag{2.23}$$

Таким образом, **кинетический момент тела**, **вращающегося относительно оси вращения**, *равен произведению момента инерции относительно оси вращения на угловую скорость тела*.

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то

$$K_z = I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 + \ldots + I_{nz}\omega_n. \tag{2.24}$$

Определим теперь величину K_x и K_y. Для определения $K_x = m_x(m_k v_k)$ надо, по аналогии с моментом силы относительно оси, спроецировать вектор $m_k v_k$ на плоскость Oyz, т. е. на ось y_1 и взять момент этой проекции относительно точки O. Тогда получим

$$K_x = m_x(m_k v_k) = -(\,m_k v_k\, cos\alpha_k)z_k,$$

где $v_k\, cos\alpha_k = \omega h_k\, cos\alpha_k = \omega x_k$ (рис. 2.8).

Выносим общий множитель ω за скобки, получим

$$K_x = \sum m_x(m_k v_k) = -\left(\sum m_k x_k z_k\right)\omega.$$

Сумма, стоящая в скобках, представляет собой центробежный момент инерции I_{xz}. Аналогичное выражение получится для K_y, где всюду вместо $x_к$ войдет $y_к$. Окончательно будем иметь

$$K_x = -I_{xz}\omega, \quad K_y = -I_{yz}\omega. \tag{2.25}$$

Таким образом, кинетический момент вращающегося тела относительно центра O, лежащего на оси вращения Oz, представляет собой вектор K_O , проекции которого на оси $Oxyz$ определяются формулами (2.23) и (2.25). В общем случае, как видим, вектор K_O не направлен по оси вращения Oz. Но если ось Oz будет для точки O главной осью инерции тела (в частности осью симметрии), то $I_{xz} = I_{yz}=0$.

При этом $K_x = K_y = 0$ и $K_O = K_z$. Следовательно, если тело вращается вокруг оси, являющейся для точки O главной осью инерции тела (или вокруг оси симметрии тела), то вектор K_O направлен вдоль оси вращения и численно равен $K_z = I_z\omega$.

2.2.6. Теорема об изменении главного момента количества движения системы относительно центра

Теорема моментов количества движения, доказанная для одной материальной точки, будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой $m_к$, имеющую скорость $v_к$, то для этой точки будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(m_O\left(m_k\bar{v}_k\right)\right) = \bar{m}_o\left(\bar{F}_k^e\right) + \bar{m}_o\left(\bar{F}_k^i\right),$$

где $\bar{F}_k^e$, $\bar{F}_k^i$ – равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\frac{d}{dt}\sum m_O\left(m_k\bar{v}_k\right) = \sum\bar{m}_o\left(\bar{F}_k^e\right) + \sum\bar{m}_o\left(\bar{F}_k^i\right).$$

Так как сумма внутренних сил равна нулю, то окончательно будем иметь

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^e\right). \tag{2.26}$$

Полученное уравнение математически описывает **теорему об изменении кинетического момента системы относительно некоторого центра**: *производная по времени от кинетического момента системы, взятого относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра*.

Спроецировав последнее векторное равенство на некоторую неподвижную ось, получим выражение **теоремы об изменении кинетического момента системы относительно этой оси**:

$$\begin{cases} \dfrac{dK_x}{dt} = \sum m_x\left(\overline{F}_k^e\right), \\ \dfrac{dK_y}{dt} = \sum m_y\left(\overline{F}_k^e\right), \\ \dfrac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right). \end{cases} \tag{2.27}$$

Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторой неподвижной оси равна главному моменту всех действующих на систему внешних сил относительно этой же оси.

Как известно, если тело вращается вокруг неподвижной оси *Oz*, то $K_z = I_z\omega$, тогда

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d\left(I_z\omega\right)}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\varepsilon. \tag{2.28}$$

Окончательно получим

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right), \tag{2.29}$$

или

$$I_z \varepsilon = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right). \qquad (2.30)$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на производную по времени от угловой скорости его вращения равно сумме моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно той же оси.

Из выражения видно, что момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса тела при поступательном движении, т. е. является мерой инертности тела.

Пример 2.8. Часовой балансир может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести O, имея относительно этой оси момент инерции I. Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов (рис. 2.9). При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины M, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан, равен c. Определить угол поворота балансира, при котором произойдет его остановка. В начальный момент при отсутствии сил упругости балансиру сообщили начальную угловую скорость ω_0.

Рисунок 2.9 – Расчетная схема к примеру 2.8

Решение. Согласно теореме об изменении кинетического момента системы:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e,$$

где

$$K_z = I_z \cdot \omega,$$

тогда
$$I_z\frac{d\omega}{dt}=M\ ,$$
где M – момент сил упругости пружины, равный $M = -c\varphi$.

Произведем замену переменной:

$$I_z\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi}=-c\cdot\varphi,$$

$$I_z\frac{d\varphi}{dt}d\omega=-c\cdot\varphi\cdot d\varphi,$$

$$I_z\cdot\omega\cdot d\omega=-c\cdot\varphi\cdot d\varphi.$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$I_z\frac{\omega^2}{2}=-c\cdot\frac{\varphi^2}{2}+C_1.$$

Из начальных условий находим постоянную интегрирования C_1.

При $t = 0$ $\varphi_0 = 0$, $\omega = \omega_0$, отсюда $C_1=I_z\frac{\omega_0^2}{2}$, тогда

$$I_z\frac{\omega^2}{2}=-c\cdot\frac{\varphi^2}{2}+I_z\frac{\omega_0^2}{2}.$$

При остановке балансира $\omega = 0$, следовательно

$$0=-c\cdot\frac{\varphi^2}{2}+I_z\frac{\omega_0^2}{2},$$

$$I_z\cdot\omega_0^2=c\cdot\varphi^2,$$

отсюда

$$\varphi=\omega_0\sqrt{\frac{I_z}{c}}.$$

Балансир остановится при повороте на угол $\varphi = \omega_0 \sqrt{\dfrac{I_z}{c}}$.

Пример 2.9. Определить время разгона машины до достижения частоты вращения *n = 300 об/мин*, а также полное число оборотов, которое она совершит за это время, если электродвигатель в период разгона развивает постоянный момент $M_1 = 420$ *Нм*. При этом момент сопротивления $M_2 = 120$*Н/м*, момент инерции всех вращающихся частей машины и ротора двигателя, приведенный к его валу, составляет $I_z = 11{,}8$ *кгм*^{2}.

Решение. В период разгона дифференциальное уравнение вращательного движения машины имеет вид

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M_2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение:

$$\int d\omega = \int \frac{1}{I_z} \left(M_1 - M_2 \right) dt,$$

$$\omega = \frac{1}{I_z} \left(M_1 - M_2 \right) t + C_1.$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 воспользуемся начальными условиями: при $t = 0$ $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$. Тогда $C_1 = 0$, следовательно

$$\omega = \frac{1}{I_z} \left(M_1 - M_2 \right) t.$$

Из полученного выражения определим время разгона машины до частоты вращения *n = 300 об/мин*, которая соответствует угловой скорости $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{\pi \cdot 300}{30} = 10\pi = 31{,}4 c^{-1}$:

$$t=\frac{I_z\omega}{M_1-M_2}=\frac{11{,}8\cdot 31{,}4}{420-120}=1{,}23c.$$

Теперь подставим в то же выражение вместо угловой скорости $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$ и проинтегрируем его:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{I_z}(M_1-M_2)t,$$

$$\int d\varphi=\int\frac{1}{I_z}(M_1-M_2)tdt,$$

$$\varphi=\frac{1}{2I_z}(M_1-M_2)t^2+C_2.$$

С учетом начальных условий $C_2=0$, тогда закон вращательного движения машины будет иметь вид

$$\varphi=\frac{1}{2I_z}(M_1-M_2)t^2.$$

Подставив в полученный закон движения найденное время, определим угол поворота машины за период ее разгона:

$$\varphi=\frac{1}{2\cdot 11{,}8}(420-120)1{,}23^2=19{,}2\,рад.$$

Определим полное число оборотов, соответствующее полученному углу:

$$n=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{19{,}2}{2\cdot 3{,}14}=3 \text{ оборота.}$$

2.2.7. Закон сохранения кинетического момента системы

Из теоремы об изменении главного момента количества движения (кинетического момента) системы получим следующие следствия:

1. *Если сумма моментов относительно данного центра О всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно данного центра О будет численно и по направлению постоянен.*

Если $\overline{M}_0^e = 0$, то $\dfrac{d\overline{K}_0}{dt} = 0$, т. е. $\overline{K}_0 = const$.

