

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

О. Е. Носкова, В. А. Козлов, Н. Г. Полюшкин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ: ПРОСТЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

*Рекомендовано Учебно-методическим советом федерального
государственного бюджетного образовательного учреждения высшего
образования «Красноярский государственный аграрный университет»
для внутривузовского использования в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по направлению 35.03.06 «Агроинженерия»
и специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические
средства»*

Электронное издание

Красноярск 2025

ББК 30.121

Н 84

Рецензенты:

*К.В. Сафонов, доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики
Сибирского государственного университета науки и технологий
им. академика М. Ф. Решетнева*

*О. А. Масанский, кандидат технических наук, заведующий кафедрой
материаловедения и технологии обработки материалов
Сибирского федерального университета*

Носкова, О. Е.

Н 84 **Сопротивление материалов: простые виды деформации**
[Электронный ресурс] / О. Е. Носкова, В. А. Козлов, Н. Г. Полюшкин;
Красноярский государственный аграрный университет. – Красноярск,
2025. – 220 с.

Посвящено теоретическим и практическим основам расчета на прочность и жесткость элементов конструкций под действием простых видов деформаций. Пособие содержит теоретический материал, контрольные вопросы для самопроверки, задания и примеры их выполнения для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 35.03.06 «Агроинженерия» и специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

ББК 30.121

© Носкова О. Е., Козлов В. А., Полюшкин Н. Г., 2025
© ФГБОУ ВО «Красноярский государственный
аграрный университет», 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ	13
1.1. Предмет и задачи курса «Сопротивление материалов»	13
1.2. Реальный объект и расчетная схема.....	14
1.3. Виды деформаций стержня. Понятие о деформированном состоянии материала.....	16
1.4. Основные гипотезы сопротивления материалов	20
Вопросы для самопроверки.....	21
Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	22
2.1. Статические моменты площади сечения. Центр тяжести сечения.....	22
2.2. Моменты инерции плоских фигур	24
2.3. Моменты инерции простых сечений	25
2.4. Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей.....	26
2.5. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей	26
2.6. Положение главных центральных осей инерции и величина главных моментов инерции.....	27
2.7. Осевые моменты сопротивления, радиусы инерции и эллипс инерции.....	29
2.8. Некоторые свойства моментов инерции и осей инерции	31
2.9. Алгоритм определения положения главных осей и величины главных центральных моментов.....	32
Вопросы для самопроверки.....	33
Задания для самостоятельной работы по теме «Геометрические характеристики плоских сечений»	33
Задание 1. Определение геометрических характеристик сложного сечения.....	33
Задание 2. Определение геометрических характеристик составного сечения из прокатных профилей	40
Глава 3. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЯ....	47
3.1. Классификация внешних сил	47
3.2. Внутренние силы. Метод сечений.....	53

3.3. Напряжения в сечении.....	56
Вопросы для самопроверки.....	59
Глава 4. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ.....	60
4.1. Построение эпюр продольных сил.....	60
4.2. Напряжения при растяжении и сжатии. Расчет на прочность и жесткость.....	62
4.3. Условие прочности и жесткости	65
4.4. Определение механических характеристик материалов при растяжении.....	66
4.5. Определение механических характеристик материалов при сжатии	72
4.6. Допускаемые напряжения	74
4.7. Расчеты на прочность	77
4.7.1. Метод допускаемых напряжений	78
4.7.2. Метод предельных состояний.....	79
Вопросы для самопроверки.....	81
Глава 5. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ.....	82
5.1. Расчет на прочность при растяжении и сжатии. Статически определимая задача	82
5.2. Расчет на прочность при растяжении и сжатии. Статически неопределимая задача	96
Задания для самостоятельной работы по теме «Расчет на прочность при растяжении и сжатии»	101
Задание 3. Расчет статически определимой стержневой системы при растяжение и сжатии	101
Задание 4. Расчет статически определимого ступенчатого стержня при растяжение и сжатии	104
Задание 5. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня при растяжение и сжатии	107
Глава 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ	110
6.1. Напряжения в точке. Главные площадки и главные напряжения....	110
6.2. Исследование напряженного состояния при известных главных напряжениях	114
6.3. Случай чистого сдвига.....	116
6.4. Основные понятия теории прочности.....	118
6.5. Теории прочности	120

Вопросы для самопроверки.....	126
Глава 7. СДВИГ	127
7.1 Сдвиг. Расчет на срез	127
7.2. Расчет на смятие	129
7.3. Расчет заклепочных соединений	133
7.4. Расчет сварного соединения	138
Вопросы для самопроверки.....	141
Глава 8. КРУЧЕНИЕ	142
8.1. Применение валов в сельскохозяйственной технике.....	142
8.2. Напряжения и деформации при кручении	145
8.3. Расчет на прочность при кручении	149
8.4. Деформация вала при кручении	149
8.5. Расчет жесткости вала при кручении.....	150
8.6. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка	162
Вопросы для самопроверки.....	169
Задания для самостоятельной работы по теме «Кручение».....	170
Задание 6. Расчет вала на прочность при кручении	170
Задание 7. Расчет валов автомобилей на прочность при кручении..	174
Глава 9. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ	176
9.1. Применение валов в сельскохозяйственной технике.....	176
9.2. Основные понятия и определения.....	178
9.3. Типы опор и опорные реакции	179
9.4. Внутренние усилия при плоском изгибе	181
9.5. Дифференциальные зависимости при изгибе	183
9.6. Нормальные напряжения при чистом изгибе	188
9.7. Напряжения при поперечном изгибе	195
9.7.1. Нормальные напряжения при плоском изгибе	196
9.7.2. Касательные напряжения при плоском изгибе	198
9.8. Расчет на прочность при плоском изгибе.....	205
9.9. Примеры расчета на прочность балки в случае плоского изгиба	209
Задания для самостоятельной работы по теме «Плоский изгиб»	214
Задание 8. Расчет балки на прочность при плоском изгибе	214
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	217
ЛИТЕРАТУРА	218

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Сопротивление материалов» относится к общепрофессиональным инженерным дисциплинам, изучаемым в высших технических учебных заведениях. Данное пособие разработано в соответствии с учебными планами по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» по дисциплине «Сопротивление материалов».

Важной задачей при изучении курса «Сопротивление материалов» является самостоятельная работа студентов. Особую актуальность это приобретает для студентов заочной формы обучения. В связи с этим возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, облегчающих самостоятельное изучение теоретических разделов курса и решение практических задач.

В пособии изложены основные разделы курса «Сопротивление материалов», представлены контрольные вопросы и задания с методическими указаниями и примерами их выполнения для студентов очной и заочной форм обучения, приведены справочные материалы, необходимые при их решении. Содержание пособия обогащено историческими справками из области становления и развития науки сопротивления материалов.

ВВЕДЕНИЕ

Нас окружает прекрасный мир живой и неживой природы, рукотворных и нерукотворных предметов материального мира, существующих по своим собственным, присущим только данным предметам закономерностям. Но в этом богатстве жизни живого и неживого мира есть одно свойство, общее для всех существ и объектов. Это – прочность.

Под прочностью объекта принято понимать его способность, не поддаваясь разрушению, сопротивляться действию внешней нагрузки. Внешняя нагрузка может проявляться по-разному. Она может быть следствием температурных изменений, действия электрических полей, влажности, химических реакций, солнечной радиации и т. д. Однако любое подобное действие в конечном итоге приводит к механическим процессам в материале. Сопротивление этим процессам и является предметом изучения дисциплины «Сопротивление материалов».

Познание человеком прочности начиналось с окружающих его предметов в двух направлениях – в микромире и макромире. Веками продолжалось познание человеком тайн прочности.

На первых порах исследования были интуитивными. Сначала люди учились у природы, создавая свои конструкции по аналогии с ее творениями. Со временем знания накапливались, люди учились на опыте прошлых поколений и на своем собственном. Учитывались удаchi, ошибки, просчеты – это было время накопления эмпирического знания. И только два последних столетия составляют экспериментальный период в познании прочности. Только с появлением техники стала развиваться теория материалов и сооружений. Но в эти два века уместились высшие достижения человеческой мысли, а также становление и развитие многих наук, в том числе механики, из которой со временем выделились отрасли, занимающиеся исследованием прочности: сопротивление материалов, теория упругости и пластичности, строительная механика, теория сооружений и т. д.

Механика – одна из древнейших наук. Механика в переводе с греческого (греч. Μηχανική) означает искусство построения машин. Ее возникновение и развитие неразрывно связаны с развитием нужд практики и производительных сил общества. Раньше других разделов механики под влиянием запросов главным образом строительной техники начинает развиваться статика, элементарные сведения о которой были известны за несколько тысяч лет до нашей эры. К первым

трактатам по механике, появившимся в Древней Греции, относятся натурфилософские сочинения Аристотеля, который и ввел в науку этот термин.

Однако в начале XX в. стало ясно, что механика со всеми ее ответвлениями не в состоянии исследовать до конца такое сложное явление, как прочность. Только с помощью объединения усилий физиков, химиков, технологов и математиков удалось объяснить и описать сложнейшие процессы, происходящие в материале. Именно комплексный подход позволил углубить и развить теорию прочности в наше время.

Благодаря познанию тайн прочности человек не только стал строить надежнее, с неизмеримо меньшим количеством аварий в машинах, механизмах, зданиях и сооружениях, но и сумел проникнуть в структуру материала и найти в нем новые резервы.

Одним из первых теоретиков строительства принято считать римского архитектора и инженера второй половины I в. до н. э. Марка Витрувия. Особое место римский архитектор уделяет единству функционального назначения постройки и художественного решения, но при этом постоянно настаивает на сочетании принципов «прочности, пользы и красоты». Витрувий уделяет серьезное внимание прочности конструкций и сооружений.

И хотя проблема прочности существовала всегда и человечество имело тысячелетний опыт строительства, теории строительной механики не существовало. Поиск прочности происходил интуитивно. Методом многочисленных проб и ошибок человек шел к познанию тайн материала. Это познание начиналось с анализа причин разрушения.

Даже в самых совершенных сооружениях древних можно найти грубые ошибки, свидетельствующие о незнании ими основ сопротивления материалов, строительной механики и теории сооружений. Сооружения городов античного мира разрушались от времени и от наводнений, в частности, потому что при строительстве в них использовался сырцовый кирпич. Обжиг кирпича в античном мире был известен. Однако процессы, происходящие в глине при обжиге, механические, химические, минералогические свойства этого материала представляли загадку для древних строителей. Они считали, что при длительном пребывании на солнце кирпич набирает необходимую прочность. Лишь много позднее выяснилось, что только при температуре от 900 до 1000 °С в глине происходят те превращения, которые делают кирпич долговечным. Другая серьезная причина разрушений –

землетрясения. И храм Артемиды, и Галикарнасский мавзолей, и Колосс Родосский простояли бы гораздо дольше, если бы строители наряду с гибким основанием обеспечили пространственную жесткость конструкции. Сооружения нужно было рассчитывать на ветровую нагрузку и устойчивость, в связи с чем фундаменты и основания выполнялись с учетом работы их на опрокидывание в сочетании с сейсмическими условиями.

Нужно отметить, что недостаток знаний о прочности в строительстве часто ограничивал зодчих в области архитектурных форм. Повальное увлечение античных архитекторов колоннадами возникло не только из эстетических соображений, а еще и потому, что не было материалов, работающих на изгиб для перекрытия больших пролетов. Достаточно сказать, что самая длинная балка, перекрывающая вход в Акрополь, была длиной менее 4 м, а самая длинная плита над усыпальницей в пирамиде Хуфу – не многим более 5 м. Поэтому приходилось ставить колонны близко друг к другу. И лишь позже римляне изобрели конструкции – арки и своды, в которых камень работает на сжатие, что позволило увеличить пролеты, а также изменить облик сооружений.

Леонардо да Винчи проводил интересные испытания на растяжение металлических проволок, лютневых струн, различных волокон. Он сконструировал оригинальное приспособление для определения сопротивления железной проволоки разрыву. «Укрепив железную проволоку длиной в два локтя на чем-либо так, чтобы она крепко держалась, затем, подвесив к ней корзину, через малое отверстие на дне воронки насыпать туда некоторое количество мелкого песка. Как только проволока лопнет, отверстие воронки закроется укрепленной на нее пружиной. Вес песка и место разрыва следует заметить». Далее предполагалось повторить опыт многократно при разной длине проволоки.

Несмотря на то, что выводы Леонардо не всегда были верными, они имеют большое значение для истории механики. Оно состоит в том, что впервые поиск прочности приобрел форму сознательного, специально заданного исследования.

Новый значительный шаг в развитии представлений о прочности через 120 лет после Леонардо да Винчи суждено было сделать еще одному титану Возрождения – Галилею. Величайшая заслуга Галилея заключается в том, что он положил начало развитию двух разделов механики – динамики и сопротивлению материалов как само-

стоятельных наук. Именно Галилей свел большой круг вопросов, связанных с прочностью и разрушением материалов, в одну область знания. Он впервые указал на необходимость построения собственной теории, создания собственной науки – *сопротивления материалов*.

Один вопрос мучил Галилея давно. Как-то он наблюдал за постройкой галер. Когда было решено построить галеру значительных размеров, мастера решили эту проблему просто. Они увеличили вдвое каждый элемент и соединение, создав галеру вдвое большую, но подобную обычной. Каково же было изумление строителей, да и самого Галилея, когда большая галера разрушилась, не начав плаванья. Галилей снова и снова задавал себе один и тот же вопрос: почему при соответственном увеличении материала не возрастает в той же мере способность сопротивления? Почему один гвоздь вдвое толще другого может выдержать груз в 3–4 раза, а может быть, в 8 раз больший, чем первый, рассуждал Галилей, а здесь этого не происходит?

Сегодня мы знаем, что неверно сравнивать гвоздь с галерой, ибо гвоздь – это элемент, а галера – конструкция, и в ней по сравнению с элементом прочность резко снижается.

Блестящие работы Галилея, Гука, Мариотта, Кулона и других ученых XVII–XVIII вв. подготовили почву для возникновения инженерной науки. Особенно бурно она развивалась во Франции, начиная с первой четверти XIX в.

XIX век стал наиболее плодотворным из всех предыдущих для науки о прочности. После тысячелетий интуитивного и опытного познания прочности, после экспериментального изучения материалов в XVII и XVIII вв. усилиями ученых и инженеров в XIX в. была создана теория сопротивления материалов, которая рассматривала элемент как сплошное идеальное упругое тело без дефектов; возникла и начала развиваться теория упругости. Одновременно значительно расширились и усовершенствовались экспериментальные методы исследования прочности.

К концу XIX в. поиски совершенных строительных конструкций еще более активизировались.

Французский инженер-строитель Александр Густав Эйфель в 1889 г. построил в Париже для промышленной выставки знаменитую башню высотой 300 м. Эйфелева башня (рис. 1) вдвое превысила пирамиду Хеопса, которая пять тысячелетий была самым высоким сооружением в мире.



Рисунок 1 – Эйфелева башня

В разных странах возводились уникальные здания, мосты, выставочные павильоны. Теория сооружений интенсивно развивалась. Заметный вклад в ее развитие, а также в строительную практику внесли крупные русские инженеры Н. А. Белюбский, Ф. С. Ясинский, Н. Н. Митинский, Л. Д. Проскуряков. Достойное место в этом ряду принадлежит В. Г. Шухову, выдающемуся строителю и практику.

В теории сооружений В. Г. Шухов внес большой вклад своим изобретением принципиально нового типа сетчатых конструкций. К созданию пространственно работающих сеток привели поиски рационального распределения нагрузок по всему материалу. Одной из эффективных работ в этом направлении является изобретение арочного сетчатого покрытия. Деревянные арки, перекрывающие здание, устанавливают не перпендикулярно стенам, как обычно, а под углом. Под таким же углом, только развернутым в обратную сторону, укладывают другую серию арок. Пересекаясь, две системы арок составляют сетчатую поверхность с ромбовидными ячейками.

В такой оригинальной конструкции перекрытия большинство элементов работают на самый выгодный вид нагрузки – растяжение. Здесь не требуется целой системы межарочных элементов, так как все элементы заменяет ромбовидная сетка: она является и несущей, и ограждающей конструкцией. Павильоны, покрытые шуховскими арочными сетками, будучи в 2–3 раза легче обычных, имели в 2 раза больший запас прочности и отличались простотой изготовления.

Высшим достижением В. Г. Шухова является создание им сетчатых высотных сооружений (рис. 2). Он разработал типовую кон-

струкцию такого сооружения (башня Шухова) и предложил оригинальный метод ее расчета.

Башня Шухова в конструктивном отношении представляет собой однополостной гиперboloид вращения, образованный не вращением гиперболы вокруг некоторой оси, а скольжением прямолинейных наклонных образующих. Сложная форма гиперболической башни создается с помощью прямых металлических стержней.

Шуховские сетчатые гиперboloиды нашли широкое воплощение в водонапорных башнях и маяках.



а



б



в

*Рисунок 2 – Сетчатые гиперboloидные башни В. Г. Шухова:
а – радиобашня; б – водонапорная башня; в – маяк*

Человек с помощью науки сильно углубился в сложный мир прочности. Но познание мира только начиналось.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1.1. Предмет и задачи курса «Соппротивление материалов»

Все современные конструкции, машины, приборы и сооружения изготавливают или строят по заранее разработанным проектам. Проект – это чертеж или ряд чертежей и технических рисунков, в которых указывают все размеры элементов конструкций и деталей машин, необходимых для изготовления, их материалы, а также приводят описание технологии. Таким образом, еще в процессе проектирования необходимо уметь определять размеры элементов и деталей, входящих в состав сооружений или машин. Вполне очевидно, что эти размеры зависят от ряда условий и обстоятельств, в том числе от свойств материала изделия и от предполагаемых внешних воздействий.

Любая конструкция должна обладать надежностью при эксплуатации и быть экономичной.

Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности. Ее экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям. Надежность и экономичность – противоречивые требования.

Прочность – это способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку, не разрушаясь.

Жесткость – способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформации (изменения формы и размеров). При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенной величины, устанавливаемой в соответствии с требованиями, предъявляемыми к конструкции.

Устойчивость – свойство конструкции и ее элементов сохранять свое начальное упругое равновесие при внешних воздействиях.

Долговечность конструкции состоит в ее способности сохранять необходимые для эксплуатации свойства в течение заранее предусмотренного отрезка времени.

Чтобы конструкция в целом отвечала требованиям прочности, жесткости и устойчивости, а следовательно, была надежной в эксплуатации, необходимо придать ее элементам наиболее рациональ-

ную форму и, зная свойства материалов, из которых они будут изготавливаться, определить соответствующие размеры в зависимости от величины и характера действующих сил.

Таким образом, основная задача сопротивления материалов состоит в разработке инженерных методов конструирования и расчета наиболее типичных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при заданной долговечности, одновременно обеспечивающих экономичность.

В сопротивлении материалов широко применяют методы теоретической механики и математического анализа, используют данные из разделов физики, изучающих свойства различных материалов, материаловедения и других наук.

1.2. Реальный объект и расчетная схема

В сопротивлении материалов, как и во всякой отрасли естествознания, исследование вопроса о надежности реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Приступая к расчету элемента конструкции, следует прежде всего установить, что в данном случае является существенным и что несущественным; необходимо провести схематизацию объекта и отбросить те факторы, которые не могут повлиять на работу системы в целом. Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, называется **расчетной схемой**.

При всем разнообразии видов конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. К ним относятся стержни, оболочки, пластинки и массивные тела.

Стержнем, или брусом, называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров. Например, для бруса прямоугольного сечения $l \gg b, l \gg h$ (рис. 3). Геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести площадей поперечных сечений бруса, называется **осью бруса**. В машинах и сооружениях встречаются стержни как прямолинейные, так и криволинейные, как призматические, так и переменного сечения. Примерами прямых стержней являются валы, оси, балки. Примерами кривых стержней могут служить грузоподъемные крюки, звенья цепей и др.

Брус, работающий при растяжении, называется *стержнем*, при изгибе – *балкой*, при кручении – *валом*.