2. *Если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Если $\overline{M}_z^e = 0$, то $\dfrac{dK_z}{dt} = 0$, т. е. $K_z = const.$

Эти результаты выражают **закон сохранения главного момента количеств движения системы**. Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количеств движения системы не могут.

Примерами закона сохранения кинетического момента системы являются реактивный момент винта, раскачивание качелей.

2.2.8. Кинетическая энергия механической системы

Кинетическая энергия механической системы равна арифметической сумме кинетических энергий всех материальных точек системы:

$$T = \sum T_k = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{2.31}$$

Кинетическая энергия является величиной *скалярной, положительной* и потому *не зависящей от направлений движения частей системы*. Она характеризует и поступательное, и вращательное движения системы.

В тех случаях, когда механическая система состоит из нескольких твердых тел, то ее кинетическая энергия определяется как сумма кинетических энергий этих тел. Рассмотрим определение кинетической энергии тела при различных видах движения.

1. Поступательное движение

В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс. Следовательно, для любой точки $v_k = v_C$ и тогда формула (2.31) имеет вид

$$T = \sum \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right) v_C^2,$$

или

$$T_{пост} = \frac{1}{2} M v_C^2. \tag{2.32}$$

2. Вращательное движение

Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси Oz, то скорость любой его точки $v_k = \omega h_k$, где h_k – расстояние точки от оси вращения, а ω – угловая скорость тела (рис. 2.10).

Подставляя это значение в формулу (2.31) и вынося общие множители за скобки, получим

$$T = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2.$$

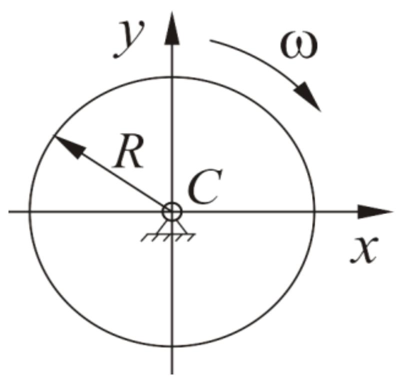


Рисунок 2.10 – Вращательное движение тела

Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси Oz. Таким образом, окончательно найдем

$$T_{вращ} = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \tag{2.33}$$

3. Плоскопараллельное (плоское) движение

При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей *P* (рис. 2.11).

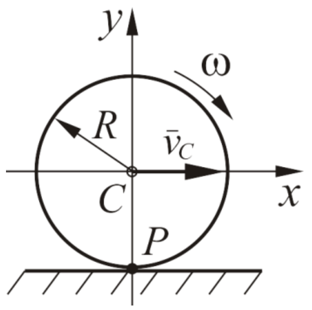


Рисунок 2.11 – Плоскопараллельное движение тела

Следовательно, по формуле (2.33)

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{2.34}$$

где I_P – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей *P*.

Величина I_P в формуле (2.34) будет переменной, так как положение полюса *P* при движении тела все время меняется. Введем вместо I_P постоянный момент инерции I_C относительно оси, проходящей через центр масс *C* тела. По теореме Гюйгенса $I_P = I_C + Md^2$, где $d = PC$. Подставим это выражение для I_P в (2.34). Учитывая, что точка *P* – мгновенный центр скоростей и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = v_C$, где v_C – скорость центра масс *C*. В итоге будем иметь

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \tag{2.35}$$

Следовательно, *при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со ско-*

ростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

4. Общий случай движения

Если выбрать центр масс C тела в качестве полюса, то движение тела в общем случае будет слагаться из поступательного движения со скоростью v_C полюса и вращательного движения вокруг мгновенной оси CP, проходящей через этот полюс (рис. 2.12).

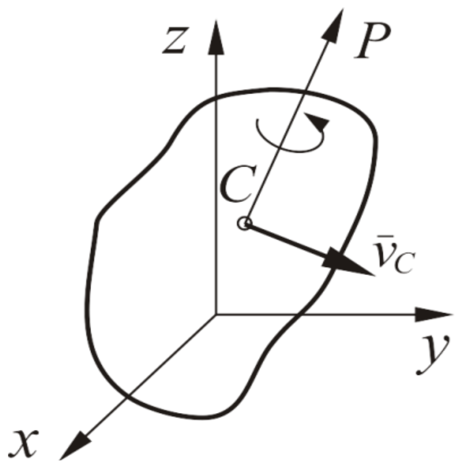


Рисунок 2.12 – Общий случай движения тела

И тогда кинетическая энергия в общем случае движения твердого тела будет определяться формулой

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_{PC}\omega^2}{2}. \qquad (2.36)$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела в общем случае движения равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс*.

Пример 2.10. Определить кинетическую энергию колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если m – масса колеса и v_c – скорость его центра масс. Колесо считать сплошным однородным диском.

Решение. Так как колесо совершает плоскопараллельное движение, то его кинетическую энергию можно вычислить двумя способами по формулам

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{I_{zC}\omega^2}{2} \quad \text{и} \quad T=\frac{I_P\omega^2}{2},$$

где I_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс C;

I_P – момент инерции тела относительно оси P, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости (см. рис. 2.11). Рассмотрим оба варианта решения.

Вариант 1

Воспользуемся первой формулой для определения кинетической энергии катящегося колеса:

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{I_{zC}\omega^2}{2}.$$

Момент инерции диска относительно оси z, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости симметрии колеса,

$$I_{zC}=\frac{MR^2}{2},$$

где R – радиус колеса.

Следовательно,

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega^2.$$

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке касания P колеса и неподвижного рельса, поэтому скорость центра масс

$$v_C=\omega R,$$

где ω – угловая скорость колеса, которую можно выразить как

$$\omega=\frac{v_C}{R}.$$

Тогда формула кинетической энергии колеса примет вид

$$T = \frac{3Mv_c^2}{4}.$$

Вариант 2

Плоское движение колеса рассматривается как мгновенное вращательное движение вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис. 2.11), поэтому кинетическая энергия колеса будет рассчитываться по формуле

$$T = \frac{I_P \omega^2}{2},$$

где I_P – момент инерции тела относительно оси P, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости.

Так как оси, проходящие через центр тяжести и мгновенный центр скоростей параллельны, то, применив теорему Гюйгенса, получим

$$I_P = I_{Cz} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}.$$

Учитывая, что скорость центра масс колеса равна $v_c = \omega R$, найдем кинетическую энергию колеса:

$$T = \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{2} \cdot \left(\frac{v_C}{R}\right)^2 = \frac{3Mv_C^2}{4}.$$

2.2.9. Работы сил, приложенных к твердому телу

Работы сил, приложенных к твердому телу или механической системе, определяются по тем же формулам, что и для сил, приложенных к материальной точке.

Рассмотрим дополнительно некоторые случаи определения работы сил.

1. Работа силы, приложенной к твердому телу при его поступательном движении

При поступательном движении твердого тела под действием переменной силы F на перемещении M_0M_1 работа силы

$$A(F)=\int_{M_0}^{M_1} F_\tau dS=\int_{M_0}^{M_1} F\,cos(\alpha)dS, \tag{2.37}$$

где α – угол между вектором силы F и вектором перемещения dS (рис. 2.13).

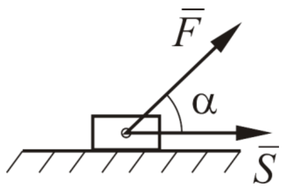


Рисунок 2.13 – Работа силы при поступательном движении тела

Если сила F постоянна, то ее работа равна

$$A(F)=F_\tau S=FScos(\alpha). \tag{2.38}$$

2. Работа силы тяжести, действующей на систему

Работа силы тяжести, действующей на частицу M_k весом $p_к$, будет равна

$$p_k(z_{k0}-z_{k1}),$$

где z_{k0} и z_{k1} – координаты, определяющие начальное и конечное положения частицы (рис. 2.14).

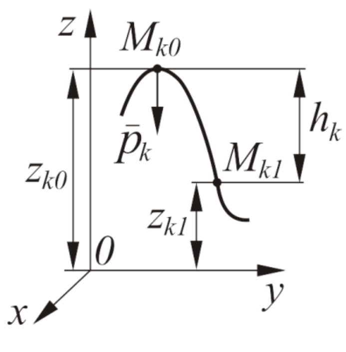


Рисунок 2.14 – Работа силы тяжести

Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет определяться

$$A(P)=\sum p_k z_{k0}-\sum p_k z_{k1}=\sum p_k\left(z_{k0}-z_{k1}\right)=\sum p_k h_k = \\ =P\left(z_{C0}-z_{C1}\right)=\pm P h_C, \tag{2.39}$$

где P – вес системы;

h_k – вертикальное перемещение k-й частицы;

h_C – вертикальное перемещение центра масс системы.

Следовательно, *работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их главного вектора (в случае твердого тела – равнодействующей) P на перемещении центра масс системы (или центра тяжести тела)*.

Из формулы (2.39) следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории центра масс системы, и если начальное и конечное положение центра масс совпадают, то работа силы тяжести равна нулю (случай замкнутого пути).

3. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу

Элементарная работа силы F, приложенной к телу, которое совершает вращательное движение (рис. 2.15),

$$dA = F_\tau dS = F_\tau h\, d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела.

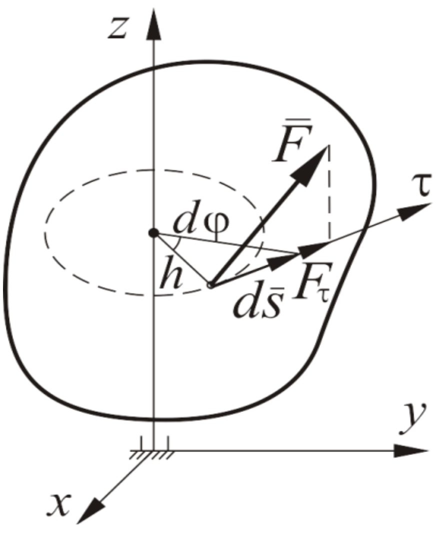


Рисунок 2.15 – Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

Но, как легко видеть, $F_\tau h = m_z(F) = M_z$ – это момент силы относительно оси Oz (вращающий момент). Тогда работа силы будет определяться

$$dA = M_z\, d\varphi. \tag{2.40}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае *элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота*. Формула (2.40) справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_z = \sum m_z(F_k)$.

При повороте на конечный угол φ работа

$$A(F) = \int_0^\varphi M_z d\varphi. \tag{2.41}$$

В случае постоянного момента M_z

$$A(F) = M_z\, \varphi. \tag{2.42}$$

4. Работа пары сил с моментом М

При вычислении работы в случае, когда к вращающемуся телу приложена пара сил M (рис. 2.16), возможны следующие варианты:

а) если *момент пары сил величина переменная*, то

$$A(M) = \int_{\varphi 0}^{\varphi 1} M(\varphi) d\varphi, \tag{2.43}$$

где φ – угол поворота тела;

φ_0, φ_1 – начальное и конечное значения угла поворота тела.

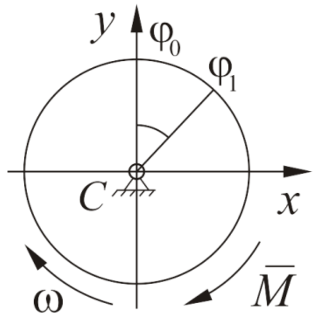


Рисунок 2.16 – Работа пары сил

б) если *момент пары сил величина постоянная*.

В этом случае работа

$$A(M) = \pm M\varphi.$$

Работа пары сил с постоянным моментом, приложенная к вращающемуся телу, равна взятому с соответствующим знаком произведению модуля момента пары сил на угол поворота тела.

Если направление момента пары сил совпадает с направлением вращения тела, то работа будет величиной ***положительной***.

Если направление момента пары сил не совпадает с направлением вращения тела, то работа будет ***отрицательной***.

5. Работа силы упругости пружины

Рассмотрим пружину, конец которой закреплен неподвижно (рис. 2.17).

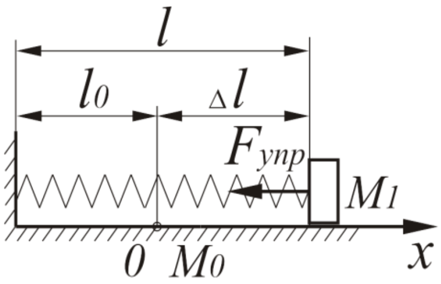


Рисунок 2.17 – работа силы упругости

При растяжении пружины в ней возникает сила упругости $F_{упр}$, по закону Гука

$$F_{упр} = -cx,$$

где c – жесткость пружины;

x – ее удлинение.

Работа, совершаемая силой упругости пружины при ее перемещении из точки M_0 в точку M_1,

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где $F_x = -cx;\ F_y = F_z = 0.$

Тогда

$$A = \int_{M_0}^{M_1} -cxdx = -c\int_{x_0}^{x_1} xdx = \frac{c\left(x_0^2 - x_1^2\right)}{2}, \qquad (2.44)$$

где x_0 – начальное удлинение пружины;

x_1 – ее конечное удлинение.

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

При перемещении из положения, где $x_0=0$ (пружина не деформирована) в любое положение с деформацией x, работа силы упругости

$$A = -\frac{c}{2}x^2. \qquad (2.45)$$

Работа силы упругости на перемещение из состояния равновесия всегда отрицательна и равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат деформации. Из формул, определяющих работу силы упругости, следует, что работа силы упругости не зависит от формы перемещения и работа по любому замкнутому перемещению равна нулю.

6. Работа сил трения, действующих на катящееся тело

На колесо радиусом R, катящееся по некоторой плоскости без скольжения, действует приложенная в точке B сила трения $F_{тр}$, препятствующая скольжению точки вдоль плоскости (рис. 2.18, *а*). Элементарная работа этой силы определяется

$$dA = -F_{тр}\, ds_B.$$

Но точка B в данном случае совпадает с мгновенным центром скоростей, и тогда $v_B = 0$. Так как $ds_B = v_B\, dt$, то $ds_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения $dA = 0$.