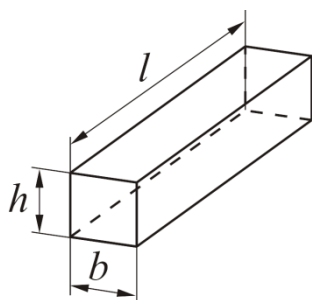


Рисунок 3 – Стержень (брус)

Элемент конструкции, образованный двумя поверхностями, отстоящими друг от друга на малое расстояние, называется *оболочкой* (рис. 4, а).



Рисунок 4 – Оболочки

Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется *пластиной* (рис. 4, б). В строительных конструкциях пластины встречаются в виде плит, перекрытий и фундаментов, панелей зданий, днищ резервуаров.

Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга, называется *массивом* (рис. 5). Это блоки фундаментов, станины машин и т. д.

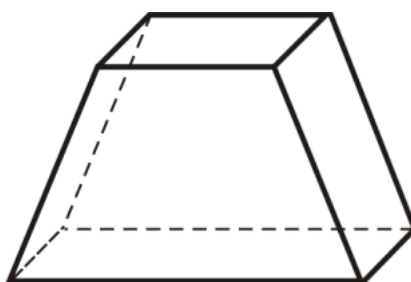


Рисунок 5 – Массив

1.3. Виды деформаций стержня. Понятие о деформированном состоянии материала

Реальные тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Деформации тел происходят вследствие нагружения их внешними силами или изменения температуры. При деформировании тела его точки, а также мысленно проведенные линии или сечения перемещаются в плоскости или пространстве относительно своего исходного положения.

При нагружении твердого тела в нем возникают внутренние силы взаимодействия между частицами, оказывающие противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое те занимали до деформации.

Деформации бывают упругие, т. е. исчезающие после прекращения действия вызвавших их сил, и пластические, или остаточные, — не исчезающие.

С увеличением внешних сил внутренние силы также увеличиваются, однако до известного предела, зависящего от свойств материала. Наступает момент, когда тело не в состоянии сопротивляться дальнейшему увеличению внешних сил. Тогда оно разрушается, т. е. теряет прочность. В большинстве случаев для величины деформаций элементов конструкции устанавливают определенные ограничения.

В сопротивлении материалов изучают следующие основные виды деформаций стержня: *растяжение и сжатие, сдвиг (срез), кручение и изгиб*. Рассматривают и более сложные деформации, получающиеся в результате сочетания нескольких основных деформаций.

Растяжение или сжатие возникает, например, в случае, когда к стержню по его оси приложены противоположно направленные силы P (рис. 6). При этом происходит перемещение сечений вдоль оси стержня, который при растяжении удлиняется, а при сжатии укорачивается.

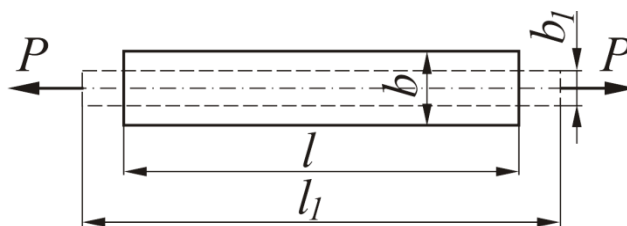


Рисунок 6 – Растяжение прямого стержня

Изменение первоначальной длины стержня называют *абсолютной продольной деформацией*:

$$\Delta l = l_1 - l, \quad (1.1)$$

где l – первоначальная длина стержня до деформации;

l_1 – длина стержня после деформации;

Δl – абсолютная продольная деформация.

Отношение абсолютной продольной деформации к первоначальной длине стержня называют *относительной продольной деформацией*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.2)$$

Деформацию в направлении, перпендикулярном к оси стержня, называют *абсолютной поперечной деформацией*:

$$\Delta b = b_1 - b, \quad (1.3)$$

где b – первоначальный поперечный размер стержня до деформации;

b_1 – поперечный размер стержня после деформации;

Δb – абсолютная поперечная деформация.

Отношение абсолютной поперечной деформации к первоначальному поперечному размеру стержня называют *относительной поперечной деформацией*:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (1.4)$$

Юнг отметил, что при сжатии стержня поперечное сечение стержня увеличивается, а при растяжении – уменьшается. Так вот, отношение упругого уменьшения или увеличения поперечного размера элемента к его продольному удлинению или укорочению является величиной, постоянной для любого материала, и характеризует упругие свойства материала. Эту величину в свое время ввел Симеон Дени Пуассон, и поэтому ее назвали в его честь – *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (1.5)$$

Пуассон исходил из того, что объем элемента до приложения нагрузки и после этого не изменяется. Изменяется лишь форма. В частности при сжатии стержня увеличивается его площадь поперечного сечения и уменьшается высота. При растяжении, наоборот, уменьшается площадь поперечного сечения и увеличивается высота. При таком подходе влияние материала не учитывалось, считалось, что он просто не играет роли. Поэтому коэффициент Пуассона был величиной постоянной, равной 0,25.

В дальнейшем величина и универсальность коэффициента Пуассона подверглись сомнению. Английский исследователь Джордж Грин, решая уравнения теории упругости из условия сохранения энергии, теоретически приходит к тому, что коэффициент Пуассона не может быть постоянной величиной для всех материалов. Опыты показали, что коэффициент Пуассона, как и модуль Юнга, отражает особенности атомных взаимодействий, т. е. зависит от фундаментальных свойств материи. Объем деформированного тела, как оказалось, может распределяться за счет перегруппировки атомных связей в пространственной структуре вещества. Поэтому для некоторых материалов коэффициент Пуассона может быть даже близок к нулю. Например для металла бериллия он равен 0,03, а для алмаза – 0,07. Значит, эти материалы, растягиваясь в длину, почти не сокращают атомных расстояний в поперечном направлении, настолько эти связи жестки при сближении. Теперь существует таблица значений коэффициента Пуассона для различных материалов. Некоторые значения коэффициента Пуассона для различных материалов приведены далее в таблице 4.

Сдвиг или срез возникает, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения стержня одно относительно другого при неизменном расстоянии между ними (рис. 7). Величина смещения Δs называется *абсолютным сдвигом*. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию a между смещающимися плоскостями (тангенс угла γ) называют *относительным сдвигом*. Вследствие малости угла γ при упругих деформациях его тангенс принимают равным углу перекося рассматриваемого элемента. Следовательно, относительный сдвиг определяется следующим образом:

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \quad (1.6)$$

Относительный сдвиг является угловой деформацией, характеризующей перекося элемента. На сдвиг или срез работают, например, заклепки и болты, скрепляющие элементы, которые внешние силы стремятся сдвинуть один относительно другого.

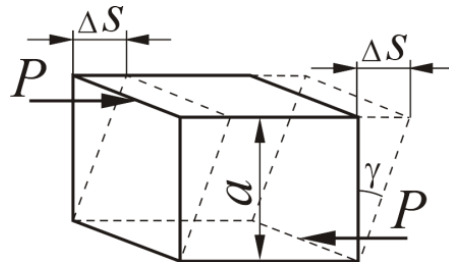


Рисунок 7 – Деформация сдвига

Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно оси стержня (рис. 8).

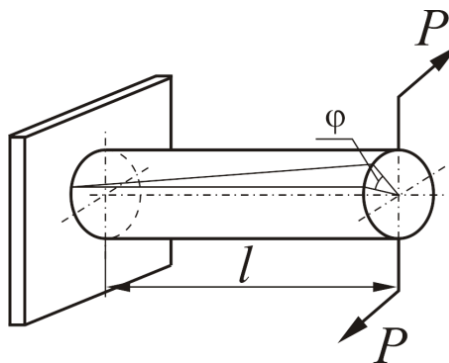


Рисунок 8 – Деформация кручения

Деформация кручения сопровождается поворотом поперечных сечений стержня относительно друг друга вокруг его оси. Угол поворота одного сечения стержня относительно другого, находящегося на расстоянии l , называют *углом закручивания φ на длине l* . Отношение угла закручивания φ к длине l называют *относительным углом закручивания*:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (1.7)$$

На кручение работают валы, шпиндели токарных и сверлильных станков и другие детали.

1.4. Основные гипотезы сопротивления материалов

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Предполагается, что материал сплошь заполняет форму тела. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Материал предполагается однородным и изотропным, т. е. в любом объеме и любом направлении свойства материала считаются одинаковыми. Хотя кристаллы, из которых состоят металлы, анизотропны, но их хаотическое расположение дает возможность считать макрообъемы металлов изотропными.

В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо. Например, к анизотропным материалам относятся древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон существенно различны, армированные материалы и т. п.

3. *Гипотеза о малости деформаций.* Предполагается, что деформации малы по сравнению с размерами тела. Это позволяет в большинстве случаев пренебречь изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела. В некоторых случаях от этого принципа приходится отступать. Такие отступления оговариваются особо.

Малые относительные деформации рассматривают как бесконечно малые величины.

4. *Гипотеза об идеальной упругости материала.* Все тела предполагаются абсолютно упругими. Отклонения от идеальной упругости, которые всегда наблюдаются при нагружении реальных тел, не существенны и ими пренебрегают до определенных пределов деформирования.

Большинство задач сопротивления материалов решают в предположении линейно деформируемого тела, т. е. такого, при котором справедлив закон Гука (будет рассмотрен далее), выражающий прямую пропорциональность между деформациями и нагрузками.

Перечисленные выше гипотезы, а также некоторые другие, о которых будет сказано дальше, позволяют решать широкий круг задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными практики.

Помимо рассмотренных выше допущений в сопротивлении материалов, вводится ряд гипотез, позволяющих значительно упростить расчет.

Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции): результат совместного воздействия нескольких сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов воздействия каждой из них в отдельности.

Принцип Сен-Венана (принцип локальности): на достаточном удалении от места приложения нагрузки конкретный способ осуществления этой нагрузки можно не учитывать.

Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений): поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси при действии нагрузки.

Вопросы для самопроверки

1. Чем прочность отличается от жесткости?
2. Что такое расчетная схема? Чем она отличается от реального объекта?
3. Какие геометрические формы используют для схематизации элементов конструкций?
4. Какие виды брусьев существуют? В чем их отличие?
5. Перечислите основные виды деформаций.
6. Как называют деформации, исчезающие после прекращения действия вызвавших их сил?
7. При каком виде нагружения возникает деформация растяжения (сжатия)?
8. Каковы единицы измерения абсолютной и относительной продольной деформации?
9. Как определить коэффициент Пуассона?
10. Какие деформации возникают при сдвиге и кручении?
11. Чем изотропный материал отличается от анизотропного?
12. В чем смысл гипотезы Бернулли?

Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Как уже отмечалось, основным объектом, изучаемым в курсе сопротивления материалов, является брус. Сопротивление бруса различным видам деформации часто зависит не только от его материала и размеров, но и от очертаний оси, формы поперечных сечений и их расположения. Поэтому в настоящей главе, отвлекаясь от физических свойств изучаемого объекта, рассмотрим основные геометрические характеристики его поперечных сечений, определяющие сопротивление различным видам деформаций.

2.1. Статические моменты площади сечения. Центр тяжести сечения

Рассмотрим произвольную фигуру (поперечное сечение бруса), связанную с координатными осями Ox и Oy (рис. 9). Выделим элемент площади dF с координатами x, y . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение и для момента площади, которое называется *статическим моментом*. Так, произведение элемента площади dF на расстояние y от оси Ox называется статическим моментом элемента площади относительно оси Ox :

$$dS_x = ydF,$$

а произведение элемента площади dF на расстояние x от оси Oy называется статическим моментом элемента площади относительно оси Oy :

$$dS_y = xdF.$$

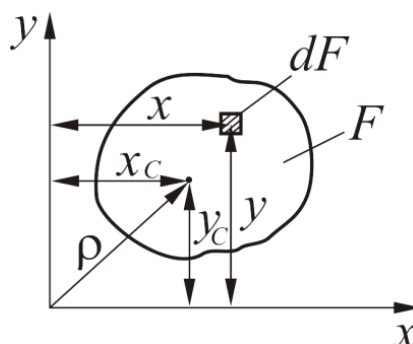


Рисунок 9 – Определение статического момента сечения

Просуммировав такие произведения по всей площади фигуры, получим соответственно статические моменты относительно осей x и y :

$$S_x = \int_F y dF, \quad (2.1)$$

$$S_y = \int_F x dF. \quad (2.2)$$

Статические моменты измеряются в $см^3$.

Если известно положение центра тяжести x_c и y_c (см. рис. 9) и его площадь F , то статические моменты определяют по формулам

$$S_x = Fy_c, \quad S_y = Fx_c. \quad (2.3)$$

Отсюда координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (2.4)$$

Из формул (2.3) следует, что статические моменты площади относительно *центральных осей* (осей, проходящих через центр тяжести) равны нулю.

Для вычисления статических моментов сложной фигуры ее разбивают на простые части, для каждой из которых известна площадь F_i и положение центра тяжести (x_i, y_i) . Статические моменты всей фигуры относительно осей x и y определяют по формулам

$$\begin{cases} S_x = F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n = \sum_{i=1} F_iy_i \\ S_y = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n = \sum_{i=1} F_ix_i \end{cases}. \quad (2.5)$$

Координаты центра тяжести сложной фигуры определяют по формулам

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_ix_i}{\sum F_i} \\ y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{\sum F_iy_i}{\sum F_i} \end{cases}. \quad (2.6)$$

2.2. Моменты инерции плоских фигур

Осевым моментом инерции площади фигуры называют интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от рассматриваемой оси (см. рис. 9). Моменты инерции произвольной фигуры относительно осей x и y :

$$\begin{cases} I_x = \int_F y^2 dF \\ I_y = \int_F x^2 dF \end{cases} \quad (2.7)$$

Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса) называется интеграл произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от полюса:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.8)$$

Если через полюс проведена система взаимно перпендикулярных осей x и y , то $\rho^2 = x^2 + y^2$ (см. рис. 9), следовательно

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (2.9)$$

Центробежным моментом инерции называют интеграл произведений площадей элементарных площадок на их расстояния от координатных осей x и y :

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (2.10)$$

Осевые, полярный и центробежный моменты инерции имеют размерность см^4 .

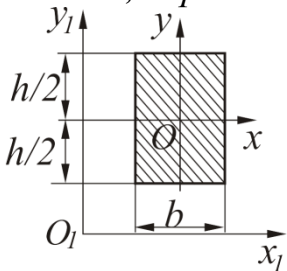
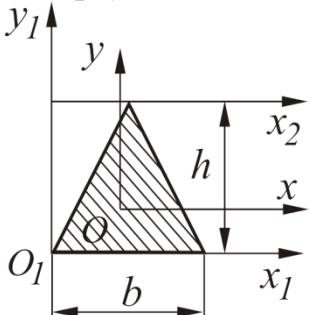
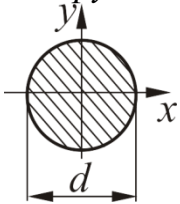
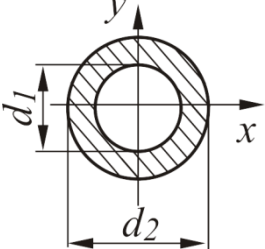
Как видно из формул (2,7)–(2.10), статические и центробежный моменты инерции в зависимости от выбора системы координат могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*. В свою очередь, главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называют *главными центральными осями*.

2.3. Моменты инерции простых сечений

Пользуясь формулами для определения моментов инерции, определим осевые и полярные моменты инерции простых плоских сечений. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Моменты инерции простых плоских сечений

Форма сечения	Формула для определения моментов инерции
<i>Прямоугольник, параллелограмм</i> 	$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_{x1} = \frac{bh^3}{3} \quad I_{y1} = \frac{hb^3}{3}$
<i>Треугольник</i> 	$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_{x1} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x2} = \frac{bh^3}{4} \quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{72}$
<i>Круг</i> 	$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$
<i>Кольцо</i> 	$I_\rho = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi d_2}{32} (1 - c^4)$ $I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d_2}{64} (1 - c^4)$ $c = \frac{d_1}{d_2}$

2.4. Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей

Если известны моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} сечения относительно центральных осей O_x , O_y (рис. 10), то моменты инерции I_{x_1} , I_{y_1} и $I_{x_1y_1}$ относительно осей O_{x_1} , O_{y_1} можно определить по формулам:

$$I_{x_1} = I_x + b^2F, \quad I_{y_1} = I_y + a^2F, \quad I_{x_1y_1} = I_{xy} + abF. \quad (2.11)$$

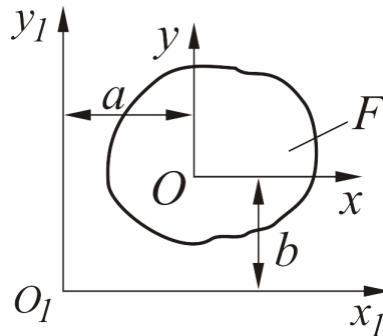


Рисунок 10 – Определение моментов инерции при параллельном переносе осей

Необходимо отметить, что параметры a и b , входящие в формулы (2.11), следует подставлять с учетом их знака. Из этих формул видно, что из всех моментов инерции относительно ряда параллельных осей центральные моменты инерции будут наименьшими.

2.5. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей

Если известны моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} сечения относительно осей O_x , O_y (рис. 11), то моменты инерции I_{x_1} , I_{y_1} и $I_{x_1y_1}$ относительно осей O_{x_1} , O_{y_1} , повернутых к осям O_x , O_y на угол α , можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{y_1} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{x_1y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\}. \quad (2.12)$$

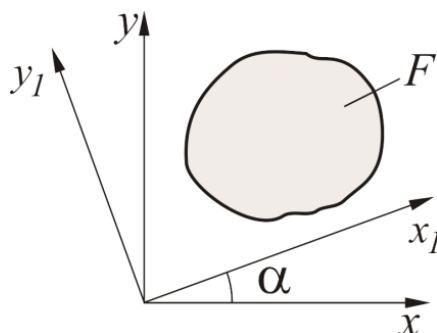


Рисунок 11 – Определение моментов инерции при повороте осей

Складывая почленно первые две формулы системы (2.12), получают полезное свойство:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y. \quad (2.13)$$

Таким образом, при повороте прямоугольных осей координат сумма моментов инерции не изменяется и равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

2.6. Положение главных центральных осей инерции и величина главных моментов инерции

Главными осями являются такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают максимальное и минимальное значения. Если начало координат таких осей совпадает с центром тяжести сечения, то они называются *главными центральными осями*, а моменты инерции относительно этих осей называются *главными центральными моментами инерции*.

Наибольшее практическое значение имеют главные центральные оси. Такие оси обозначают буквами *u* и *v* (рис. 12). Следовательно, $I_{uv} = 0$.

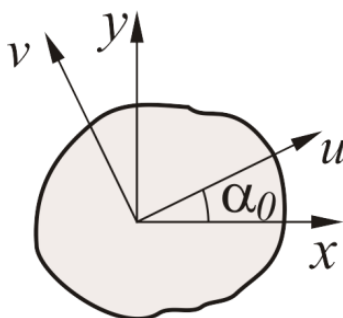


Рисунок 12 – Положение главных центральных осей

Величины главных центральных моментов инерции и положение главных осей можно найти по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right] & a \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) \mp \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right] & b \\ \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} & в \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

где α_0 – угол, определяющий положение главных осей uOv относительно xOy .

В системе уравнений (2.14) верхние знаки следует брать при $I_x > I_y$, а нижние – при $I_x < I_y$.

Если угол α_0 положительный, то для определения положения одной из главных осей необходимо ось x повернуть на угол α_0 против хода часовой стрелки, а если α_0 отрицательный – по ходу часовой стрелки. При этом вторая главная ось будет перпендикулярна полученной главной оси.

Одна из главных осей будет осью максимум (относительно нее осевой момент инерции максимален), а другая – осью минимум (относительно нее осевой момент инерции сечения минимален).

Ось максимума всегда составляет меньший угол с той из исходных осей (x или y), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение. Это обстоятельство позволяет легко устанавливать, какая из главных осей инерции является осью максимум, какая – осью минимум.