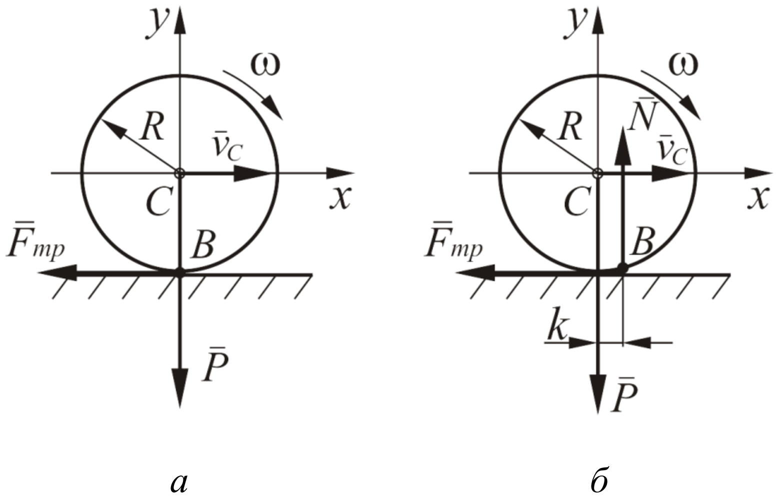


Рисунок 2.18 – Работа сил трения, действующих на катящееся тело

Следовательно, *при качении без скольжения работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю*. По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции опоры N, если считать тела недеформируемыми и силу N приложенной в точке B.

Сила трения при качении будет совершать работу, если учитывать деформацию соприкасающихся тел. Вследствие деформации поверхностей нормальная реакция опорной поверхности N будет смещаться, образуя с силой тяжести P пару сил (рис. 2.18, *б*), момент которой называется **моментом трения качения**, равный

$$M_{кач} = kN, \tag{2.46}$$

где k – коэффициент трения качения, соответствующий расстоянию между линиями действия сил N и P.

Учитывая выражения (2.40), (2.46) и угол поворота при качении колеса,

$$d\varphi = \frac{ds_C}{R},$$

получим

$$dA(M_{кач}) = kNd\varphi = -\frac{k}{R} Nds_C,$$

где ds_C – элементарное перемещение центра масс C колеса.

Если $N = const$, то полная работа сил сопротивления качению будет равна

$$A(M_{кач}) = \int\limits_0^{\varphi} -kNd\varphi = -kN\varphi \tag{2.47}$$

или

$$A(M_{кач}) = \int\limits_0^{s_C} -\frac{k}{R}Nds_C = -\frac{k}{R}Ns_C. \tag{2.48}$$

Так как величина k/R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

2.2.10. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Дана механическая система, состоящая из n материальных точек $M_1, M_2, \ldots M_n$. На каждую точку системы действуют внешние силы $\overline{F}_1^e$, $\overline{F}_2^e \ldots \overline{F}_n^e$ и внутренние силы $\overline{F}_1^i$, $\overline{F}_2^i \ldots \overline{F}_n^i$.

Теорема об изменении кинетической энергии для одной точки имеет вид

$$d\left(\frac{m_k {v_k}^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e, dA_k^i – элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил.

Составляя подобные уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\frac{\sum m_k {v_k}^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i,$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \tag{2.49}$$

Полученное равенство выражает **теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме**: *дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.*

Проинтегрировав обе части равенства (2.49) в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T, получим

$$T - T_0 = \sum \int_{M_0}^{M_1} dA_k^e + \sum \int_{M_0}^{M_1} dA_k^i$$

или

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \qquad (2.50)$$

где $\sum A_k^e$ – работа внешней силы для точки системы M_k при ее перемещении из начального положения M_0 в конечное положение M_1;

$\sum A_k^i$ – соответственно работа внутренней силы, действующей на точку M_k.

Формула (2.50) выражает **теорему об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме**: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил*.

В отличие от других общих теорем динамики внутренние силы не исключаются при рассмотрении теоремы об изменении кинетической энергии. Например, для механической системы, состоящей из снаряда и орудия, при выстреле силы давления пороховых газов будут внутренними, совершающими работу и сообщающими скорость телам системы.

Частный случай теоремы

Для абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю: $\sum A_k^i = 0$.

Следовательно, теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме можно представить в виде

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (2.51)$$

Для ***неизменяемой механической системы*** (состоящей из твердых тел) теорема об изменении кинетической энергии примет вид: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних сил системы на этом же перемещении.*

Пример 2.11. Груз весом P_1 начинает подниматься по шероховатой наклонной поверхности, расположенной под углом α к горизонту, с помощью гибкой и нерастяжимой нити, навитой на однородный диск весом P_2 и радиусом R, к которому приложен постоянный вращающий момент $M_{вр}$ (рис. 2.19). Коэффициент трения груза о плоскость равен f. Определить скорость груза после того, как он пройдет из состояния покоя путь S_1.

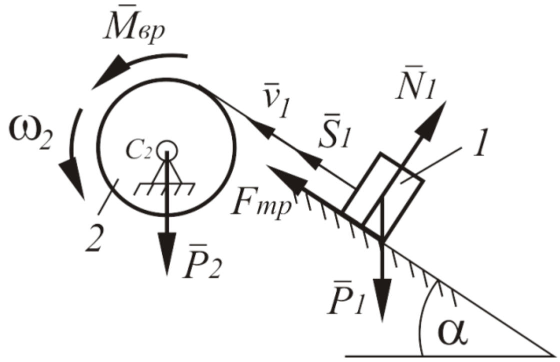


Рисунок 2.19 – Расчетная схема к примеру 2.11

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

где $T_0 = 0$, так как в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2.$$

Кинетическая энергия груза, совершающего поступательное движение, определяется

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} v_1^2 .$$

Кинетическая энергия однородного диска, совершающего вращательное движение, определяется

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 I_{C2} \omega_2^2 ,$$

где $I_{C2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R^2$ – осевой момент инерции однородного диска;

$\omega_2 = \frac{v_1}{R}$ – угловая скорость диска.

Тогда кинетическая энергия однородного диска примет вид

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R^2 \left(\frac{v_1}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} v_1^2 .$$

Кинетическая энергия системы будет равна следующему:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} v_1^2 + \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{g} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right). \tag{1}$$

Сумма работ всех внешних сил, действующих на систему, определяется

$$\sum A_k^e = A(\overline{F}_{тр}) + A(\overline{P}_1) + A(\overline{M}_{вр}).$$

Работа силы трения скольжения

$$A(\overline{F}_{тр}) = -F_{тр} S_1 = -fNS_1 = -fP_1 S_1 \cos(\alpha).$$

Работа силы тяжести груза

$$A(\overline{P}_1) = -P_1 S_1 \sin(\alpha).$$

Работа постоянного вращающего момента

$$A(\overline{M}_{вр}) = M_{вр}\varphi_2,$$

где

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{R}.$$

Тогда

$$A(\overline{M}_{вр}) = M_{вр}\frac{S_1}{R}.$$

Сумма работ всех внешних сил будет равна следующему:

$$\sum A_k^e = -fP_1S_1\cos(\alpha) - P_1S_1\sin(\alpha) + M_{вр}\frac{S_1}{R} =$$
$$= S_1\left[\frac{M_{вр}}{R} - fP_1\cos(\alpha) - P_1\sin(\alpha)\right]. \qquad (2)$$

Приравняем полученные выражения для кинетической энергии системы (1) и суммы работ внешних сил этой же системы (2):

$$\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g}\left(P_1 + \frac{P_2}{2}\right) = S_1\left[\frac{M_{вр}}{R} - fP_1\cos(\alpha) - P_1\sin(\alpha)\right].$$

Из полученного выражения определим скорость груза 1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gS_1\left[\frac{M_{вр}}{R} - fP_1\cos(\alpha) - P_1\sin(\alpha)\right]}{P_1 + \frac{P_2}{2}}}.$$

Пример 2.12. Молотильный барабан с моментом инерции относительно геометрической оси барабана $I = 9{,}81$ *кг·м*^{2} при равномерной подаче растительной массы вращается с частотой $n_0 = 952$ *об/мин*. Необходимая при этом мощность $N = 4{,}42$ *кВт*. Затрата мощности на холостом ходу при этой же угловой скорости $N_0 = 0{,}88$ *кВт*. До какого значения ω возрастает угловая скорость барабана, если в течение *4* с после прекращения подачи растительной массы она устанавливается постоянной?

Решение. Поскольку после прекращения подачи растительной массы подводится рабочая мощность, то угловая скорость барабана будет возрастать.

Для определения угловой скорости применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

где $T = \dfrac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия барабана после того, как угловая скорость установится постоянной;

$T_0 = \dfrac{I\omega_0^2}{2}$ – кинетическая энергия барабана до прекращения подачи растительной массы.

Работа внешних сил, которая затрачивается на повышение угловой скорости барабана,

$$\sum A_k^e = (N - N_0)t.$$

Таким образом,

$$\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = (N - N_0)t,$$

где $\omega_0 = \dfrac{\pi n_0}{30} = \dfrac{3{,}14 \cdot 952}{30} = 99{,}6\ об/мин.$

Подставляя все известные значения, определяем, до какого значения возрастает угловая скорость барабана после прекращения подачи растительной массы:

$$\omega = \sqrt{\frac{2(N - N_0) + I\omega_0^2}{I}} = 113{,}5\ c^{-1}.$$

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Запишите выражения для определения центра масс механической системы.

2. Дайте определение момента инерции тела относительно оси.

3. Что такое радиус инерции?

4. Запишите теорему Гюйгенса – Штейнера.

5. Что такое главные оси и главные моменты инерции тела?

6. В чем преимущество применения общих теорем динамики при исследовании движения механической системы?

7. В чем смысл теоремы о движении центра масс системы?

8. При каком условии центр масс системы будет находиться в покое или двигаться прямолинейно и равномерно?

9. Что такое количество движения системы?

10. Сформулируйте теорему об изменении количество движения системы.

11. При каком условии количество движения системы постоянно по величине и направлению?

12. Что такое главный момент количества движения системы?

13. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента системы относительно некоторого центра и оси.

14. При каком условии главный момент количеств движения системы относительно данного центра O будет численно и по направлению постоянен?

15. Запишите, как определяется кинетическая энергия тела при различных видах его движения.

16. В каком случае работа сил будет положительной?

17. В чем физический смысл коэффициента трения качения?

18. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы.

Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

3.1. Принцип Даламбера (принцип кинетостатики)

Все методы решения задач динамики, которые рассматривались до сих пор, основываются на уравнениях вытекающих или непосредственно из законов Ньютона или же из общих теорем динамики, являющихся следствием этих законов. Этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемыми **принципами механики**. В ряде случаев применение этих принципов позволяет найти более эффективные методы решения соответствующих задач.

Рассмотрим первый принцип, который называется **принцип Даламбера**.

Принцип Даламбера для материальной точки

Уравнение движения материальной точки массой m инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил имеет вид:

$$m\bar{a} = \bar{F}^e + \bar{F}^i,$$

где $\bar{F}^e$ – равнодействующая внешних активных сил, приложенных к точке;

$\bar{F}^i$ – равнодействующая внутренних сил.

Перепишем это выражение в следующем виде:

$$\bar{F}^e + \bar{F}^i - m\bar{a} = 0, \tag{3.1}$$

где $-m\bar{a} = \bar{F}^u$ – сила инерции точки.

Сила инерции $\bar{F}^u$ – это векторная величина равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленная в сторону противоположную этому ускорению. Иногда силу инерции называют **даламберовой силой инерции**.

Тогда выражение (3.1) примет вид

$$\overline{F}^e + \overline{F}^i + \overline{F}^u = 0. \qquad (3.2)$$

Из этого выражения следует, что *если в каждый момент времени к фактически действующим на точку внешним и внутренним силам прибавить силу инерции, то полученная система будет уравновешенной*.

Положение (3.2) выражает **принцип Даламбера для материальной точки**.

Пример 3.1. Триер, предназначенный для сортировки зерна, представляет собой пустотелый цилиндр, который может вращаться вокруг своей геометрической оси O (рис. 3.1). При каком числе оборотов триера в минуту возможен подъем зерна A до уровня горизонтального положения диаметра цилиндра (точка A_1), если коэффициент трения зерна о поверхность триера равен f и радиус цилиндра R? Определить, при каком числе оборотов в минуту не будет отставания зерна от барабана в наивысшем положении зерна (точка A_2).

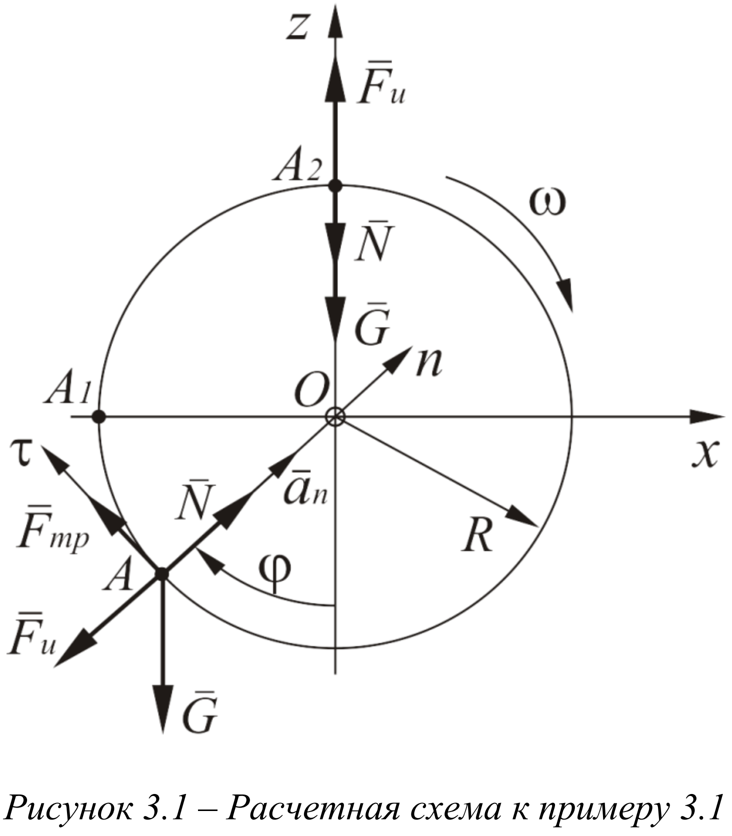


Рисунок 3.1 – Расчетная схема к примеру 3.1

Решение. Изобразим в произвольном положении зерна (точка *A*) все силы, действующие на него. На зерно действуют силы: сила тяжести зерна *G*, нормальная реакция опоры *N* и сила трения $F_{тр}$ зерна о поверхность триера.