Учитывая, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей – величина постоянная, можно заключить, что *относительно одной из главных осей момент инерции имеет максимальное значение, а относительно другой – минимальное.*

2.7. Осевые моменты сопротивления, радиусы инерции и эллипс инерции

Осевым моментом сопротивления сечения относительно оси (W_x , W_y) называется геометрическая характеристика сечения, вычисляемая по одной из формул

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \frac{I_x}{y_{\max}} \\ W_y &= \frac{I_y}{x_{\max}} \end{aligned} \right\}, \quad (2.15)$$

где $y_{\max}$ и $x_{\max}$ – расстояния от соответствующей оси до наиболее удаленных точек сечения (рис. 13).

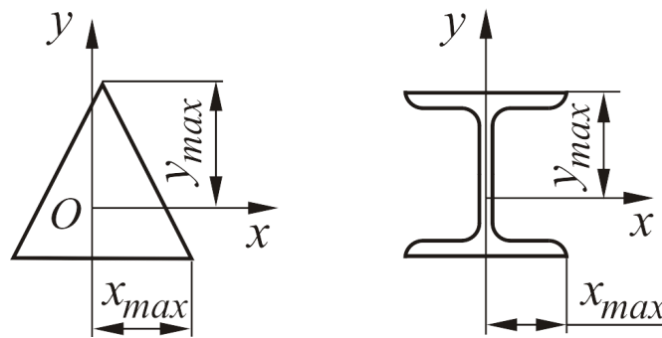


Рисунок 13 – Определение расстояния от соответствующей оси до наиболее удаленных точек сечения

Полярным моментом сопротивления сечения W_p называется геометрическая характеристика сечения, вычисляемая по формуле

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \quad (2.16)$$

где I_p – полярный момент инерции;

$\rho_{\max}$ – расстояние от центра тяжести сечения до наиболее удаленной его точки.

Радиусом инерции сечения относительно некоторой оси, например x , называется величина i_x , определяемая из соотношения

$$I_x = F \cdot i_x^2. \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что радиус инерции равен расстоянию от оси x до той точки, в которой следует сосредоточить (условно) площадь сечения F , чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего сечения.

Радиусы инерции сечения относительно соответствующих координатных осей будут определяться следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{I_x}{F}} \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{F}} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Радиусы инерции, соответствующие главным центральным осям, называются главными радиусами инерции и определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} i_{\max} &= \sqrt{\frac{I_{\max}}{F}} \\ i_{\min} &= \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

На главных центральных осях инерции построим эллипс с полуосями, равными главным радиусам инерции, причем вдоль оси u отложим радиус инерции i_v , а вдоль оси v – радиус инерции i_u (рис. 14).

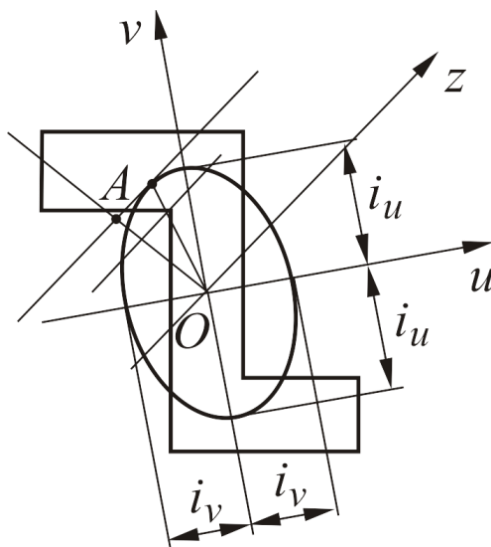


Рисунок 14 – Эллипс инерции

Такой эллипс, называемый *эллипсом инерции*, обладает следующим замечательным свойством: радиус инерции относительно любой центральной оси z определяется как перпендикуляр OA , проведенный из центра эллипса к его касательной, параллельной данной оси. Для получения же точки касания достаточно провести параллельно данной оси z любую хорду. Точка пересечения эллипса с прямой, соединяющей центр тяжести O и середину хорды, и есть точка касания. Измерив затем отрезок $OA = i_z$, находим момент инерции:

$$I_z = F \cdot i_z^2. \quad (2.20)$$

2.8. Некоторые свойства моментов инерции и осей инерции

1. При повороте двух взаимно перпендикулярных осей на угол 90° или при изменении направления одной из осей на противоположное центробежный момент инерции меняет знак (рис. 15).

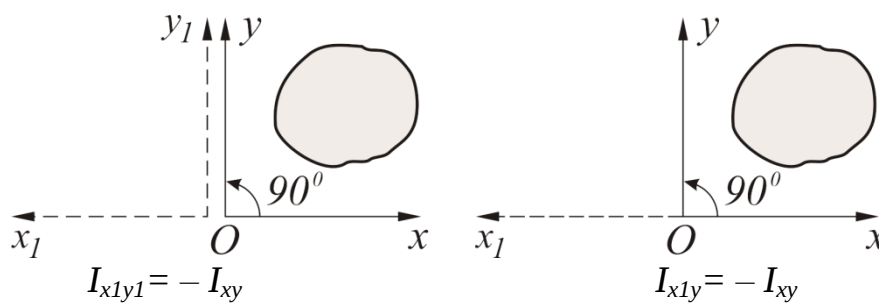


Рисунок 15 – Определение моментов инерции при повороте осей на угол 90°

2. Ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей (рис. 16).

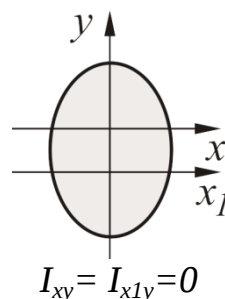


Рисунок 16 – Свойство симметрии

3. Главная центральная ось сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей.

4. Если моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных главных осей, проходящих через некоторую точку сечения, равны по величине, то все оси, проходящие через эту точку, также являются главными и моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы (рис. 17).

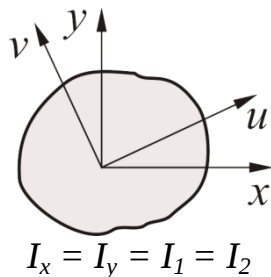


Рисунок 17 – Определение пар главных осей

5. Если для множества осей, проходящих через некоторую точку сечения, можно указать более одной пары несовпадающих главных осей, то все оси, проходящие через эту точку, являются главными (рис. 18).

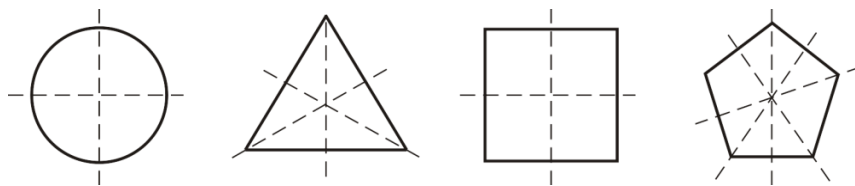


Рисунок 18 – Фигуры, обладающие несколькими осями симметрии

2.9. Алгоритм определения положения главных осей и величины главных центральных моментов

Можно рекомендовать следующий порядок определения положения главных осей и величины главных центральных моментов инерции сложного профиля, состоящего из простых частей, характеристики которых легко определить:

1. Проводим произвольную систему прямоугольных координат. Разбиваем фигуру на простые части и определяем по формулам (2.6) положение ее центра тяжести.

2. Проводим начальную систему центральных осей x и y так, чтобы вычислить моменты инерции частей фигуры относительно этих осей было наиболее просто. Для этого определяем моменты инерции частей фигуры относительно их центральных осей, проведенных параллельно осям x , y , и используем формулы перехода к параллельным осям (2.11). Таким образом, получаем значения I_x , I_y и I_{xy} .

3. Определяем из формулы (2.14, в) угол наклона главных центральных осей, причем ось, проведенную под меньшим углом (положительным или отрицательным), обозначаем буквой u , а перпендикулярную к ней – буквой v .

4. По формулам (2.14 а, б) определяем значения главных центральных моментов инерции.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите единицу измерения статического момента инерции.
2. Как определить центр тяжести сложной фигуры?
3. Запишите зависимость между осевыми и полярным моментами инерции.
4. Могут ли осевые моменты инерции быть отрицательными?
5. Как называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю?
6. В чем отличие главных осей инерции от главных центральных осей?
7. Запишите формулы для определения осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.
8. Какие значения принимают осевые моменты инерции относительно главных осей?
9. В чем состоит физический смысл радиуса инерции?
10. Как изменится центробежный момент инерции при повороте осей на 90° ?
11. У каких сечений более одной пары несовпадающих главных осей?

Задания для самостоятельной работы по теме «Геометрические характеристики плоских сечений»

Задание 1. Определение геометрических характеристик сложного сечения.

Вариант числового значения a назначается преподавателем, а вариант схемы выбирается по номеру студента в списке группы.

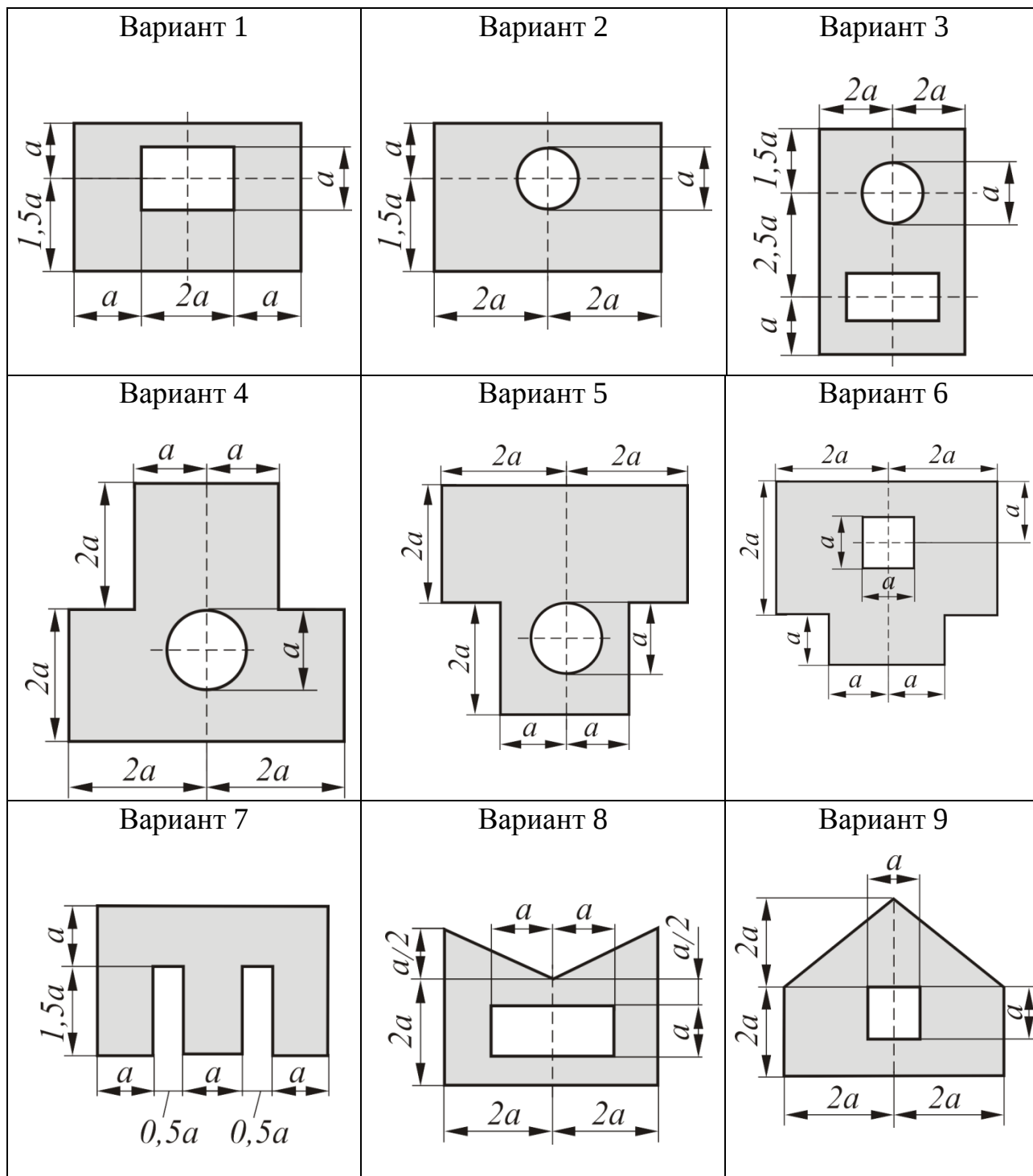
Для заданного сложного сечения необходимо:

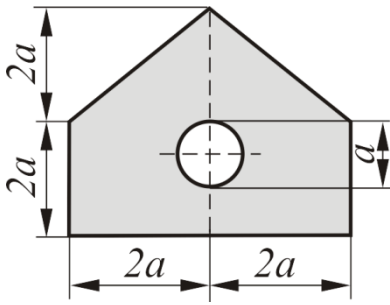
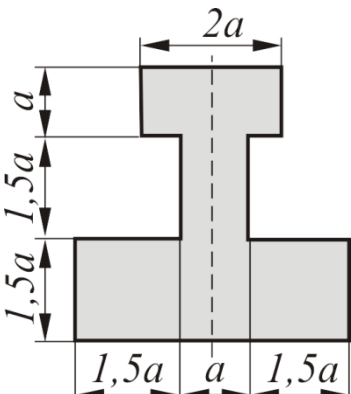
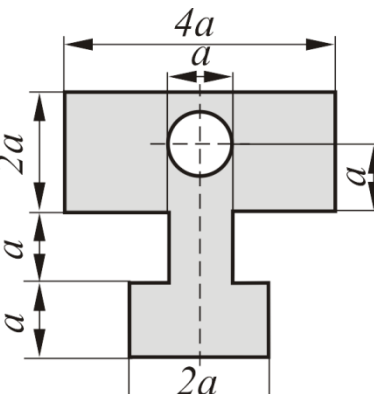
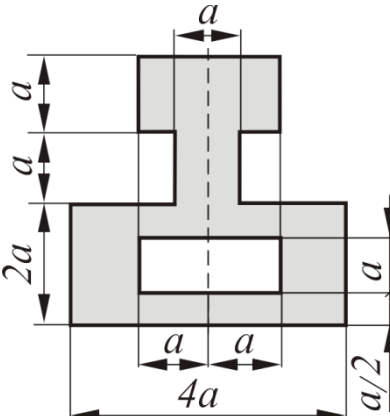
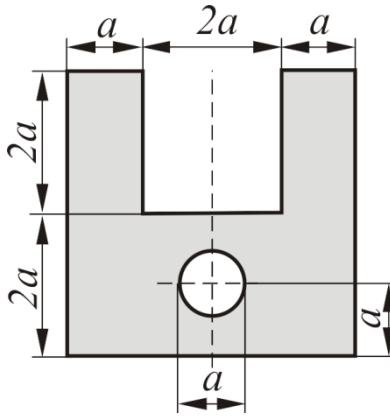
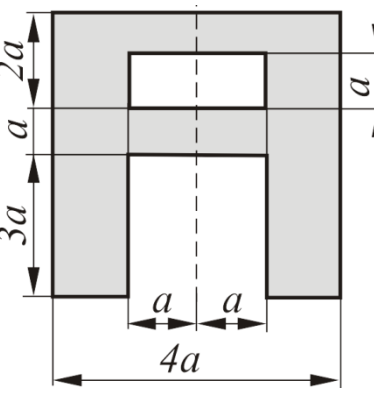
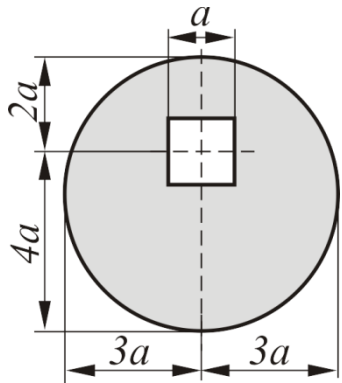
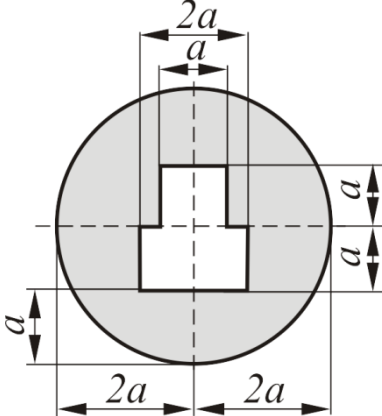
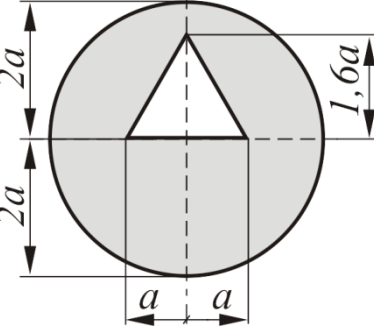
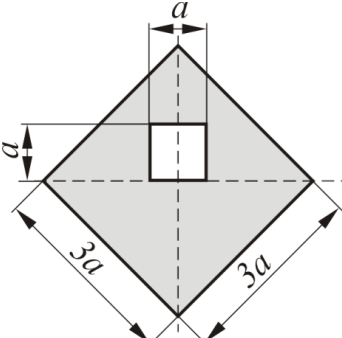
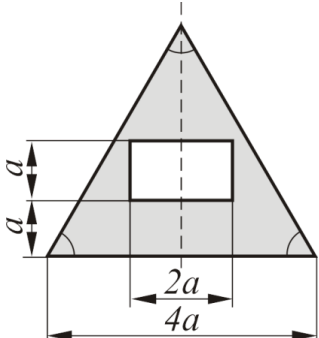
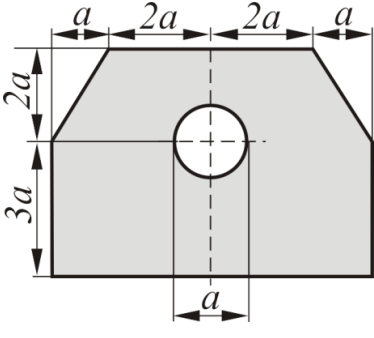
1. Определить координаты центра тяжести сечения.
2. Определить статический момент инерции.
3. Определить главные моменты инерции и угол наклона главных осей.

Числовые значения к заданию 1

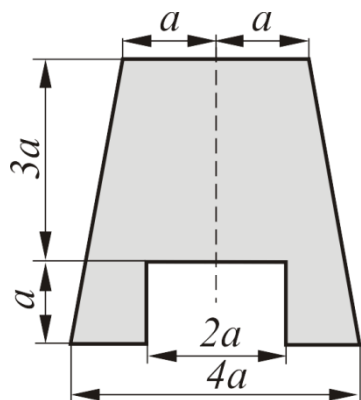
Вариант	1	2	3	4	5	6
a (см)	10	20	25	30	5	15

Схемы к заданию 1

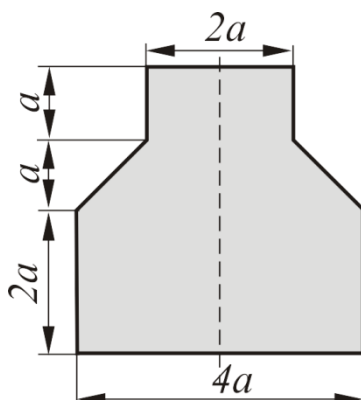


Вариант 10 	Вариант 11 	Вариант 12 
Вариант 13 	Вариант 14 	Вариант 15 
Вариант 16 	Вариант 17 	Вариант 18 
Вариант 19 	Вариант 20 	Вариант 20 

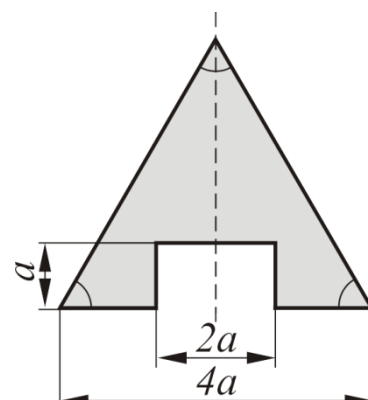
Вариант 22



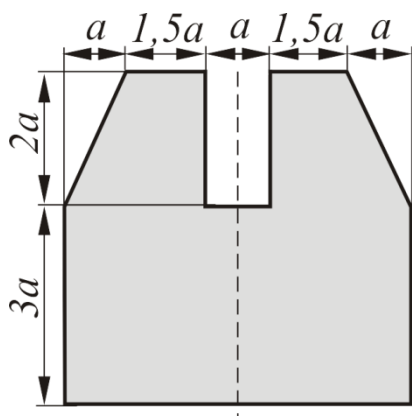
Вариант 23



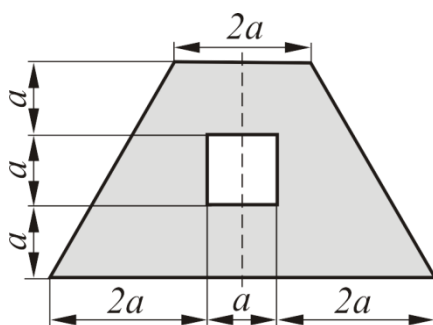
Вариант 24



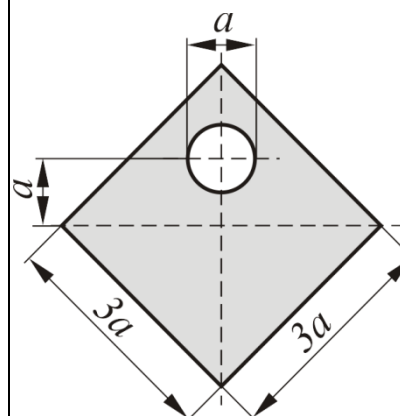
Вариант 25



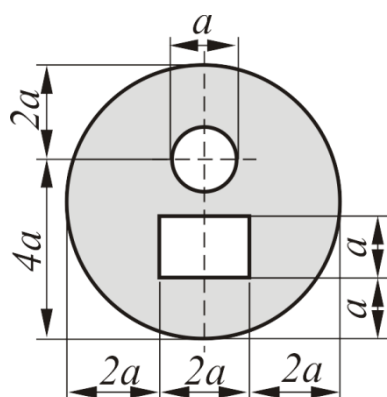
Вариант 26



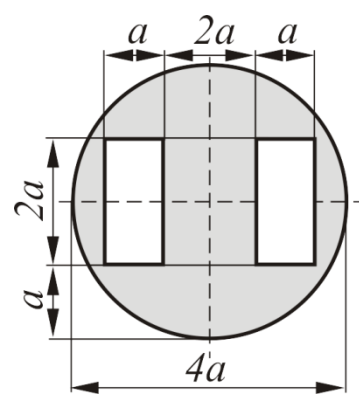
Вариант 27



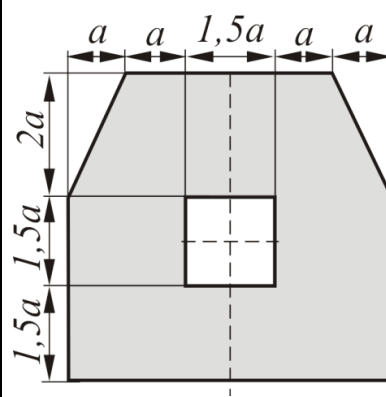
Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30



Пример выполнения задания 1

Дано плоское сечение, размеры которого указаны в сантиметрах на рисунке 19. Необходимо определить положение главных центральных осей и моменты инерции относительно главных центральных осей.

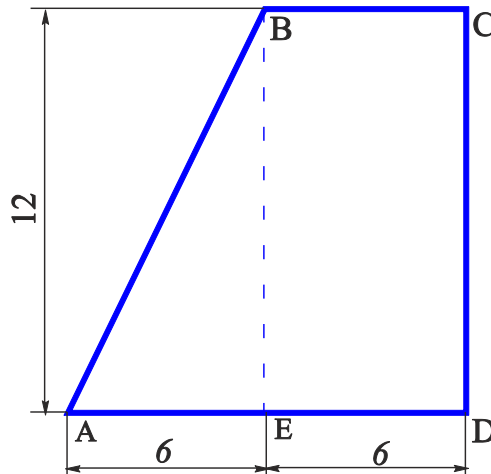


Рисунок 19 – Плоское сечение

Решение

Разобьем трапецию на прямоугольник $BCDE$ и треугольник ABE (рис. 20), найдем их моменты инерции относительно их собственных центральных осей ($x_1O_1y_1$ – для прямоугольника, $x_2O_2y_2$ – для треугольника) и площадь сечения.

Для прямоугольника:

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ см}^4, \quad I_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4,$$

$$I_{x1y1} = 0 \text{ см}^4, \quad F_1 = h \cdot b = 72 \text{ см}^2.$$

Для прямоугольного треугольника:

$$I_{x2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{6 \cdot 12^3}{36} = 288 \text{ см}^4, \quad I_{y2} = \frac{hb^3}{36} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4,$$

$$I_{x2y2} = \frac{h^2b^2}{72} = \frac{12^2 \cdot 6^2}{72} = 72 \text{ см}^4, \quad F_2 = \frac{hb}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ см}^2.$$

Площадь всей фигуры $F = F_1 + F_2 = 108 \text{ см}^2$.

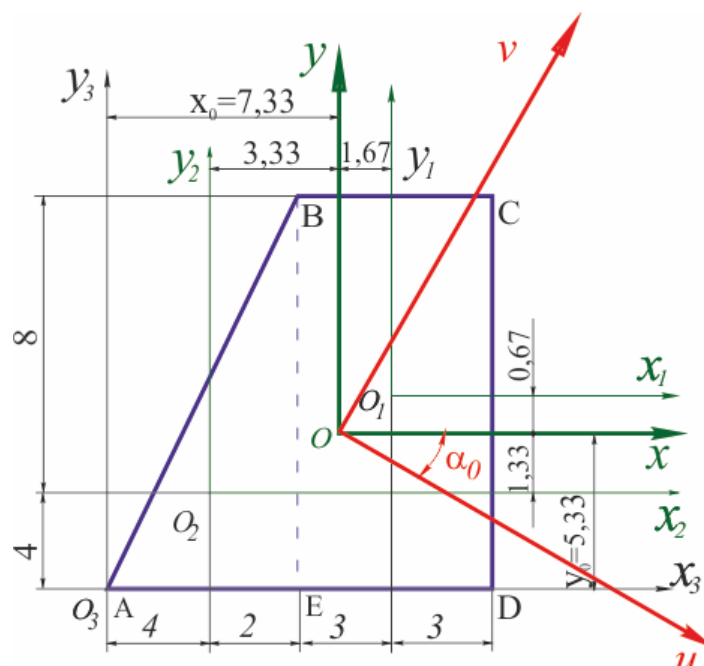


Рисунок 20 – Определение положения главных центральных осей

Для определения положения центра тяжести O всего сечения выберем вспомогательные оси $x_3O_3y_3$, проведя ось x_3 через основание фигуры. Определим статические моменты сечения относительно этих осей по формулам (2.3) и координаты x_0 и y_0 центра тяжести по формулам (2.4):

$$S_{x3} = F_1y_1 + F_2y_2 = 72 \cdot 6 + 36 \cdot 4 = 576 \text{ см}^3;$$

$$S_{y3} = F_1x_1 + F_2x_2 = 72 \cdot 9 + 36 \cdot 4 = 792 \text{ см}^3,$$

где x_1, y_1 – расстояния от центра тяжести прямоугольника O_1 до осей O_1x_1 и O_1y_1 ;

x_2, y_2 – расстояния от центра тяжести треугольника O_2 до осей O_2x_2 и O_2y_2 ;

$$y_0 = \frac{S_{x3}}{F} = \frac{576}{108} = 5,33 \text{ см} \quad x_0 = \frac{S_{y3}}{F} = \frac{792}{108} = 7,33 \text{ см}.$$

Для составного сечения центр тяжести O должен располагаться на линии O_1O_2 , соединяющей центры тяжести этих фигур.

Через центр тяжести O проведем центральные оси xOy , параллельные центральным осям O_3x_3 и O_3y_3 . Координаты центров тяжести прямоугольника и треугольника в системе координат Oxy равны: $a_1=1,67 \text{ см}$; $b_1=0,67 \text{ см}$; $a_2=-3,33 \text{ см}$; $b_2=-1,33 \text{ см}$.

По формулам (2.11) определим моменты инерции сечения относительно осей Ox и Oy .

$$I_x = I_{x1} + F_1 b_1^2 + I_{x2} + F_2 b_2^2 = 864 + 72 \cdot 0,67^2 + 288 + 36(-1,33)^2 = 1248 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y1} + F_1 a_1^2 + I_{y2} + F_2 a_2^2 = 216 + 72 \cdot 1,67^2 + 72 + 36(-3,33)^2 = 888 \text{ см}^4,$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= i_{x1y1} + F_1 a_1 b_1 + I_{x2y2} + F_2 a_2 b_2 = \\ &= 0 + 72 \cdot 1,67 \cdot 0,67 + 72 + 36(-3,33)(-1,33) = 312 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

По формулам (2.14) найдем величины главных моментов инерции и угол наклона главных осей к оси Ox :

$$\begin{aligned} I_{u,v} &= \frac{1}{2} \left[(I_x + i_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right] = \\ &= \frac{1248 + 888}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1248 - 888}{2} \right)^2 + 312^2}, \end{aligned}$$

$$I_u = 1068 + 360 = 1428 \text{ см}^4, \quad I_v = 1068 - 360 = 708 \text{ см}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 312}{888 - 1248} = -1,73,$$

$$\alpha_0 = -30^\circ.$$

Положения главных осей показаны на рисунке 20. Так как угол α_0 получился отрицательный, то главные оси необходимо повернуть по ходу часовой стрелки.

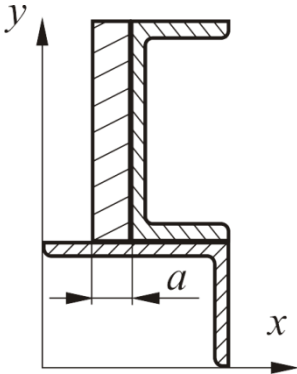
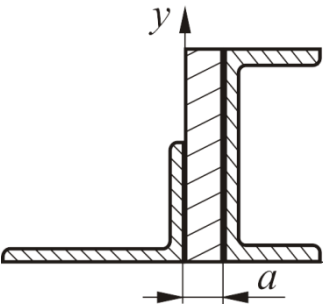
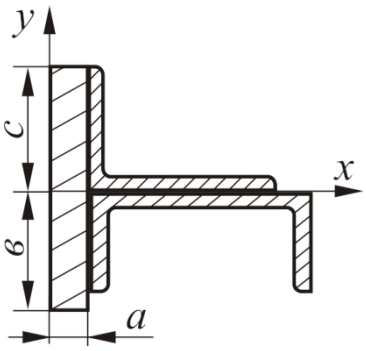
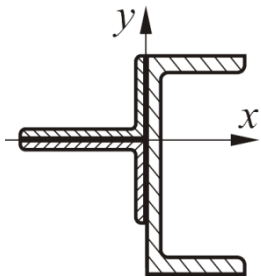
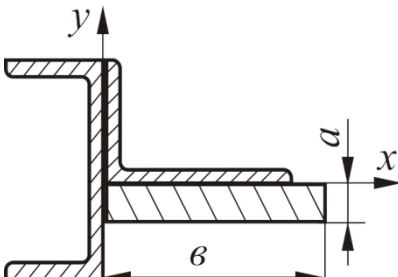
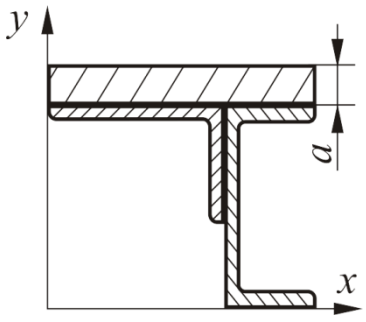
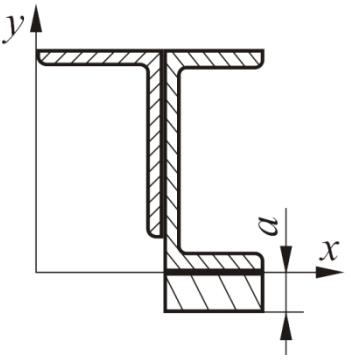
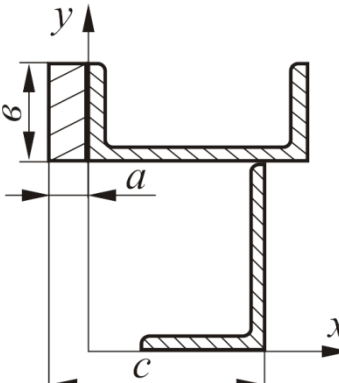
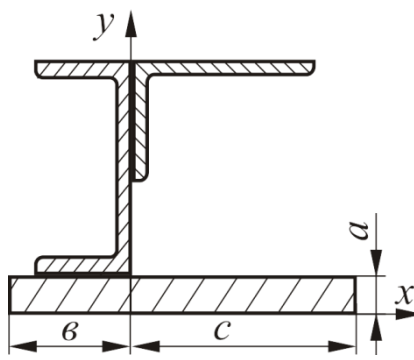
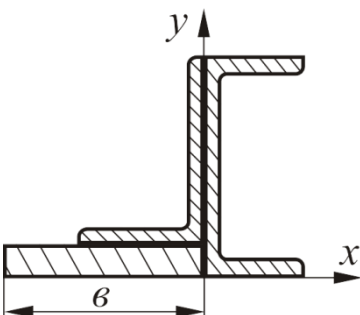
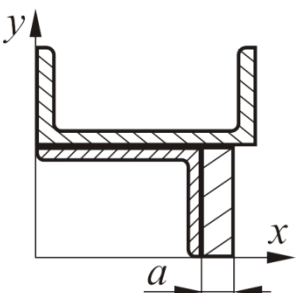
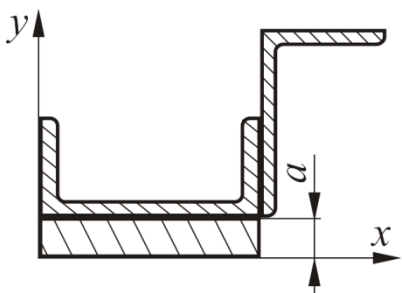
Задание 2. Определение геометрических характеристик составного сечения из прокатных профилей.

Вариант задания в таблице 2 назначается преподавателем, а в схеме выбирается по номеру студента в списке группы.

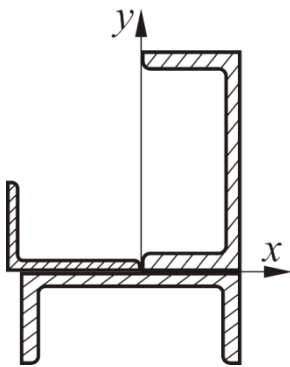
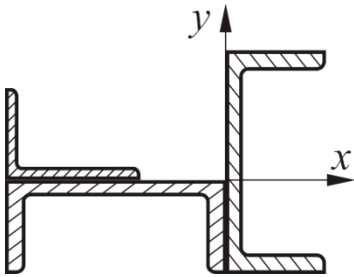
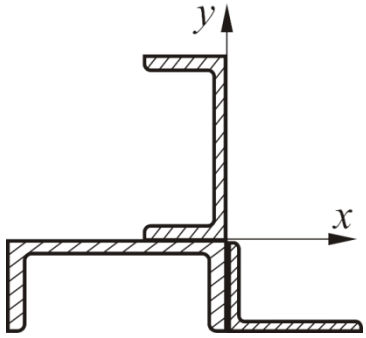
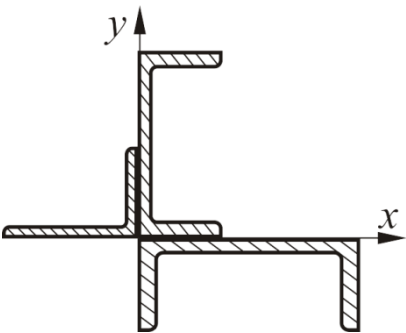
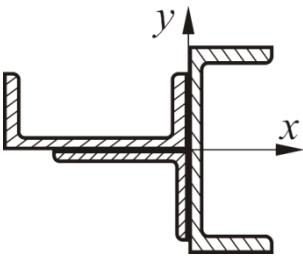
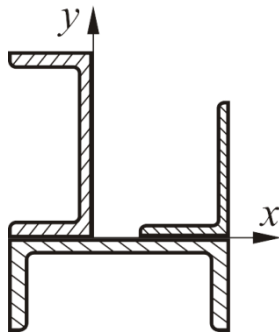
Таблица 2 – Размеры прокатных профилей

Вариант				<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
	Номер швеллера	Номер равнобокого уголка, мм	Размеры неравнобокого уголка, мм	мм	мм	мм
1	20	–	140×90×8	20	–	–
2	24	8	–	30	–	–
3	30	–	80×50×6	–	–	–
4	40	14	–	–	–	–
5	20	–	90×56×6	25	100	–
6	18	–	100×63×6	20	170	–
7	20a	–	180×110×10	30	–	–
8	24	20	–	25	90	140
9	16	–	70×45×5	20	80	100
10	18	–	160×100×12	–	120	–
11	20	–	160×100×12	16	–	–
12	16a	–	100×63×6	25	–	–
13	22	–	110×70×8	20	–	–
14	18a	7	–	20	90	60
15	24a	–	125×80×8	20	–	–
16	16a	–	140×90×8	30	170	–
17	14	–	110×70×8	25	160	–
18	8	5	–	–	–	–
19	20	–	140×90×10	–	–	–
20	16	–	80×50×6	–	–	–
21	8	–	80×50×6	20	130	40
22	22	–	110×70×8	–	–	–
23	24	9	–	–	–	–
24	20a	10	–	–	–	–
25	18	–	125×80×8	–	–	–
26	18a	–	140×90×8	–	–	–
27	18	–	110×70×8	–	–	–
28	16a	8	–	–	–	–
29	20	–	180×110×10	–	–	–
30	14	7	–	–	–	–

Схемы к заданию 2

Вариант 1 	Вариант 2 	Вариант 3 
Вариант 4 	Вариант 5 	Вариант 6 
Вариант 7 	Вариант 8 	Вариант 9 
Вариант 10 	Вариант 11 	Вариант 12 

Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24

Вариант 25 	Вариант 26 	Вариант 27 
Вариант 28 	Вариант 29 	Вариант 30 

Пример выполнения задания 2

Дано. Найти положение главных центральных осей инерции и значение главных моментов инерции для сечения, состоящего из равнобокого уголка 90×7 и двутавра № 22 (рис. 21).

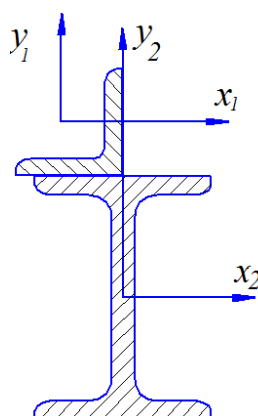


Рисунок 21 – Профиль составного сечения

Решение

1. Из сортамента выбираем необходимые данные.

Для уголка равнобокого 90×7 по ГОСТ 8509-89 $b = 90$ мм, $d = 7$ мм, $z_0 = 2,47$ см, $F_1 = 12,28$ см², $I_{x_1} = I_{y_1} = 94,3$ см⁴, $I_{\max} = 149,6$ см⁴, $I_{\min} = 38,94$ см⁴ (рис. 22).

Для двутавра по ГОСТ 8239-89 $h = 220$ мм, $b = 110$ мм, $d = 5,7$ мм, $F_2 = 30,6$ см², $I_{x_2} = 2550$ см⁴, $I_{y_2} = 157$ см⁴ (рис. 23).