Считая, что в установившемся движении угловая скорость триера постоянна, ускорение зерна, лежащего на поверхности триера, будет равно нормальной составляющей (центростремительное ускорение):

$$a_n = \omega^2 R.$$

Приложим к зерну силу инерции $F_и$, направленную в противоположную сторону нормальному ускорению:

$$F_и = ma_n = m\omega^2 R.$$

Приложив силу инерции к точке (зерну), можно применить принцип Даламбера и записать уравнение равновесия для зерна в векторной форме:

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_и + \overline{F}_{тр} = 0.$$

Спроецируем векторное уравнение на нормальную и касательную оси:

$$\sum F_n = 0: \quad N - mg\cos(\varphi) - m\omega^2 R = 0,$$

$$\sum F_\tau = 0: \quad F_{тр} - mg\sin(\varphi) = 0.$$

Из первого уравнения найдем нормальную реакцию опоры:

$$N = m\left(g\cos(\varphi) + \omega^2 R\right).$$

Зерно не будет сползать вниз, если сила трения больше или равна касательной составляющей силы тяжести:

$$F_{тр} \geq mg\sin(\varphi).$$

Так как $F_{тр} = Nf$, то должно выполняться условие

$$mf\left(g\cos(\varphi)+\omega^2 R\right)\geq mg\sin(\varphi).$$

В положении зерна, соответствующего точке A_1, угол $\varphi = \pi/2$, и тогда условие принимает следующий вид:

$$f\omega^2 R \geq g.$$

Отсюда определим угловую скорость, при которой возможен подъем зерна A до уровня горизонтального положения диаметра цилиндра (точка A_1):

$$\omega_1 \geq \sqrt{\frac{g}{fR}}.$$

Этой угловой скорости соответствует частота вращения:

$$n_1 \geq \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{fR}}.$$

Для определения частоты вращения триера, при которой не будет отставания зерна от барабана в наивысшем положении зерна (точка A_2), изобразим силы, действующие на зерно в этом положении, и запишем уравнение равновесия в проекции на нормаль:

$$\sum F_n = 0: \quad N + G - F_u = 0.$$

Чтобы зерно не отрывалось от поверхности триера, должно соблюдаться условие $N \geq 0$. С учетом равенства имеем условие:

$$F_u \geq G \quad \text{или} \quad m\omega_2^2 R \geq mg.$$

Отсюда находим угловую скорость и частоту вращения триера, при которых не будет отрыва зерна от барабана в наивысшем положении зерна:

$$\omega_2 \geq \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{и} \quad n_2 \geq \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Принцип Даламбера для механической системы

В случае механической системы, состоящей из n точек, просуммировав силы, приложенные к каждой точке системы, получим **принцип Даламбера для механической системы**: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на нее внешним и внутренним силам, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применить все уравнения статики*:

$$\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i + \sum \overline{F}_k^u = 0. \tag{3.3}$$

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия. Это делает единообразным подход к решению задач и часто упрощает соответствующие расчеты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что он, как и основной закон динамики, относится к движению, рассматриваемому по отношению к инерциальной системе отсчета. При этом на точки механической системы действуют только внешние и внутренние силы. Под действием этих сил точки системы приобретают ускорение. Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки *не действуют*. Введение сил инерции – это лишь прием, позволяющий использовать методы статики при составлении уравнений движения.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма моментов относительно любого центра O равна нулю:

$$\begin{cases}\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i + \sum \overline{F}_k^u = 0,\\ \sum m_O\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum m_O\left(\overline{F}_k^i\right) + \sum m_O\left(\overline{F}_k^u\right) = 0.\end{cases} \tag{3.4}$$

Учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим

$$\begin{cases}\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^u = 0,\\ \sum m_O\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum m_O\left(\overline{F}_k^u\right) = 0.\end{cases} \tag{3.5}$$

Введем обозначения:

$$\overline{F}^u = \sum \overline{F}_k^u,$$
$$M_O^u = \sum m_O\left(\overline{F}_k^u\right),$$

где $\overline{F}^u$ – главный вектор сил инерции системы;

M_O^u – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Окончательно получим

$$\begin{cases}\sum \overline{F}_k^e + \overline{F}^u = 0,\\ \sum m_O\left(\overline{F}_k^e\right) + M_O^u = 0.\end{cases} \tag{3.6}$$

Применение уравнений (3.6), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, так как эти уравнения не содержат внутренних сил. По существу уравнения (3.6) эквивалентны уравнениям, выражающим теоремы об изменении количества движения и главного момента количеств движения системы, и отличаются от них только по форме.

Уравнениями (3.6) особенно удобно пользоваться при изучении движения твердого тела или системы твердых тел. Для полного изучения движения любой изменяемой системы этих уравнений будет недостаточно, так же как недостаточно уравнений статики для изучения равновесия любой механической системы.

Проецируя уравнения данной системы на оси координат, получаем уравнения, соответствующие уравнениям статики. Чтобы воспользоваться этими уравнениями при решении задач, надо уметь определять главный вектор и главный момент сил инерции.

3.2. Определение главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела

Систему сил инерции твердого тела можно заменить одной силой, равной $\overline{F}^{u} = \sum \overline{F}_{k}^{u}$, и парой сил с моментом $M_{O}^{u} = \sum m_{O}\left(\overline{F}_{k}^{u}\right)$.

Величина главного вектора системы сил, как известно, не зависит от центра приведения. Так как $\overline{F}_{k}^{u} = -m_{k}\overline{a}_{k}$, то

$$\overline{F}^{u} = -\sum m_{k}\overline{a}_{k} = -M\overline{a}_{C}, \tag{3.7}$$

где M – масса тела;

$\overline{a}_{C}$ – ускорение центра масс тела.

Следовательно, *главный вектор сил инерции тела, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению*.

Если ускорение $\overline{a}_{C}$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\overline{F}^{u}$ разложится на составляющие:

$$\begin{cases} \overline{F}^{u\tau} = -M\overline{a}_{C}^{\tau}, \\ \overline{F}^{un} = -M\overline{a}_{C}^{n}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Частные случаи определения сил и моментов инерции

1. *Поступательное движение тела*

В этом случае тело не совершает вращательное движение. Отсюда заключаем, что момент внешних сил относительно центра тяжести тела равен нулю ($\sum m_{C}\left(\overline{F}_{k}^{e}\right) = 0$), следовательно, из равенства (3.6) $M_{C}^{u} = 0$. Это значит, что *силы инерции твердого тела приводятся к одной равнодействующей, равной* $\overline{F}^{u}$ *и проходящей через центр масс тела* (рис. 3.2).

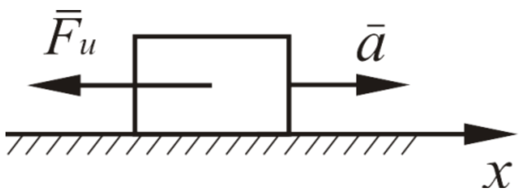


Рисунок 3.2 – Определение силы инерции при поступательном движении тела

2. *Вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела*

В этом случае, так как центр масс тела лежит на неподвижной оси, то $\bar{a}_C = 0$, а следовательно, $\bar{F}^u = 0$. Тогда *система сил инерции приводится к моменту инерции, лежащему в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела Oz* (рис. 3.3), и равному

$$M_{Oz}^u = -I_{Oz}\varepsilon, \tag{3.9}$$

где I_{Oz} – осевой момент инерции тела относительно центральной оси *Oz,* перпендикулярной плоскости движения тела;

ε – угловое ускорение тела.