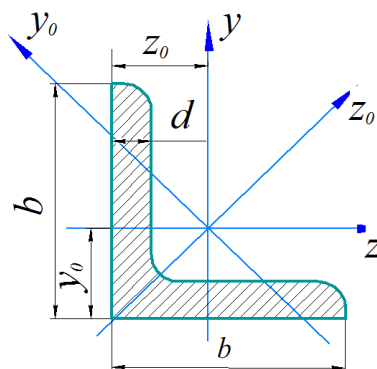


Рисунок 22 – Равнобокий уголок

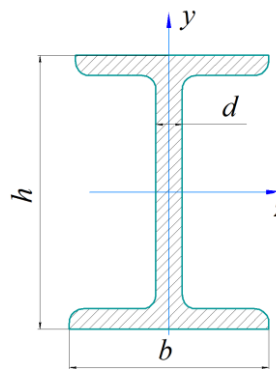


Рисунок 23 – Двутавр

Проведем центральные оси: для равнобокого уголка (x_1, y_1) и двутавра (x_2, y_2) (рис. 24).

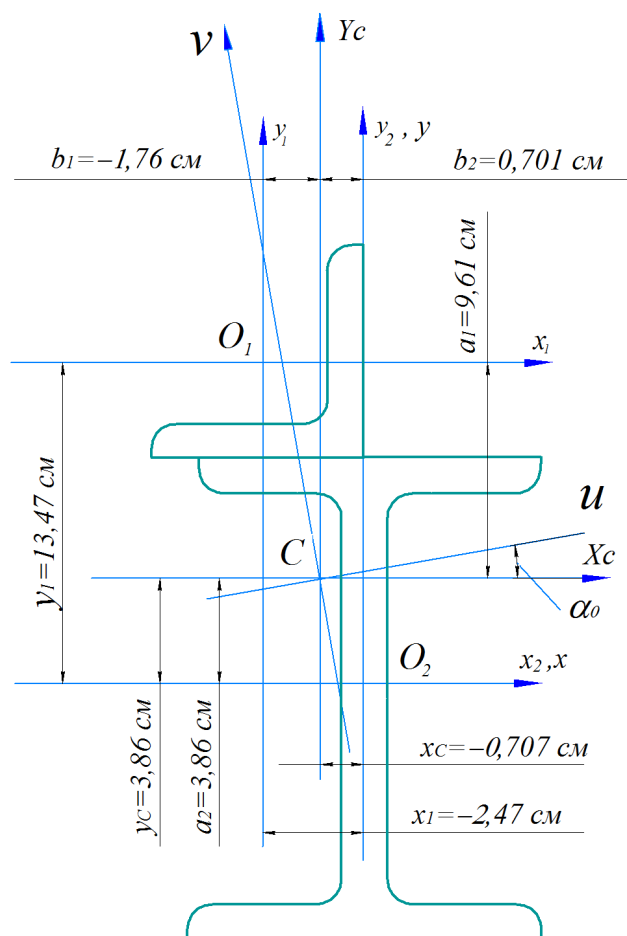


Рисунок 24 – Определение геометрических характеристик составного сечения

2. Проведем вспомогательную систему осей координат (x, y) , которая в нашем случае совпадает с системой координат (x_2, y_2) . Определяем координаты центра тяжести C всей фигуры в системе осей (x, y) по формулам (2.4):

$$X_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{-2,47 \cdot 12,28}{12,28 + 30,6} = -0,707 \text{ см};$$

$$Y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{13,47 \cdot 12,28}{12,28 + 30,6} = 3,86 \text{ см}.$$

где $y_1 = \frac{h}{2} + z_0 = \frac{22}{2} + 2,47 = 13,47 \text{ см}$, $y_2 = 0$, $x_1 = -z_0 = 2,47 \text{ см}$, $x_2 = 0$.

Через центр тяжести C (см. рис. 24) проводим центральные оси X_C и Y_C параллельно проведенным ранее центральным осям уголка x_1, y_1 и двутавра x_2, y_2 .

В системе координат центральных осей всей конструкции (X_C, Y_C) координаты центров тяжести уголка и двутавра определяем из выражений:

$$a_1 = y_1 - y_C, \quad b_1 = x_1 - x_C, \quad a_2 = y_2 - y_C, \quad b_2 = x_2 - x_C.$$

Данные сведем в таблицу 3.

Таблица 3 – Результаты вычислений центров тяжести

Точка	Координата точки в системе координат (x, y)		Координата точки в системе координат (X_C, Y_C)	
	$x_i, \text{ см}$	$y_i, \text{ см}$	$a_i, \text{ см}$	$b_i, \text{ см}$
O_1	-2,47	13,47	9,61	-1,76
O_2	0	0	-3,86	0,707

3. Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей (X_C, Y_C) по формулам (2.11):

$$\begin{aligned} I_{X_C} &= I_{x1} + a_1^2 F_1 + I_{x2} + a_2^2 F_2 = \\ &= 94,3 + 9,61^2 \cdot 12,28 + 2550 + (-3,86)^2 \cdot 30,6 = 4234,3 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Y_C} &= I_{y1} + b_1^2 F_1 + I_{y2} + b_2^2 F_2 = \\ &= 94,3 + (-1,76)^2 \cdot 12,28 + 157 + 0,707^2 \cdot 30,6 = 294,6 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$I_{XcYc} = I_{x_1y_1} + a_1 b_1 F_1 + I_{x_2y_2} + a_2 b_2 F_2 = 55,37 + 9,61 \cdot (-1,76) \cdot 1228 + 0 + (-3,86) \cdot 0,707 \cdot 30,6 = -236,19 \text{ см}^4.$$

4. Находим угол α_0 наклона главных центральных осей u и v относительно центральных осей (X_C, Y_C) по формулам (2.14):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{XcYc}}{I_{Xc} - I_{Yc}} = \frac{2(-236,19)}{4234,3 - 294,6} = 0,1199 \text{ рад};$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg}(0,1199) = 6^\circ 50';$$

$$\alpha_0 = -3^\circ 25'.$$

Поскольку угол α_0 положительный, то главная центральная ось u откладывается относительно оси X_C против часовой стрелки, а так как $I_{Xc} > I_{Yc}$, то ось u является осью, относительно которой момент инерции будет максимальным.

5. Вычисляем главные моменты инерции для составного сечения по формулам (2.14):

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{4234 + 294,6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4234,3 - 294,6)^2 + 4(-236,19)^2},$$

$$I_u = 4248,4 \text{ см}^4, \quad I_v = 280,5 \text{ см}^4.$$

6. Пользуясь свойством (2.13), проверяем свойство $I_{uv} = 0$:

$$I_{Xc} + I_{Yc} = I_u + I_v; 4234,3 + 294,6 = 4248,4 + 280,5,$$

$$4528,9 = 4528,9.$$

$$I_{uv} = 0,5(I_{Xc} - I_{Yc}) \sin 2\alpha_0 + I_{XcYc} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= 0,5(4234,3 - 294,6) \sin(6^\circ 50') - 236,19 \cos(6^\circ 50') =$$

$$= 234,41 - 234,51 \approx 0.$$

Проверка сошлась.

Глава 3. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЯ

3.1. Классификация внешних сил

В процессе работы конструкции и машин их элементы испытывают действие различных нагрузок. Нагрузки можно квалифицировать по ряду признаков. Под *внешними силами* понимаются силы, возникающие в результате взаимодействия рассматриваемого тела с окружающими телами.

1. По месту расположения точек приложения различают *объемные и поверхностные силы*. *Объемные силы* непрерывно распределены по всему объему, занятому телом (вес, силы инерции, магнитные силы и т. п.). Их размерность H/m^3 . *Поверхностные силы* приложены к поверхности тела. Интенсивность поверхностной силы имеет размерность H/m^2 .

2. Все внешние силы делят на *сосредоточенные и распределенные* силы.

Соприкосновение тел всегда происходит не в точке, а по некоторой площадке, так как тела деформируются. Поэтому сосредоточенных сил в природе не существует, и все поверхностные силы являются распределенными. Но в тех случаях, когда площадка, на которой действует нагрузка, очень мала по сравнению с размерами тела, будем говорить о *сосредоточенной силе* как о равнодействующей сил (сосредоточенная сила измеряется в Ньютонах, H) (рис. 25).

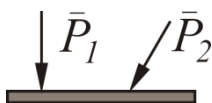


Рисунок 25 – Сосредоточенные силы

Распределенной нагрузкой называются силы, действующие на все точки:

– *заданной длины тела* (давление тяжелого цилиндрического катка на горизонтальную опорную поверхность) (рис. 26).



Рисунок 26 – Равномерно распределенная нагрузка по длине

Иногда тела соприкасаются по очень узкой, но длинной площадке (например цилиндр и плоскость). В этом случае можно считать, что поверхностная нагрузка действует по линии или распределена по линии (*погонная распределенная нагрузка*) (см. рис. 26). Эти допущения позволяют значительно упростить расчет при незначительной погрешности;

– *заданной площади тела* (давление газа на стенки сосуда) (рис. 27).

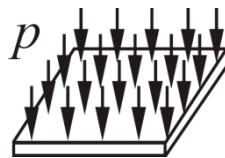


Рисунок 27 – Равномерно распределенная нагрузка по площади

Распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью, которая указывает, сколько ньютонов приходится на единицу длины, площади или объема, поэтому измеряется в $H/м$, $H/м^2$, $H/м^3$;

– *заданного объема тела* (действие сил тяжести).

При решении задач распределенную нагрузку заменяют на сосредоточенную силу Q . В зависимости от характера распределенной нагрузки точка приложения и модуль сосредоточенной силы определяются по-разному.

При линейно распределенной нагрузке ее модуль всегда равен площади фигуры распределения нагрузки, а приложена она так, чтобы линия действия силы прошла через центр тяжести этой фигуры.

Рассмотрим два примера линейно распределенной нагрузки: равномерно распределенную и распределенную по закону треугольника.

Равномерно распределенная нагрузка по длине

Равномерно распределенная нагрузка характеризуется интенсивностью q распределенной нагрузки, $H/м$. Для удобства расчета распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой $Q = q \cdot l$, приложенной в центре участка приложения распределенной нагрузки и направленной в ту же сторону, что и распределенная нагрузка (рис. 28).

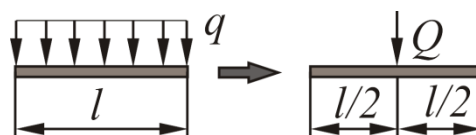


Рисунок 28 – Замена равномерно распределенной нагрузки по длине сосредоточенной силой

Нагрузка, распределенная по закону треугольника

Такая нагрузка характеризуется максимальным значением $q_{\max}$ интенсивности распределенной нагрузки q , которая заменяется сосредоточенной силой Q , расположенной на расстоянии $l/3$ от максимального значения интенсивности q (рис. 29).

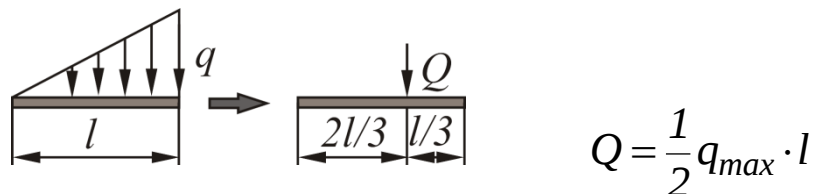


Рисунок 29 – Замена распределенной нагрузки по закону треугольника сосредоточенной силой

3. По характеру изменения силы во времени различают нагрузки *статические и динамические*. *Статические* нагрузки (постоянные) – такие, которые изменяют свою величину или точку приложения (направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями (силами инерции) можно пренебречь. *Динамические* нагрузки (переменные) изменяются во времени с большой скоростью, при этом силы инерции должны быть учтены, так как оказывают существенное влияние на конструкцию (например, ударные).

4. Также нагрузку делят на *активную нагрузку и реакции связей*. Активные силы, как правило, заданы, а реакции связей в начале расчета неизвестны и требуют их определения. Напомним, какие основные виды связей существуют.

Идеальная гладкая поверхность (острие, уступ). Идеально гладкой называют поверхность, трением о которую данного тела можно пренебречь (рис. 30).

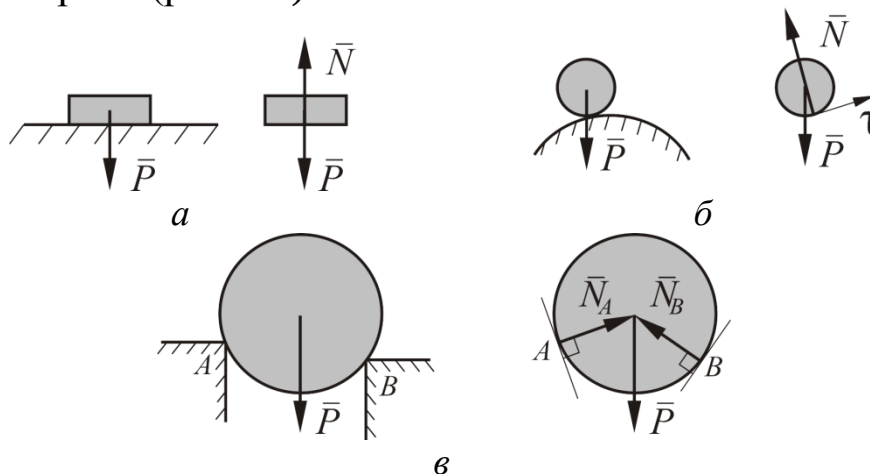


Рисунок 30 – Примеры гладкой поверхности и уступа

Такой вид связи не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания.

Гибкая связь (нерастяжимая нить, ремень, цепь и т. д.). Реакция гибкой связи направлена вдоль связи, при этом необходимо помнить, что гибкая связь работает только на растяжение (рис. 31).

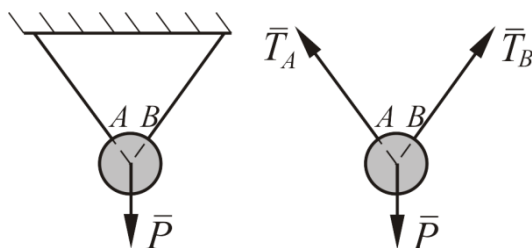


Рисунок 31 – Нерастяжимая нить

К гибким связям относятся ременные и цепные передачи, подвесные канаты и цепи (рис. 32).



Рисунок 32 – Примеры связей в виде нерастяжимых нитей

Жесткий невесомый стержень. Реакция стержня всегда направлена вдоль стержня (рис. 33). В отличие от гибкой связи, стержень может быть сжатым и растянутым.

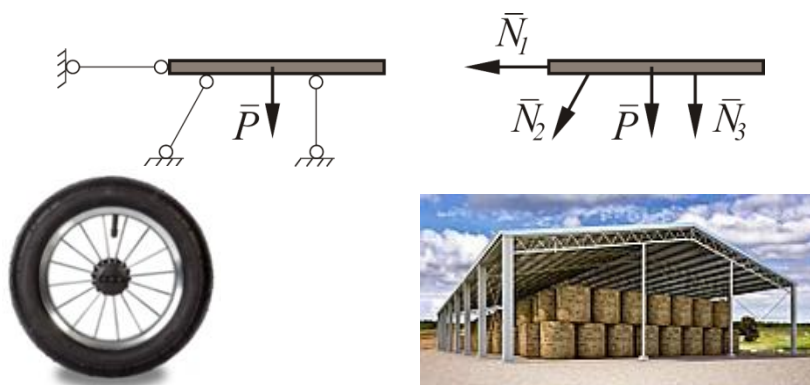


Рисунок 33 – Примеры связей в виде стержней

Шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир) препятствует любому поступательному движению тела, но дает ей возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира (рис. 34, 35).

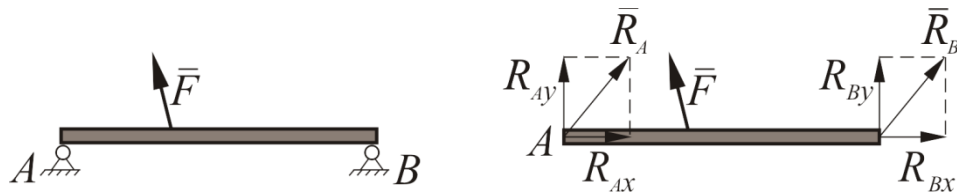


Рисунок 34 – Шарнирно-неподвижные опоры

Реакция шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира, а модуль и направление ее неизвестны, поэтому полная реакция раскладывается на две составляющие (R_{Ax} , R_{Ay} и R_{Bx} , R_{By}).



Рисунок 35 – Примеры шарнирно-неподвижных опор

Шарнирно-подвижная опора или шарнирная опора на катках. Реакция всегда будет направлена перпендикулярно опорной поверхности (рис. 36). Применяются в мостовых и других конструкциях для снятия температурных напряжений (рис. 37).

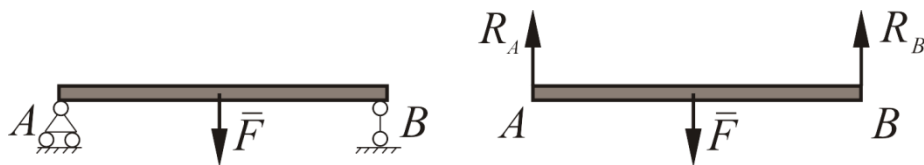


Рисунок 36 – Шарнирно-подвижная опора

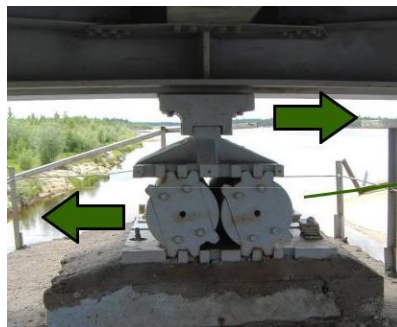


Рисунок 37 – Примеры шарнирно-подвижной опоры

Сферический шарнир. Сферический шарнир – это устройство, обеспечивающее вращение тела вокруг одной неподвижной точки. Полная реакция может иметь любое направление в пространстве, поэтому она раскладывается на три составляющие (X_0 , Y_0 , Z_0), направленные вдоль трех взаимно перпендикулярных осей x , y , z (рис. 38).

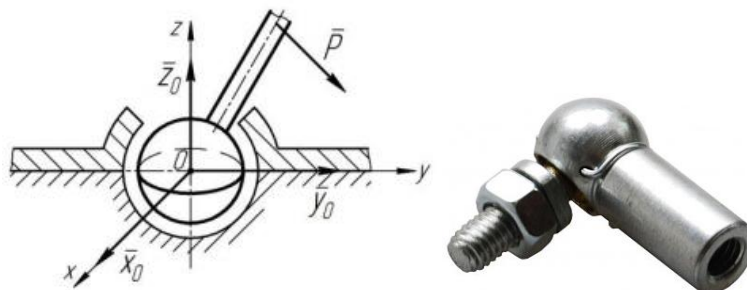


Рисунок 38 – Сферический шарнир

Жесткая заделка (консоль). Такая связь имеет место, когда одно тело жестко заделано в другое (например балка жестко заделана в стену) (рис. 39). В случае, когда внешняя нагрузка расположена в одной плоскости (плоское нагружение, рис. 40, а), реакцию связи определяют две составляющие силы X_A и Y_A , а также реактивный момент M_A . В случае, когда внешняя нагрузка расположена в разных плоскостях (пространственное нагружение, рис. 40, б), реакцию связи определяют три составляющие силы X_A , Y_A , Z_A , а также три составляющих реактивного момента M_{Ax} , M_{Ay} и M_{Az} .

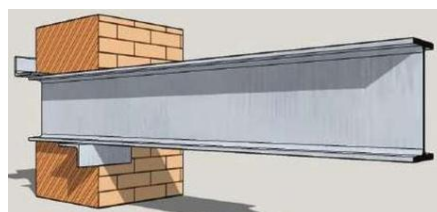


Рисунок 39 – Балка, жестко заделанная в стену

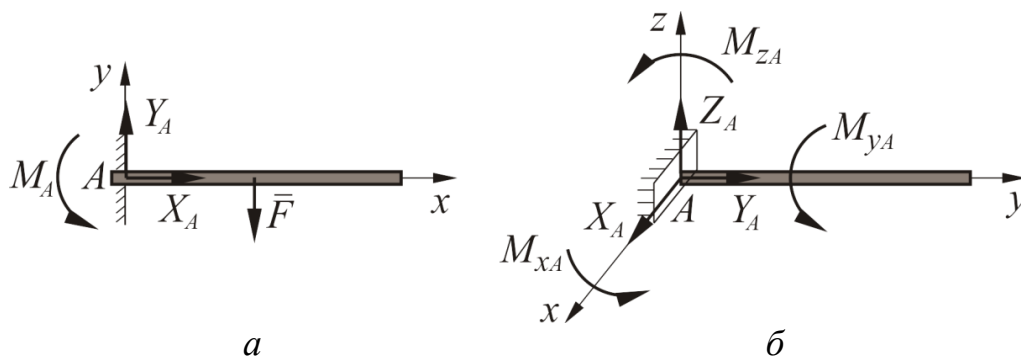


Рисунок 40 – Схемы жесткой заделки:
а – плоская задача; б – пространственная задача

Скользщей заделкой называется связь, которая ограничивает любое движение тела, кроме движения по направляющим заделки. Разновидности скользящих заделок и их реакции представлены на рисунке 41.

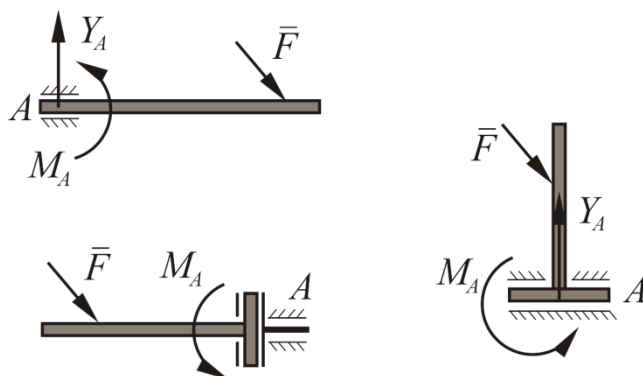


Рисунок 41 – Схемы скользящих видов связей

3.2. Внутренние силы. Метод сечений

Внутри любого тела имеются внутренние межатомные силы. Эти силы во всех случаях стремятся сохранить его как единое целое, противодействуют всякой попытке изменить взаимное расположение частиц, т. е. деформировать тело. Внешние силы, наоборот, всегда стремятся вызвать деформацию тела, изменить взаимное расположение частиц. Следовательно, величина внутренних сил, действующих между двумя какими-либо частицами, в нагруженном и ненагруженном теле будет различной.

В сопротивлении материалов изучают и вычисляют только те дополнительные величины внутренних сил, которые появляются в результате нагружения тела. Поэтому в дальнейшем, говоря о *внутренних силах*, будем иметь в виду именно эти дополнительные силы взаимодействия, возникающие в результате нагружения.

Для определения внутренних усилий используют *метод сечений*.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть некоторое тело находится в равновесии под действием системы внешних сил (рис. 42, а). В интересующем нас месте мысленно *рассечем* его некоторой плоскостью на две части. В каждой точке обеих сторон сечения будут действовать силы взаимодействия (рис. 42, б). Исходя из введенной гипотезы о сплошности материала следует, что внутренние силы действуют во всех точках проведенного сечения и, следовательно, представляют собой распределенную нагрузку. В зависимости от формы тела и характера приложенных внешних нагрузок интенсивность внутренних сил в различных точках может быть различна.

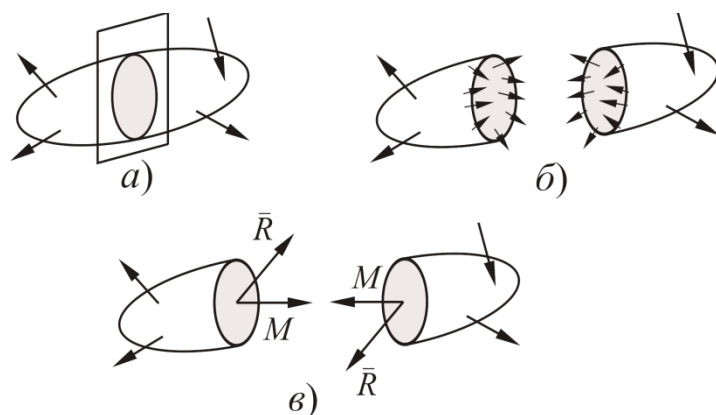


Рисунок 42 – Метод сечения

В соответствии с третьим законом Ньютона внутренние силы, действующие в сечениях левой и правой части тела, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 42, б). Как всякую произвольную систему сил, их можно привести к одной точке (обычно к центру тяжести сечения), в результате чего на каждой стороне сечения получим главный вектор и главный момент внутренних сил в сечении (рис. 42, в).

Как правило, брус рассекают плоскостью, перпендикулярной к оси, т. е. поперечным сечением (рис. 43, а). Если главный вектор и главный момент внутренних сил спроектировать на ось стержня x и главные центральные оси сечения y и z , то на каждой стороне сечения получим шесть внутренних силовых факторов (рис. 43, б): три силы (N , Q_y , Q_z) и три момента (M_x , M_y , M_z). Эти величины называют *внутренними усилиями в сечении стержня*.

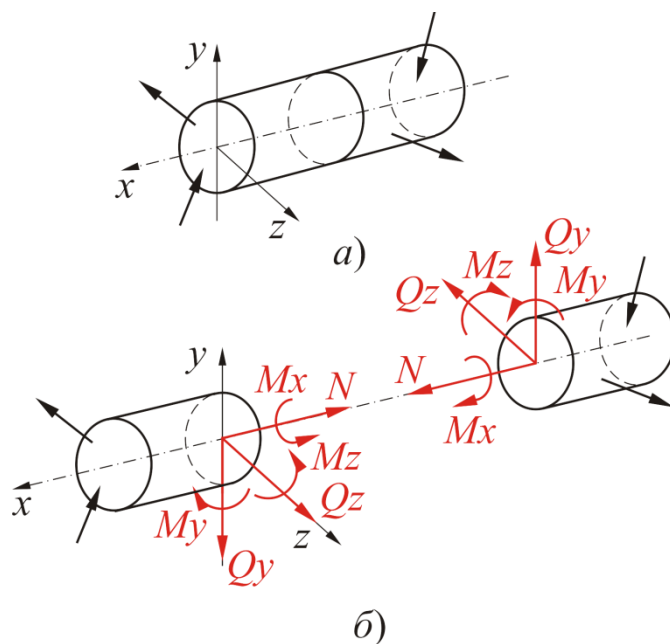


Рисунок 43 – Внутренние усилия

Усилие N вызывает *продольную деформацию стержня* (растяжение или сжатие); Q_y, Q_z – *сдвиг* сторон сечения соответственно в направлении осей y и z ; M_x – *кручение* стержня; M_y, M_z – *изгиб* стержня в главных плоскостях (zx и yx). Поэтому для внутренних усилий и моментов в сечении приняты следующие названия:

N – продольная или осевая (направленная по оси стержня) сила;

Q_y, Q_z – поперечные силы;

$M_x = M_{кр}$ – крутящий момент;

M_y, M_z – изгибающие моменты.

Каждое из этих усилий или моментов является результатом взаимодействия частей рассеченного тела, а поэтому должно быть представлено в виде двух противоположно направленных, но равных векторов или моментов (см. рис. 43, б). Совокупность величин $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$, приложенных к правой стороне сечения, заменяет действие удаленной левой части стержня на правую и наоборот.

Таким образом, метод сечений позволяет найти все внутренние усилия и моменты в любом сечении стержня при действии любой нагрузки.

Для этого нужно:

– рассечь (мысленно) тело на две части плоскостью, перпендикулярной продольной оси тела (поперечным сечением);

– отбросить правую или левую часть тела. Чтобы оставшаяся часть находилась в равновесии, по плоскости сечения должны действовать внутренние силы;

– заменить действие одной части на другую внутренними силами (рис. 43, б), тем самым уравновесив отсеченную часть. Так как отсеченная часть тела находится в равновесии, то для определения шести неизвестных внутренних усилий необходимо составить шесть уравнений статического равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; & \sum M_x = 0; \\ \sum F_y = 0; & \sum M_y = 0; \\ \sum F_z = 0; & \sum M_z = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для наглядного представления о характере работы конструкции строят графики изменения внутренних усилий по длине бруса. Такой график принято называть *эпюрой* (от французского слова *épure* – чертеж).

3.3. Напряжения в сечении

Внутренние силы, как уже отмечалось, распределены по сечению тела сплошь (рис. 44, а), при этом в общем случае их значение и направление в отдельных точках сечения различны. Для суждения об интенсивности внутренних сил в определенной точке данного сечения вводят понятие напряжения.

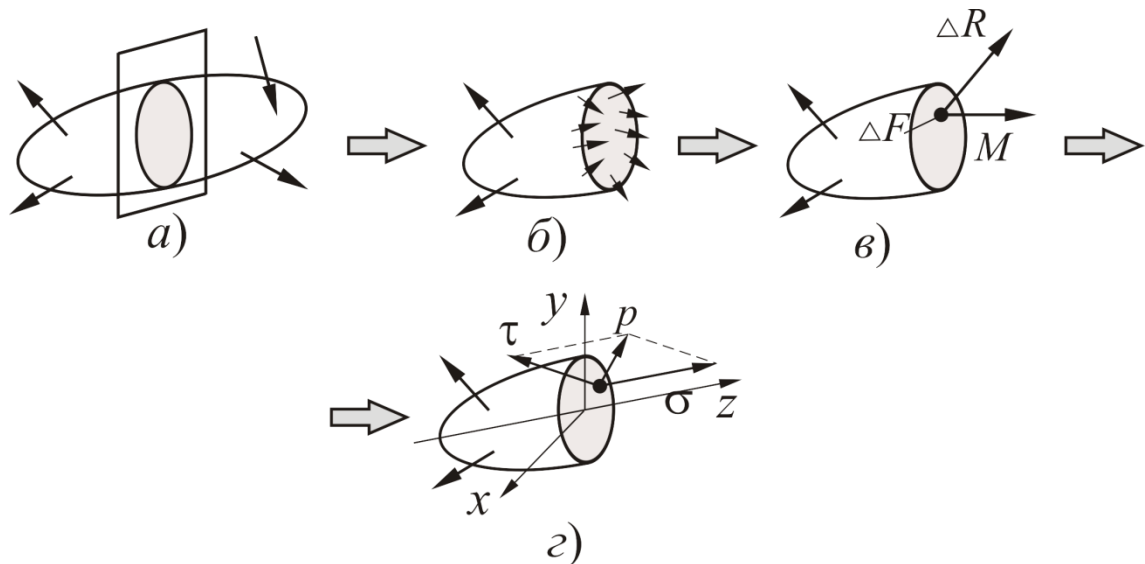


Рисунок 44 – Понятие напряжений

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади ΔF (рис. 44, в). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда их равнодействующая ΔR будет проходить через центр тяжести элемента ΔF . Отношение этой внутренней силы к площади выделенной площадки называется *средним напряжением* p_{cp} в окрестности рассматриваемой точки:

$$p_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (3.2)$$

Чем точнее нужно знать интенсивность внутренних сил в данной точке сечения, тем меньше должна быть выделенная площадка.

В пределе при стремлении ΔF к нулю получим *полное напряжение* в данной точке рассматриваемого сечения:

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (3.3)$$

Напряжение измеряется в паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$). Паскаль – это напряжение, при котором на площадке в 1 м^2 возникает внутренняя сила, равная 1 Н . Таким образом, *напряжением* называется внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения¹.

Через данную точку можно провести бесчисленное множество сечений, различно ориентированных в пространстве, и, конечно, в общем случае возникающие на них напряжения будут различны. Поэтому *нельзя говорить о напряжении в данной точке, не указывая площадки (сечения), на которой это напряжение возникает*.

Разложим вектор напряжения p на две составляющие: одну – направленную по нормали к сечению, вторую – лежащую в плоскости сечения (рис. 44, $г$). Составляющую напряжения, направленную по нормали к площади ее действия, называют *нормальным напряжением* и обозначают σ (сигма), а составляющую, лежащую в плоскости сечения, – *касательным напряжением* и обозначают τ (тау). Между напряжениями p , σ и τ существует следующая зависимость:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (3.4)$$

Такое расположение полного напряжения имеет определенный физический смысл. Действительно, нормальное напряжение возникает тогда, когда частицы материала, соприкасающиеся по рассматриваемой площадке, под действием приложенных к телу нагрузок стремятся отдалиться друг от друга или сблизиться в направлении нормали к этой площадке, т. е. при растяжении или сжатии. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения.

В ряде случаев оказывается удобным разложить вектор p не на две, а на три составляющие, направленные параллельно координатным осям.

¹ Для того чтобы абстрагироваться от размеров элемента и вида нагрузки, Юнг в свое время предложил использовать не абсолютные, а относительные значения силы и деформации. Действующую на элемент силу он приводил к единице площади сечения. Немного позже эта относительная величина была названа **напряжением**. Впервые понятие напряжения было введено французским инженером и ученым Луи Мари Анри Навье.

На рисунке 45 показано это разложение применительно к точке, взятой в поперечном сечении бруса. Для касательных напряжений принято следующее правило индексов: первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия рассматриваемого напряжения, второй индекс показывает, какой оси параллельно данное напряжение.

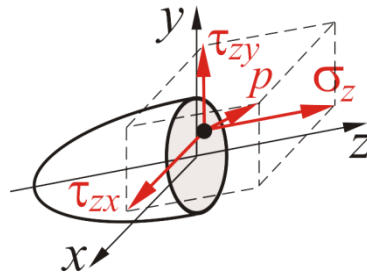


Рисунок 45 – Разложение полного напряжения на составляющие

Зависимость между полным напряжением и тремя его составляющими выражается формулой

$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}. \quad (3.5)$$

Установим связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами в поперечном сечении бруса.

Умножая напряжения σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} на площадь dF площадки их действия, получаем элементарные внутренние силы:

$$dN_z = \sigma_z dF, \quad dQ_x = \tau_{zx} dF, \quad dQ_y = \tau_{zy} dF.$$

Суммируя эти элементарные силы по всей площади сечения, получаем выражения составляющих главного вектора внутренних сил:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF, \quad (3.6)$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} dF, \quad (3.7)$$

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF. \quad (3.8)$$

Умножая каждую из элементарных сил на расстояние до соответствующей оси, получаем элементарные моменты внутренних сил:

$$dM_z = (\tau_{zx}dF)y - (\tau_{zy}dF)x, \quad dM_x = (\sigma_zdF)y, \quad dM_y = (\sigma_zdF)x.$$

Суммируя эти элементарные моменты по всей площади сечения, получаем выражения для составляющих главного момента внутренних сил:

$$M_z = \int_F (\tau_{zx}y - \tau_{zy}x) dF, \quad (3.9)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF, \quad (3.10)$$

$$M_y = \int_F \sigma_z x dF. \quad (3.11)$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие сосредоточенной и распределенной нагрузок?
2. Вследствие чего появляются внутренние усилия?
3. В чем смысл метода сечения?
4. Какие внутренние усилия возникают в поперечном сечении бруса в общем случае нагружения?
5. Перечислите виды простого напряженно-деформированного состояния.
6. Что такое эпюра?
7. Что такое напряжение? В чем оно измеряется?
8. Как связаны внутренние усилия и напряжения?
9. Какие бывают виды напряжений?

Глава 4. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

4.1. Построение эпюр продольных сил

Напомним, что осевым растяжением (сжатием) бруса называется вид нагружения, при котором равнодействующая внешних сил прикладывается в центре тяжести поперечного сечения и действует вдоль продольной оси. В этом случае в поперечных сечениях стержня из шести внутренних силовых факторов возникает только одно усилие – продольная осевая сила N .

Для внутренних усилий при растяжении *продольная сила считается положительной, если она растягивает отсеченную часть стержня, при сжимающем действии продольная сила считается отрицательной*, что показано на рисунке 46.

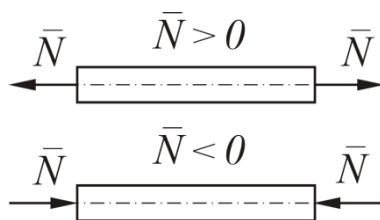


Рисунок 46 – Правило знаков при растяжении (сжатии)

Усилия в разных сечениях одного и того же стержня различны. Графики, показывающие как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называют *эпюрами*. Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр:

1. Ось, на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или совпадала с ней.
2. Ординаты эпюры откладывают от оси эпюры по перпендикуляру.
3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к оси.
4. Для усилий выбирают некоторый масштаб. Ординаты откладывают строго в масштабе. Кроме того, на эпюрах проставляют числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке ставят знак усилия.

В качестве примера определения и построения эпюр внутренних усилий рассмотрим прямой стержень постоянного поперечного сечения, нагруженного сосредоточенными силами.

Пример. Стержень постоянного поперечного сечения, нагруженный силами $2P$ и $3P$ вдоль продольной оси стержня, показан на рисунке 47. Определить величину и построить эпюру внутренних сил.

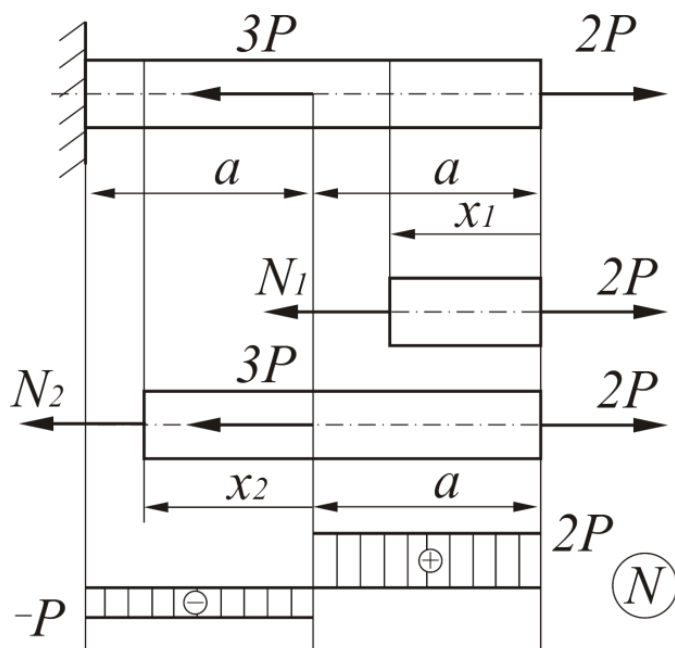


Рисунок 47 – Построение эпюры продольной силы при растяжении (сжатии)

Решение

Приступая к построению эпюры, стержень разбивают на участки. Участком называют часть стержня между точками приложения сосредоточенных сил. В данном примере стержень имеет два участка.

Чтобы построить эпюры, нужно составить уравнения равновесия для осевых сил в произвольном сечении каждого участка.

Для этого по методу сечений:

- мысленно разрезаем стержень секущей плоскостью, перпендикулярной к оси стержня;
- отбрасываем левую часть стержня;
- заменяем действие отброшенной части внутренней продольной силой N_1 , направляя ее от сечения вдоль оси стержня, перпендикулярно к сечению (рис. 47);
- составляем уравнение равновесия и определяем внутреннюю продольную силу N_1 :

$$\sum F_x = 0: \quad N_1 - 2P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2P.$$

Аналогично определяем внутреннюю продольную силу на втором участке:

$$\sum F_x = 0: \quad N_2 - 2P + 3P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2P - 3P = -P.$$

Строим эпюру, откладывая полученные значения (см. рис. 47).

4.2. Напряжения при растяжении и сжатии.

Расчет на прочность и жесткость

Выведем формулу для определения нормальных напряжений. Статическая сторона задачи выражается уже известным уравнением (3.6):

$$N = \int_F \sigma dF.$$

Из этого уравнения нельзя определить величину напряжения σ , так как закон распределения нормальных напряжений в точках поперечного сечения не известен. Это *статическая сторона задачи*.

Рассмотрим *геометрическую сторону задачи*. При наблюдении деформации растяжения стержня, на поверхности которого нанесены линии, перпендикулярные к оси бруса, можно отметить, что эти линии, смещаясь параллельно самим себе, остаются прямыми и перпендикулярными к оси бруса. Предполагая, что указанная картина перемещения сечений имеет место и внутри стержня, приходим к *гипотезе плоских сечений*: поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после нее, перемещаясь поступательно вдоль оси стержня. На основании гипотезы плоских сечений следует, что все волокна удлиняются на одну и ту же величину и их относительные удлинения ε одинаковы:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const.} \quad (4.1)$$

Это аналитическое выражение геометрической стороны задачи.