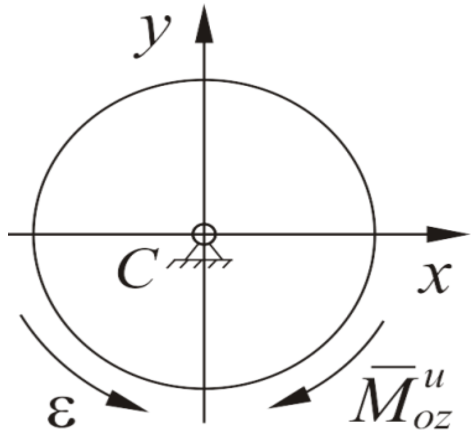


Рисунок 3.3 – Определение момента инерции при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси

3. *Вращательное движение вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр масс тела*

Пусть твердое тело имеет плоскость симметрии *Oxy* и вращается вокруг оси *Oz*, перпендикулярной этой плоскости. Если привести силы инерции к центру O, то вследствие симметрии главный вектор и главный момент сил инерции будут лежать в плоскости симметрии Oxy.

Тогда, помещая центр приведения в точку O, получим

$$\sum m_{Oz}\left(\bar{F}_k^e\right) + M_{Oz}^u = 0 \;\Rightarrow\; M_{Oz}^u = -\sum m_{Oz}\left(\bar{F}_k^e\right),$$

где $\sum m_{Oz}\left(\bar{F}_k^e\right) = I_{Oz}\varepsilon$ – момент внешних сил относительно оси Oz;

I_{Oz} – осевой момент инерции тела относительно оси Oz, проходящей через центр приведения O.

Тогда

$$M_{Oz}^u = -I_{Oz}\varepsilon.$$

4. Плоскопараллельное движение тела

В этом случае тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости. Вследствие симметрии главный вектор и главный момент сил инерции так же, как и центр масс C тела, лежат в плоскости симметрии Oxy (рис. 3.4).

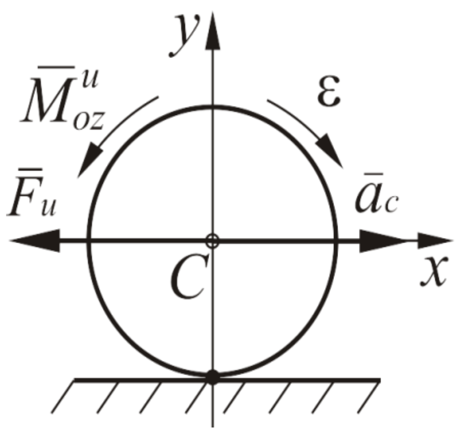


Рисунок 3.4 – Определение силы и момента инерции при плоскопараллельном движении тела

Тогда, помещая центр приведения в точку C, получим

$$\sum m_{Cz}\left(\bar{F}_k^e\right) + M_{Cz}^u = 0 \;\Rightarrow\; M_{Cz}^u = -\sum m_{Cz}\left(\bar{F}_k^e\right),$$

где $\sum m_{Cz}\left(\overline{F}_k^e\right) = I_{Cz}\varepsilon$ – осевой момент инерции тела относительно оси *Oz,* проходящей через центр масс *C*.

Тогда

$$M_{Cz}^u = -I_{Cz}\varepsilon\,.$$

Таким образом, *в случае плоскопараллельного движения тела система сил инерции приводится к результирующей силе, равной* $\overline{F}^u$ *и приложенной в центре масс C тела, и к моменту инерции* M_{Cz}^u, *лежащему в плоскости симметрии тела*.

Знак минус говорит о том, что момент инерции M_{Cz}^u тела направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε.

Решение задач динамики системы с применением принципа Даламбера проводится в следующей последовательности:

1. Выделяем и изображаем систему в текущий момент времени.
2. Показываем на схеме активные силы, действующие на точки системы.
3. Освобождаем систему от наложенных на нее связей, заменяя их действие реакциями связей.
4. Прикладываем силы и моменты инерции.
5. Выбираем систему координатных осей.
6. Определяем вид полученной системы сил и составляем для нее соответствующие уравнения равновесия.
7. Решаем уравнения равновесия и находим неизвестные величины.

Пример 3.2. Найти реакции в подшипниковых опорах коленчатого вала четырехцилиндрового двигателя трактора. Все колена имеют одинаковые размеры и расположены под углом *90*° друг к другу (рис. 3.5). Центры тяжести колен находятся на расстоянии *r* от оси вала. Масса каждого колена *m*. Коленчатый вал вращается с постоянной угловой скоростью *ω*. Расстояние между подшипниковыми опорами *AB* = *L*. Другие размеры показаны на схеме.

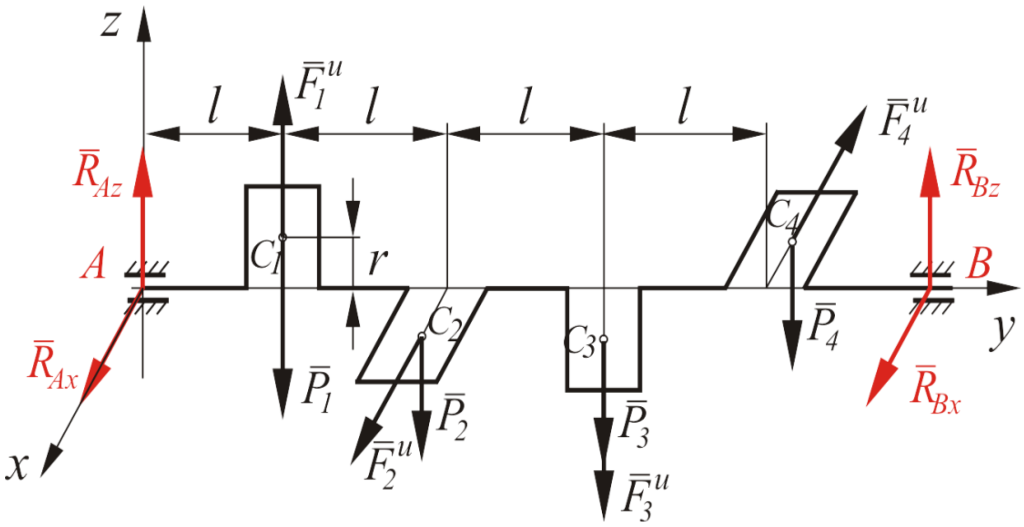


Рисунок 3.5 – Расчетная схема к примеру 3.2

Решение. Заменим действие подшипниковых опор на коленчатый вал реакциями R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}. Вдоль оси Oy реакции равны нулю, так как проекции внешних сил на эту ось равны нулю.

Для того чтобы воспользоваться принципом Даламбера, приложим к каждому колену силы инерции. При равномерном вращении вала можно считать, что равнодействующая центробежных сил инерции каждого колена приложена в его центре тяжести и направлена по радиусу вращения от оси вала в данном его положении. Величины сил инерции каждого колена будут равны

$$F_1^u = F_2^u = F_3^u = F_4^u = F^u = mr\omega^2 .$$

Согласно принципу Даламбера, после приложения сил инерции можно считать систему сил уравновешенной. Так как все силы лежат в двух плоскостях, то будем иметь пространственную систему сил, для которой можно составить четыре уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: \; F_2^u - F_4^u + R_{Ax} + R_{Bx} = 0; \\ \sum F_z = 0: \; F_1^u - F_3^u + R_{Az} + R_{Bz} - P = 0; \\ \sum M_x(F) = 0: \; F_1^u l - F_3^u 3l + R_{Bz}L - P_1 l - P_2 2l - P_3 3l - P_4 4l = 0 \; ; \\ \sum M_z(F) = 0: \; -F_2^u 2l + F_4^u 4l - R_{Bx}L = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: \ R_{Ax} = -R_{Bx}; \\ \sum F_z = 0: \ R_{Az} + R_{Bz} = P; \\ \sum M_x(F) = 0: \ -2F^u l + R_{Bz}L + P2l = 0; \\ \sum M_z(F) = 0: \ 2F^u l - R_{Bx}L = 0, \end{cases}$$

где $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 4mg$ – суммарный вес четырех колен.