Физическая сторона рассматриваемой задачи заключается в установлении зависимости деформаций от напряжений. При упругих

деформациях эта зависимость линейна и, как известно, называется **законом Гука**:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (4.2)$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый *модулем продольной упругости*, *модулем упругости первого рода* или *модулем Юнга*².

Модуль упругости – это одна из физических характеристик материала. Модуль упругости характеризует важнейшее свойство конструкционного материала – жесткость. Резина, дерево, стекло, сталь обладают различной жесткостью. Поэтому, например, модуль упругости резины равен 70 кг/см^2 , а для стекла он в 1000 раз больше. Дерево вдвое жестче стекла, а сталь в 14 раз жестче дерева. Измеряется модуль упругости в единицах напряжения (Па). Некоторые значения модуля для различных материалов приведены в таблице 4.

Учитывая постоянство модуля упругости E для однородного и изотропного материала, а также выражения (4.1) и (4.2), находим

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \text{const}. \quad (4.3)$$

² Этот закон по праву носит его имя и принадлежит ему вне всякой конкуренции. Этот закон упругости материальных тел известен под названием **закон Гука**. Суть его можно выразить в трех словах: «Деформация пропорциональна нагрузке», или, как записал Гук в своей криптограмме: «Каково удлинение, такова и сила». Этот закон был выведен Гуком в 1676 г. после проведения ряда экспериментов, а именно: а) удлинения железной проволоки; б) растяжения винтовой пружины; в) сокращения спиральной часовой пружины; г) изгиба балки, закрепленной одним концом и нагруженной на другом конце.

Еще Леонардо да Винчи заметил, что различные материалы сопротивляются воздействию нагрузки по-разному. Конечно, это замечали и Галилей, и Мариотт, и другие исследователи, занимавшиеся испытанием материалов на прочность. Безусловно, знал об этом и Гук. Это явление было очевидным.

Тем не менее, прошло полвека после открытия закона упругости, пока английский ученый Томас Юнг определил, что для каждого материала существует постоянная величина, характеризующая способность его сопротивляться воздействию силы. Эта величина была названа *модулем упругости*, или *модулем Юнга*.

Юнг первый заявил, что закон Гука действует только до определенного предела, а затем упругая деформация не проявляется и становится необратимой. Юнг не определил, как развивается зависимость между нагрузкой и деформацией за пределами упругости, но он указал на существование данного факта.

Таблица 4 – Значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для различных материалов

Материал	Модуль упругости, <i>МПа</i>	Коэффициент Пуассона
Сталь углеродистая	$2,1 \cdot 10^5$	0,24–0,3
Сплавы алюминия	$0,72 \cdot 10^5$	0,26÷0,36
Сплавы титана	$1,12 \cdot 10^5$	–
Медь	$1,2 \cdot 10^5$	0,31–0,34
Чугун	$(1,15–1,6) \cdot 10^5$	0,23–0,27
Сосна: вдоль волокон	$(0,1–0,12) \cdot 10^5$	–
поперек волокон	$(0,0005–0,01) \cdot 10^5$	–
Бетон	$(0,097–0,408) \cdot 10^5$	0,16–0,22
Гранит	$0,49 \cdot 10^5$	–
Мрамор	$0,56 \cdot 10^5$	–
Стекло	$0,1 \cdot 10^5$	0,25
Текстолит	$(0,07–0,13) \cdot 10^5$	–
Резина на каучуке	8,0	0,5

Подставляя выражение (4.4) в формулу (3.6), получаем

$$N = \int_F E \varepsilon dF = E \varepsilon \int_F dF = E \varepsilon F = \sigma F, \quad (4.4)$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (4.5)$$

Перейдем к определению деформаций стержня. Из выражения (4.5) можно найти относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}. \quad (4.6)$$

В пределах призматического участка стержня длиной l , выполненного из однородного материала ($E = \text{const}$), в сечениях которого действуют одинаковые продольные силы N , удлинение каждой единицы длины одинаково, следовательно, абсолютное удлинение

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (4.7)$$

где Δl – абсолютное удлинение стержня (рис. 48).

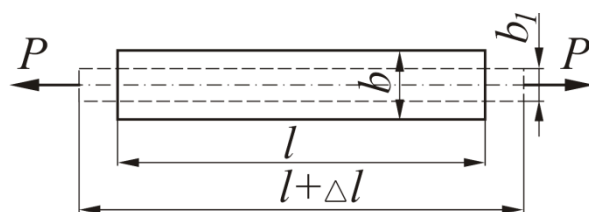


Рисунок 48 – Деформация стержня

Формула (4.7) выражает закон Гука для абсолютных удлинений. Произведение $E\varepsilon$ в знаменателе формулы называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении и сжатии и имеет размерность силы. Величину $c = \frac{EF}{l}$ называют жесткостью стержня.

Если на рассматриваемом участке продольная сила и поперечное сечение переменны, то полное удлинение участка длиной l будет определяться интегралом

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EF(x)}. \quad (4.8)$$

4.3. Условие прочности и жесткости

Основная задача сопротивления материалов – обеспечить надежные размеры деталей, подверженных силовому, температурному или другому воздействию. Такие размеры можно определить из расчета на прочность и жесткость. В большинстве случаев основным бывает расчет на прочность.

Опасность наступления разрушения характеризуется не столько величинами внутренних усилий и моментов в сечении, сколько величинами наибольших нормальных и касательных напряжений, а также их комбинацией, которые действуют в опасных (т. е. наиболее напряженных) точках сечения. Физически очевидно, что сколь угодно большие напряжения материал выдерживать не в состоянии. Поэтому величины наибольших напряжений из условия надежности работы детали необходимо ограничивать некоторыми допустимыми значениями. Их называют допускаемыми напряжениями.

В случае растяжения или сжатия стержня находят опасные сечения, в которых напряжения достигают наибольших значений по абсолютной величине, и для этих сечений записывают условие прочности:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N_{max}}{F} \right| \leq [\sigma], \quad (4.9)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

При растяжении в правую часть этого условия подставляют допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_+]$, а при сжатии – допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_-]$.

Используя условие прочности (4.9), можно решать три типа задач:

1) по известным нагрузкам для выбранного материала найти надежные с точки зрения прочности размеры поперечного сечения стержня (*проектировочный расчет*);

2) по известным размерам и материалу детали проверить, может ли она выдержать заданную нагрузку (*проверочный расчет*);

3) по известным размерам детали, материалу и схеме нагружения определить допустимую величину нагрузки.

В некоторых случаях для обеспечения надежной работы машин и сооружений размеры их деталей нужно выбирать так, чтобы обеспечивалось *условие жесткости*. При растяжении (сжатии) условие жесткости имеет следующий вид:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EF(x)} \leq [\Delta l], \quad (4.10)$$

где $[\Delta l]$ – допускаемая величина деформации.

Расчет по условию жесткости всегда следует дополнять расчетом на прочность. Если условие жесткости выполнено, а условие прочности не удовлетворяется, то задачу необходимо решать из условия прочности.

4.4. Определение механических характеристик материалов при растяжении

При проектировании и расчетах на прочность, жесткость и устойчивость элементов механизмов, машин и сооружений необходимо знать свойства материалов. Поэтому материалы испытывают на растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб и твердость.

В начале XIX в. создаются первые мощные испытательные установки, в которых в большинстве случаев используют принцип рычага и которые позволяют доводить до разрушения не образцы мате-

риалов, а колонны и балки в натуральную величину. Директором первой испытательной лаборатории при Мюнхенском политехническом институте был Иоганн Баушингер.

В первую очередь Баушингер построил мощную и точную машину по проекту Вердера. Машина Вердера имела схему испытательной системы Ламе и могла развивать усилие до 100 т. Это была самая мощная испытательная машина, а ее горизонтальное расположение упрощало конструкцию. Эта идея использовалась в дальнейшем и используется до сих пор для изготовления многих испытательных машин длиной более 50 м, способных развивать усилие свыше 1000 т. Баушингер широко поставил опыты и впервые начал точно измерять деформации образцов в процессе испытания. Для этого он изобрел и применил точный прибор – тензомер.

Баушингер начал строить на бумаге графики, нанося точки, соответствующие силе и вызвавшей ее деформации. Это были первые диаграммы растяжения, ставшие впоследствии паспортом прочности материала.

Начало XX в. было временем активного распространения машин, временем создания машинной индустрии. Производились многочисленные испытания различных материалов, деталей и конструкций. Массовость экспериментов позволила составить справочные данные по прочностным свойствам материалов.

Одним из основных видов испытаний материалов является испытание на растяжение, так как при этом обнаруживаются наиболее важные их свойства. Из испытуемого материала изготавливают специальные образцы. Чаще всего их делают цилиндрическими (рис. 49).

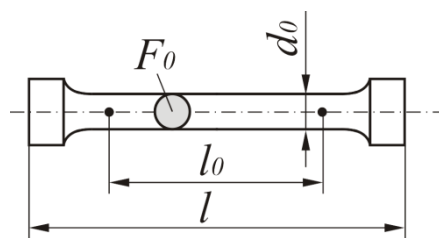


Рисунок 49 – Цилиндрический образец для испытания на растяжение

Для испытаний на растяжение применяют разрывные машины, позволяющие в процессе испытания определять усилия и соответствующие им деформации образца. По этим данным строят первичную диаграмму растяжения, в которой по оси ординат откладывают усилия P , а по оси абсцисс – соответствующие им удлинения Δl . Харак-

тер диаграммы растяжения зависит от свойств испытуемого материала. Типичный вид такой диаграммы для малоуглеродистой стали изображен на рисунке 50.

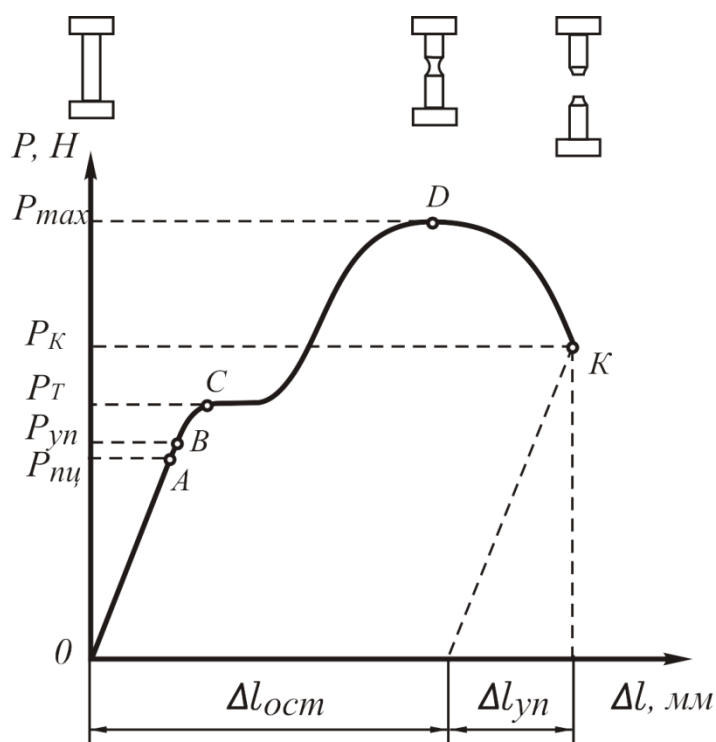


Рисунок 50 – Диаграмма растяжения

Рассмотрим характерные участки и точки этой диаграммы, а также соответствующие им стадии деформирования образца. От начала нагружения до определенного значения растягивающей силы имеет место прямая пропорциональная зависимость между удлинением образца и силой. Эта зависимость на диаграмме соответствует прямой OA . На этой стадии растяжения справедлив закон Гука.

Точке A соответствует сила $P_{нц}$, а напряжение, соответствующее силе $P_{нц}$, называется *пределом пропорциональности* и определяется следующей формулой:

$$\sigma_{нц} = \frac{P_{нц}}{F_0}, \quad (4.11)$$

где F_0 – площадь поперечного сечения до деформации.

Таким образом, пределом пропорциональности называется напряжение, после которого нарушается закон Гука.

Как уже указывалось, деформация называется *упругой*, если она полностью исчезает после разгрузки. На диаграмме упругой деформации соответствует отрезок Δl_{yn} . Допустим, что постепенно повышая нагрузку P , будем при каждом ее значении проводить полную разгрузку образца. Пока сила P не достигнет определенной величины, вызванные ею деформации будут исчезать при разгрузке. Процесс разгрузки при этом изобразится той же линией, что и нагружение.

Следующей точке B на диаграмме растяжения соответствует сила P_{yn} , при которой образец еще не дает при разгрузке остаточной деформации. Этой точке на диаграмме соответствует напряжение σ_{yn} , которое называется *пределом упругости* и определяется по формуле

$$\sigma_{yn} = \frac{P_{yn}}{F_0}. \quad (4.12)$$

Предел упругости является характеристикой, не связанной с законом Гука. Точка B может располагаться как выше, так и ниже точки A . Эти точки, а следовательно, и значения напряжений σ_{nc} и σ_{yn} , близки друг к другу, и обычно различием между ними пренебрегают.

После точки A при дальнейшем растяжении образца кривая растяжения становится криволинейной и плавно поднимается до точки C , где наблюдается переход к горизонтальному участку CO , называемому *площадкой текучести*. На этой стадии растяжения удлинение образца растет при постоянном значении растягивающей силы P_T . Такой процесс деформации, называемый текучестью материала, сопровождается *остаточным (пластическим) удлинением* $\Delta l_{ост}$, не исчезающим после разгрузки.

Таким образом, *пределом текучести* σ_T называется наименьшее напряжение, при котором деформация образца происходит при постоянном растягивающем усилии. Величина предела текучести вычисляется по формуле

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}. \quad (4.13)$$

Начало пластической деформации соответствует наступлению некоторого критического состояния металла, которое можно обнару-

жить не только по остаточным деформациям, но и по другим внешним признакам. При пластической деформации повышается температура образца; у стали изменяются электропроводность и магнитные свойства; на полированной поверхности образцов, особенно плоских, заметно потускнение.

После стадии текучести материал вновь приобретает способность увеличивать сопротивление дальнейшей деформации и воспринимает возрастающее до некоторого предела усилие. Этому состоянию соответствует восходящий участок CD (см. рис. 50) кривой растяжения, называемый *участком упрочнения*. Точка D соответствует наибольшему усилию P_{max} , которое может воспринять образец.

Напряжение, соответствующее максимальной силе, называется *пределом прочности*, или *временным сопротивлением*, и определяется по формуле

$$\sigma_B = \frac{P_{max}}{F_0}. \quad (4.14)$$

До точки D на диаграмме растяжения образец деформировался по всей длине образца, а площади поперечных сечений расчетной части образца изменялись незначительно и также равномерно по длине. Поэтому для вычисления σ_{nc} , σ_{yn} , σ_T и σ_B в расчетные формулы вводилось первоначальное значение площади поперечного сечения F_0 . После достижения максимального усилия P_{max} деформация происходит главным образом на небольшой длине образца. Это ведет к образованию местного сужения в виде *шейки* (см. рис. 50) и к падению растягивающей силы P , несмотря на то, что напряжение в сечении шейки непрерывно растет.

Основными характеристиками упругости и прочности *материалов*, используемыми в практических расчетах, являются предел упругости σ_{yn} , предел текучести σ_T и временное сопротивление σ_B (предел прочности).

Многие материалы имеют диаграмму растяжения, существенно отличающуюся от рассмотренной выше диаграммы (см. рис. 50) для малоуглеродистой стали. На рисунке 51 показаны диаграммы растяжения для чугуна (линия 1) и меди (линия 2).

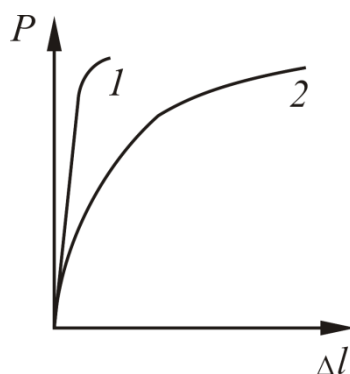


Рисунок 51 – Диаграммы растяжения образца из чугуна и меди

Для линии 1 на рисунке 51 характерно то, что практически до разрушения зависимость между внешней силой P и деформацией Δl является линейной. Такие материалы называются *хрупкими*. К ним относят чугун, стекло, камень, инструментальные стали.

Линия 2 на рисунке 51 соответствует *пластичным* материалам, у которых отсутствует площадка текучести.

Для металлов, не имеющих площадки текучести, предел текучести определяют условно как напряжение, при котором остаточная деформация составляет величину, установленную ГОСТом или техническими условиями. По ГОСТ 1497-84 величина остаточной деформации составляет 0,2 % от измеряемой длины образца. *Условные пределы текучести* отмечают нижним индексом в соответствии с заданной величиной деформации, например: $\sigma_{0,2}$.

Учитывая, что практически трудно установить начало отклонения от закона пропорциональности и начало появления первых остаточных деформаций, вводят также понятия условных предела пропорциональности и предела упругости.

Условным пределом пропорциональности называют наименьшее напряжение, при котором отклонение от линейной зависимости между напряжением и деформацией достигает некоторой величины, устанавливаемой техническими условиями (например 0,002 % от измеряемой длины образца).

Условным пределом упругости называют наименьшее напряжение, при котором остаточная деформация достигает заданной величины (обычно 0,001–0,05 % от измеряемой длины образца). Его отмечают нижним индексом в соответствии с заданной величиной остаточной деформации (например $\sigma_{0,001}$ и $\sigma_{0,05}$).

4.5. Определение механических характеристик материалов при сжатии

Испытания на сжатие, несмотря на их простоту, проводят реже, чем на растяжение. Объясняется это следующим.

Для пластичных материалов модуль упругости E , предел упругости σ_{yn} и предел текучести σ_T при сжатии примерно те же, что и при растяжении. Напряжение, соответствующее разрушающей силе, при сжатии пластичных материалов получить нельзя, так как образец не разрушается, а превращается в диск, и сжимающая сила постоянно возрастает.

Испытанию на сжатие подвергают главным образом хрупкие материалы, которые, как правило, лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и применяются для изготовления элементов, работающих на сжатие. Для их расчета на прочность необходимо знать характеристики материала, получаемые при испытании на сжатие.

Испытание материалов на сжатие проводят на специальных прессах или универсальных испытательных машинах. Для этого изготавливают образцы в виде цилиндров небольшой высоты. Трение, возникающее во время испытания на сжатие между плитами машины и торцами образца, существенно влияет на результаты испытания и характер разрушения. Цилиндрический образец из малоуглеродистой стали принимает при этом бочкообразную форму (рис. 52). Диаграмма сжатия, полученная испытанием образца из такого материала, изображена на рисунке 53.

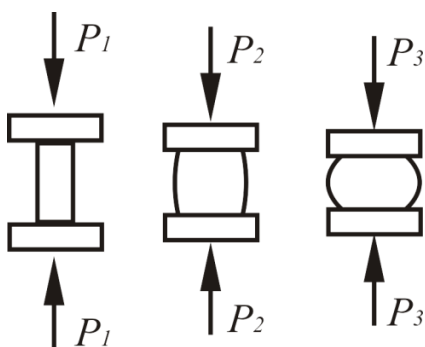


Рисунок 52 – Деформация при сжатии

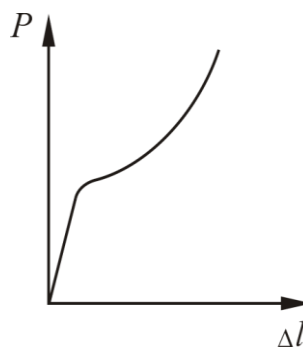


Рисунок 53 – Диаграмма сжатия малоуглеродистой стали

Разрушение при сжатии образца из хрупкого материала происходит вследствие сдвига одной части образца относительно другой. Диаграмма сжатия чугуна показана на рисунке 54.

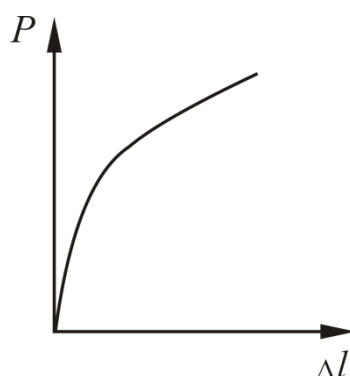


Рисунок 54 – Диаграмма сжатия чугуна

Древесина, являющаяся анизотропным материалом, при сжатии, как и при растяжении, обладает различной прочностью в зависимости от направления сжимающей силы по отношению к направлению волокон.

При сжатии вдоль волокон древесина значительно прочнее, чем при сжатии поперек волокон. При сжатии вдоль волокон образец разрушается вследствие сдвига одной части относительно другой, а при сжатии поперек волокон древесина склонна к прессованию и не всегда удастся определить момент начала разрушения.

Значения предела прочности и предела текучести для различных материалов приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Значения предела прочности и предела текучести для различных материалов

Материал	Предел текучести σ_T , МПа	Предел прочности	
		При растяжении σ_{BP} , МПа	При сжатии σ_{BC} , МПа
Сталь:			
ВСт3кп	185–235	360–365	
ВСт3пс	235–275	370–400	
ВСт3сп	235–270	370–400	
09Г2 (марганцовистая)	295–370	430–500	
10ХСНД (хромокремниевая)	390	530	
12Г2СМФ (термич. упрочненная)	590	685	
Титановый сплав ВТ4	550–650	700–850	
Чугун серый СЧ	–	120–380	500–1500
Гранит	–	3	120–260
Кирпич	–	0,7–3,0	7–30
Бетон	–	0,4–2,6	2,8–43,8
Сосна, ель (вдоль волокон)	–	80	40
Сосна, ель (поперек волокон)	–	–	5
Текстолит ПТК	–	100	250
Стеклопластик СВМ1:1	–	480–500	420

4.6. Допускаемые напряжения

Аварии происходили не только в древние и средние века, они продолжают (хоть и в меньшем количестве) вплоть до нашего времени. Каждая авария возбуждает у специалистов потребность в новом поиске, ставит новые задачи, прибавляет новые знания. Когда же знаний недостаточно, в инженерные расчеты вводят так называемый *коэффициент запаса*.

Поначалу расчет производили приближенно. Определяли нагрузку, которую должен выдержать элемент при эксплуатации, и подбирали такие его размеры, которые позволили бы выдержать нагрузку, большую эксплуатационной, скажем, в 100 раз. Это значит, что у создаваемого элемента коэффициент запаса был равен 100. Поскольку никто не знал, какие непредвиденные, непознанные явления учитывает этот коэффициент и должен ли он быть именно таким, а не меньшим, например, в 10 раз, его называли коэффициентом незнания. По мере развития науки коэффициент незнания уменьшался, все больше уступая место точным численным величинам, характеризующим то или иное открытое явление, тот или иной процесс в материале, элементе, конструкции, сооружении.

Потребность уменьшить коэффициент запаса диктовалась многими факторами. Возникла необходимость в материальных средствах и ресурсах. Для того чтобы строить дешевле, с меньшими трудовыми и материальными затратами, потребовались поиски резервов в материале, в формах конструкций и технологии их возведения.

По сути дела, вся история науки о прочности была историей борьбы за уменьшение коэффициента запаса. Сейчас этот коэффициент стал небольшой величиной. Но для этого потребовались века.

Навье предложил установить расчетные допускаемые напряжения, при которых конструкция может работать надежно, и на эти напряжения вести расчет. Естественно, допускаемые напряжения должны быть значительно меньше разрушающих. «Соппротивление разрушению, – писал Навье, – недостаточно для проектирования, так как надо знать не разрушающую силу, а ту, которую можно нагрузить элемент без того, чтобы возникающие в нем изменения возрастали со временем». Если стальная балка разрушается при напряжении 4000 кг/см^2 , то Навье предлагает при изгибе принимать допускаемое напряжение равным 1300 кг/см^2 .

Как уже указывалось, детали машин и другие конструкций должны удовлетворять условию прочности и жесткости. Размеры деталей необходимо подбирать такими, чтобы под действием приложенных нагрузок они не разрушались и не получали деформаций, превышающих допустимые. В большинстве машиностроительных деталей не допускаются, как правило, остаточные деформации.

Заметные остаточные деформации появляются в пластичных материалах, когда напряжения достигают предела текучести. Разрушение наступает, когда напряжения достигают величины временного сопротивления; при этом деформации хрупкого материала могут быть незначительными. Итак, для деталей, изготовленных из пластичного материала, опасным напряжением можно считать предел текучести, а для деталей из хрупкого материала – временное сопротивление.

Естественно, что эти напряжения не могут быть приняты в качестве допускаемых. Их следует уменьшить настолько, чтобы в эксплуатационных условиях действующие напряжения всегда были меньше предела упругости. Таким образом, допускаемое напряжение может быть определено по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}, \quad (4.15)$$

где σ^0 – опасное напряжение (σ_T или σ_B);
 n – коэффициент запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности показывает, во сколько раз допускаемое напряжение меньше опасного. Выбор величины коэффициента запаса прочности зависит от состояния материала (хрупкое или пластичное), характера приложения нагрузки (статическая, динамическая или повторно-переменная) и некоторых общих факторов, имеющих место в той или иной степени во всех случаях. К таким факторам относят:

- неоднородность материала, а следовательно, отличие его механических характеристик в малых образцах и деталях;
- неточность задания величин внешних нагрузок;
- приближенность расчетных схем и некоторая приближенность расчетных формул.

Величина запаса прочности зависит от того, какое напряжение считать опасным. Для пластичных материалов в случае статической нагрузки опасным напряжением, как уже было сказано, следует считать предел текучести. Тогда допускаемые напряжения при растяжении и сжатии для пластичных материалов определяются следующим образом:

$$[\sigma_P] = \frac{\sigma_{TP}}{n_T}, \quad [\sigma_C] = \frac{\sigma_{TC}}{n_T}, \quad (4.16)$$

где σ_{TP} , σ_{TC} – пределы текучести при растяжении и сжатии;
 n_T – запас прочности по пределу текучести.

Для материалов с выраженными пластическими свойствами $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = \sigma_T$, и тогда

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (4.17)$$

На основании данных длительной практики конструирования, расчета и эксплуатации машин и сооружений величина запаса прочности n_T для сталей при статической нагрузке принимается равной 1,4–2,5. Очевидно, меньшие значения n_T следует брать в тех случаях, когда материал более однороден, лучше изучены его свойства, полнее учтены нагрузки, точнее метод расчета и расчетные схемы.

Для хрупких материалов при статических нагрузках опасным напряжением является временное сопротивление, и тогда

$$[\sigma_P] = \frac{\sigma_{BP}}{n_B}, \quad [\sigma_C] = \frac{\sigma_{BC}}{n_B}, \quad (4.18)$$

где σ_{BP} , σ_{BC} – пределы прочности при растяжении и сжатии;
 n_B – запас прочности по пределу прочности.

Принимают, что запас прочности $n_B = 2,5–5,0$.

Учитывая, что предел прочности превышает предел текучести на 50–70 %, запас прочности n_B для пластичных материалов принимают равным 2,4–2,6. Эту величину для пластичных материалов берут несколько меньшей, чем для хрупких, поскольку пластичные ма-

териалы, как правило, более однородны по своим физическим и механическим свойствам.

Иногда допускаемые напряжения на растяжение обозначают через $[\sigma_+]$, а на сжатие – через $[\sigma_-]$. Хрупкие материалы лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и для них $[\sigma_-] > [\sigma_+]$.

Выбор величины допускаемых напряжений весьма важен, так как от правильного установления их значения зависит прочность и безопасность проектируемой конструкции, а также экономическая сторона расчета – количество затрачиваемого материала.

Установлением величины допускаемых напряжений для основных марок материалов, применяемых в машиностроении и строительном деле, занимаются государственные нормирующие органы. Они издают соответствующие нормы, которыми и следует руководствоваться в обычных условиях проектирования. По мере улучшения качества материалов и уточнения методов расчета допускаемые напряжения повышают. Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений, принятых в настоящее время для наиболее распространенных материалов, приведены в справочниках.

4.7. Расчеты на прочность

Сечения элементов конструкции должны быть определены так, чтобы в течение всего срока эксплуатации была исключена возможность разрушения и возникновения недопустимо больших деформаций конструкции при одновременном требовании экономии материала. Необходимые размеры сечений элементов конструкции определяются из расчетов на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчет на прочность сводится к требованию, чтобы наибольшие напряжения в элементе конструкции (нормальные, касательные либо определенная комбинация этих напряжений) не превосходили допускаемые напряжения.

Расчет на жесткость сводится к требованию, чтобы наибольшие перемещения (удлинения стержней, прогибы, осадки опор, углы закручивания валов) не превышали некоторых допустимых величин.

Существует три метода расчета на прочность:

- метод допускаемых напряжений;
- предельных состояний;
- разрушающих нагрузок.

Рассмотрим кратко суть всех трех методов.

4.7.1. Метод допускаемых напряжений

Этот метод применяют при расчете машиностроительных конструкций. Условие прочности при расчете по методу допускаемых напряжений сводится к требованию, чтобы наибольшие растягивающие σ_P^{max} и наибольшие по абсолютной величине сжимающие σ_C^{max} напряжения в элементе конструкции не превышали допускаемых напряжений:

$$\sigma_P^{max} \leq [\sigma_P], \quad \sigma_C^{max} \leq [\sigma_C]. \quad (4.19)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то производится проверка прочности по наибольшему по абсолютной величине напряжению:

$$\sigma^{max} \leq [\sigma]. \quad (4.20)$$

В некоторых случаях, например для деталей машин, работающих на кручение, для элементов соединений, работающих на сдвиг (заклепки, сварные швы, деревянные шпонки и т. п.), решающее значение для прочности имеют касательные напряжения. Условие прочности по касательным напряжениям записываются в следующем виде:

$$\tau^{max} \leq [\tau], \quad (4.21)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение. Для пластичных материалов принимается $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$.

Сечение стержня, в котором действует наибольшее напряжение, называется *опасным сечением*.

При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности, которые с учетом формул (4.19) и (4.20) можно представить в виде:

$$\sigma_P^{max} = \left| \frac{N_P^{max}}{F} \right| \leq [\sigma_P], \quad \sigma_C^{max} = \left| \frac{N_C^{max}}{F} \right| \leq [\sigma_C] \quad (4.22)$$

или

$$\sigma^{max} = \left| \frac{N^{max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (4.23)$$

4.7.2. Метод предельных состояний

Этот метод применяют при расчете строительных конструкций.

Предельным называется такое состояние конструкции, при котором становится невозможной ее дальнейшая нормальная эксплуатация.

В строительных нормах и правилах (СНиП) установлены три группы предельных состояний:

- *первая группа предельных состояний* определяется потерей несущей способности – прочности или устойчивости;
- *вторая группа предельных состояний* определяется возникновением чрезмерно больших деформаций или колебаний сооружения;
- *третья группа предельных состояний* определяется образованием и развитием трещин и других повреждений.

В данном пособии рассматривается расчет на прочность для первой группы предельного состояния.

Расчет на прочность по первой группе предельных состояний отличается более гибким подходом к значению необходимого запаса прочности. При этом вместо одного коэффициента запаса вводятся несколько коэффициентов.

Коэффициент надежности по нагрузке γ_f учитывает возможное увеличение нагрузки по сравнению с ее нормативным значением R_H , приведенном в СНиП. Расчет на прочность производится на действия расчетных нагрузок P_P , значения которых определяются по формуле

$$P_P = R_H \cdot \gamma_f. \quad (4.24)$$

Для постоянных нагрузок (например собственный вес) коэффициент $\gamma_f = 1,05$ – $1,3$. Для временных нагрузок $\gamma_f = 1,05$ – $1,4$. Например, для ветровой нагрузки коэффициент принимаем $\gamma_f = 1,4$.

Коэффициент надежности по материалу γ_m учитывает возможное уменьшение нормативного сопротивления R_H материала конструкции по сравнению с данными испытаниями на образцах. Для пластичных материалов за нормативное сопротивление принимается предел текучести $R_H = \sigma_T$, для хрупких – предел прочности $R_H = \sigma_B$. Для стальных конструкций величина γ_m принимается в пределах $1,025$ – $1,15$.

Величина

$$R = \frac{R_H}{\gamma_m} \quad (4.25)$$

называется *расчетным сопротивлением материала*. Для строительных сталей эта величина определяется по формуле

$$R = \frac{\sigma_T}{\gamma_m} \quad (4.26)$$

и называется *расчетным сопротивлением по пределу текучести*.

Коэффициент условий работы γ_C , зависящий от вида конструкции и особенностей ее работы, изменяется в пределах 0,75–1,0.

Условие прочности при расчете по первой группе предельных состояний сводится к требованию, чтобы наибольшие растягивающие напряжения σ_P^{max} и наибольшие по абсолютной величине сжимающие напряжения σ_C^{max} от расчетных значений нагрузок не превышали величин расчетных сопротивлений при растяжении R_P и сжатии R_C , умноженных на коэффициент условий работы γ_C :

$$\sigma_P^{max} \leq \gamma_C R_P, \quad \sigma_C^{max} \leq \gamma_C R_C. \quad (4.27)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то производится проверка прочности по наибольшему по абсолютной величине напряжению:

$$\sigma^{max} \leq \gamma_C R. \quad (4.28)$$

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде

$$\tau \leq \gamma_C R_S, \quad (4.29)$$

где R_S – *расчетное сопротивление материала при сдвиге*. Для пластичных материалов $R_S = 0,6R$.

При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности, которые по аналогии с (4.22) и (4.23) можно представить в виде

$$\sigma_P^{max} = \left| \frac{N_P^{max}}{F} \right| \leq \gamma_C R_P, \quad \sigma_C^{max} = \left| \frac{N_C^{max}}{F} \right| \leq \gamma_C R_C \quad (4.30)$$

или

$$\sigma^{max} = \left| \frac{N^{max}}{F} \right| \leq \gamma_C R. \quad (4.31)$$

Вопросы для самопроверки

1. Назовите правило знаков для продольного внутреннего усилия.
2. В чем смысл закона Гука?
3. Что характеризует модуль упругости?
4. Как определить деформацию стержня при растяжении и сжатии?
5. Что такое допускаемое напряжение?
6. Запишите условие прочности и условие жесткости при растяжении и сжатии.
7. Как определяют механические характеристики материалов?
8. Перечислите механические характеристики материалов.
9. Что такое упругая и остаточная деформация?
10. В чем отличие диаграмм растяжения хрупких и пластичных материалов?
11. Что такое коэффициент запаса?
12. Что такое опасное сечение?

Глава 5. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

5.1. Расчет на прочность при растяжении и сжатии.

Статически определимая задача

Рассмотрим примеры статически определимых задач расчета на прочность стержней при растяжении и сжатии. *Статически определимой* считается задача, в которой количество неизвестных величин не превышает количества независимых уравнений, которые можно составить для данной задачи.

Пример 5.1. Для статически определимой стержневой системы (рис. 55), нагруженной сосредоточенной силой $P = 2 \text{ кН}$, необходимо:

1. Определить продольную силу в каждом из стержней, поддерживающих жесткий брус.

2. Подобрать размеры поперечных сечений стержней, учитывая:

– что *стержень 1* стальной, круглого поперечного сечения, для которого допускаемое нормальное напряжение $[\sigma_1] = 160 \text{ МПа}$;

– *стержень 2* деревянный, квадратного поперечного сечения, для которого допускаемое нормальное напряжение $[\sigma_2] = 8 \text{ МПа}$;

– *стержень 3* дюралюминиевый, трубчатого поперечного сечения, для которого допускаемое нормальное напряжение $[\sigma_3] = 80 \text{ МПа}$. Отношение наружного и внутреннего диаметра составляет $D/d = 1,2$.

Высоту жесткого бруса считать малой по сравнению с размерами конструкции и в расчетах ее не учитывать.

В расчетах принять $a = 2 \text{ м}$; $b = 2,5 \text{ м}$; $c = 0,5 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.

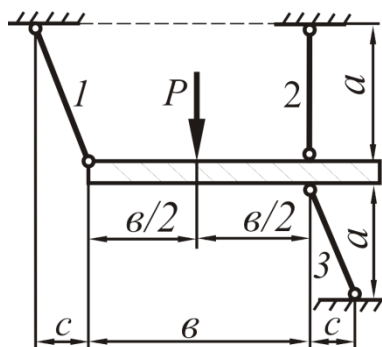


Рисунок 55 – Схема к примеру 5.1

Решение

Рассмотрим равновесие жесткого бруса. Для освобождения бруса от связей мысленно рассечем стержни и заменим связи их реак-

циями N_1 , N_2 и N_3 (рис. 56). Внутренние усилия, возникающие в стержнях, определим, составив уравнения равновесия.

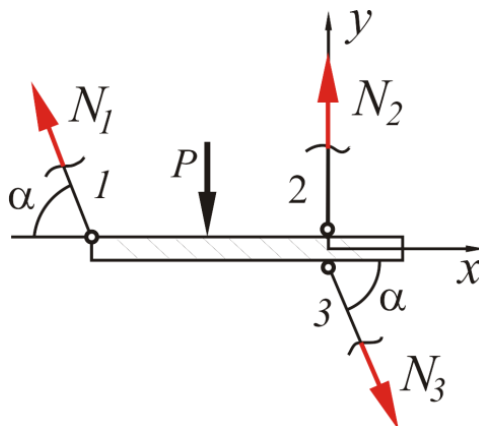


Рисунок 56 – Расчетная схема к примеру 5.1

Из рисунка 55 нетрудно заметить, что угол наклона стержня 1 и стержня 3 к оси x одинаковый. Обозначим этот угол через α и составим уравнение равновесия для проекций всех сил на ось x :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha = 0. \quad (5.1)$$

Составим уравнение равновесия для проекций всех сил на ось y :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N_1 \sin \alpha + N_2 - N_3 \sin \alpha - P = 0. \quad (5.2)$$

Составим уравнение равновесия для моментов всех сил относительно точки O :

$$\sum_{k=1}^n m_O(F_{kx}) = -N_1 b \sin \alpha + P \frac{b}{2} = 0. \quad (5.3)$$

Определим $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{c}{l}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{l},$$

где

$$l = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Решая систему трех уравнений, найдем усилия в стержнях. Из уравнения (5.3) определим усилие в первом стержне N_1 :

$$N_1 = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{2}{2 \sin 30} = 2 \kappa H.$$

Из уравнения (5.1) определим усилие в третьем стержне N_3 :

$$N_3 = N_1 = 2 \kappa H.$$

Из уравнения (5.2) определим усилие во втором стержне N_2 :

$$N_2 = N_3 \sin \alpha + P - N_1 \sin \alpha = 2 \sin 30 + 2 - 2 \sin 30 = 2 \kappa H.$$

Размеры поперечных сечений определим из условия прочности при растяжении и сжатии:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{F} \leq [\sigma].$$

Несмотря на то, что усилия в стержнях получились одинаковые, размеры поперечных сечений будут отличаться, так как они выполнены из различных материалов, с разными допускаемыми напряжениями.

Первый стержень – стальной круглого поперечного сечения. Определим из условия прочности площадь поперечного сечения стержня:

$$\sigma_1 = \frac{|N_1|}{F_1} \leq [\sigma_1];$$

$$F_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma_1]} \geq \frac{2 \cdot 10^3}{160} = 12,5 \text{ мм}^2.$$

Если диаметр круглого поперечного сечения d , то площадь поперечного сечения первого стержня определится так:

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4},$$

тогда

$$d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = 3,9 \text{ мм}.$$

Второй стержень – деревянный квадратного поперечного сечения. Определим площадь поперечного сечения второго стержня:

$$F_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma_2]} \geq \frac{2 \cdot 10^3}{8} = 250 \text{ мм}^2.$$

Если сторона квадрата h , то

$$F_2 = h^2.$$

Определим сторону квадрата поперечного сечения:

$$h = \sqrt{F_2} = \sqrt{250} = 15,8 \text{ мм}.$$

Третий стержень – дюралюминиевый трубчатого поперечного сечения