Из последнего уравнения системы определим R_{Bx}:

$$R_{Bx} = \frac{2F^u l}{L} = \frac{2mr\omega^2 l}{L}.$$

Тогда $R_{Bx} = -R_{Ax} = \dfrac{2mr\omega^2 l}{L}$.

Из третьего уравнения системы определим R_{Bz}:

$$R_{Bz} = \frac{2F^u l - 2Pl}{L} == \frac{2mr\omega^2 l - 8mgl}{L}.$$

Из второго уравнения системы определим R_{Az}:

$$R_{Az} = P - R_{Bz} = 4mg - \frac{2mr\omega^2 l - 8mgl}{L}.$$

3.3. Принцип возможных перемещений

При изучении равновесия системы тел методами статики приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, заменяя наложенные связи соответствующими неизвестными реакциями связей. Когда число тел в системе велико, это приводит к решению системы уравнений с большим числом неизвестных реакций связей.

Отличительной особенностью метода, вытекающего из принципа возможных перемещений, является то, что при его применении действие связей учитывается путем рассмотрения *перемещений, ко-*

торые можно сообщить точкам системы, если вывести систему из занимаемого ею положения. Эти перемещения называются в механике ***возможными (виртуальными) перемещениями***.

Возможные перемещения точек системы должны удовлетворять двум условиям:

1) они должны быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где условия равновесия могут быть другими;

2) они должны быть такими, чтобы при этом все наложенные на систему связи сохранялись, так как иначе мы изменим вид рассматриваемой механической системы.

Таким образом, **возможным перемещением** системы мы будем называть *любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями*.

Возможные перемещения любой точки системы будем изображать элементарным вектором δs, направленным в сторону перемещения.

В общем случае для точек тела и тел системы может существовать множество различных возможных перемещений. Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение будет получаться как их геометрическая сумма. Например, тело, лежащее на плоскости, можно переместить вдоль этой плоскости по множеству направлений. Однако любое его возможное перемещение δs можно получить как сумму двух перемещений δs_x и δs_y вдоль лежащих в этой плоскости перпендикулярных осей x и y:

$$\delta\bar{s} = \delta\bar{s}_x + \delta\bar{s}_y. \tag{3.10}$$

*Число независимых между собой возможных перемещений системы называется **числом степеней свободы** этой системы*.

Возможной (виртуальной) работой называется *элементарная работа, которую могла бы совершить сила на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки*.

$$\delta A^e = F^e \delta s \cos\alpha, \tag{3.11}$$

где δA^e – возможная (виртуальная) работа;

F^e – внешняя сила;

α – угол между направлением силы и перемещением.

Рассмотрим систему материальных точек, которая под действием всех приложенных к ней сил и наложенных на нее связей находится в равновесии. Будем при этом все связи системы считать идеальными.

Выделим произвольную точку B_k системы, на которую действуют активные силы (внешние и внутренние) F_k^e и равнодействующая всех реакций связей N_k. Так как точка B_k вместе со всей системой находится в равновесии, $F_k^e + N_k = 0$ или $N_k = -F_k^e$. Следовательно, при любом возможном перемещении точки B_k возможные работы δA_k^e и δA_k^N приложенных к ней сил F_k^e и N_k будут равны по модулю и противоположны по знаку и в сумме равны нулю:

$$\delta A_k^e + \delta A_k^N = 0.$$

Для всех точек системы это выражение запишется следующим образом:

$$\sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^N = 0.$$

Если наложенные на систему связи идеальные, то $\sum \delta A_k^N = 0$, а следовательно

$$\sum \delta A_k^e = 0 \tag{3.12}$$

или

$$\sum \left(F_k^e \delta s_k \cos\alpha_k \right) = 0.$$

Отсюда вытекает ***принцип возможных перемещений***: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих* *на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю*.

В аналитической форме принцип возможных перемещений запишется следующим образом:

$$\sum\left(F_{kx}^{e}\delta x_{k}+F_{ky}^{e}\delta y_{k}+F_{kz}^{e}\delta z_{k}\right)=0, \qquad (3.13)$$

где δx_k, δy_k, δz_k – проекции возможных перемещений на координатные оси.

3.4. Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. Кроме того, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы, кроме действующих активных сил F_k^e и реакций связей N_k, прибавить соответствующие силы инерции $\bar{F}_k^u=-m_k\bar{a}_k$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим

$$\sum\delta A_k^e+\sum\delta A_k^u=0, \qquad (3.14)$$

где δA_k^e и δA_k^u – элементарные работы активных сил и сил инерции.

Данное равенство представляет собой ***общее уравнение динамики***. Из него вытекает ***принцип Даламбера – Лагранжа***: *при движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю*.

В аналитической форме этот принцип имеет вид:

$$\sum\left[\left(F_{kx}^{e}+F_{kx}^{u}\right)\delta x_k+\left(F_{ky}^{e}+F_{ky}^{u}\right)\delta y_k+\left(F_{kz}^{e}+F_{kz}^{u}\right)\delta z_k\right]=0. \qquad (3.15)$$

Принцип Даламбера-Лагранжа позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если система представляет собой совокупность твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам приложить дополнительно главный вектор и главный момент сил инерции, а затем применить принцип возможных перемещений.

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Дайте определение силе инерции.
2. В чем смысл принципа Даламбера для материальной точки и механической системы?
3. Что такое главный вектор и главный момент сил инерции?
4. Как определяются главный вектор и главный момент сил инерции при различных видах движения тела?
5. Что такое виртуальное перемещение? Каким условиям оно должно удовлетворять?
6. Как определить виртуальную работу силы?
7. Сформулируйте принцип возможных перемещений.
8. Запишите общее уравнение динамики и сформулируйте принцип Даламбера – Лагранжа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» является базовой частью для всех общеинженерных дисциплин из цикла дисциплин подготовки студентов по направлениям 35.03.06 «Агроинженерия» и 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции». Данное пособие посвящено динамике материальной точки и механической системы.

При написании учебного пособия автор преследовал цель максимально доступным для студентов языком раскрыть основное содержание указанных разделов дисциплины.

Для успешного освоения дисциплины «Теоретическая механика» большое значение имеет приобретение практических навыков, заключающихся в умении использовать теоретические знания при решении прикладных задач. Учебное пособие содержит множество примеров решения задач, в т. ч. имеющих профессионально-направленный характер из области агроинженерии. Для закрепления учебного материала в пособие включены контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы студентов.

Навыки, приобретенные при решении задач теоретической механики, закладывают основы для дальнейшего изучения специальных дисциплин и являются первым шагом на пути к инженерной деятельности будущего бакалавра-агроинженера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. Т. 2. Динамика: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 640 с.

2. Денисов, Ю. В. Теоретическая механика: учебник / Ю. В. Денисов, Н. А. Клинских. – Екатеринбург, 2013. – 474 с.

3. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва: Колос, 2000. – 376.

4. Резников, Б. Н. Теоретическая механика в примерах и задачах сельскохозяйственного производства / Б. Н. Резников. – Алма-Ата: Изд-во Казанского ордена трудового красного знамени сельскохозяйственного института, 1985. – 153 с.

5. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва: Наука, 2005. – 416 с.

6. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Санкт-Петербург: Лань, 2006. – 768 с.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 2. ДИНАМИКА

Учебное пособие

Электронное издание

Носкова Ольга Евгеньевна

Редактор М. М. Ионина

Подписано в свет 11.11.2024. Регистрационный номер 62
Редакционно-издательская служба Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru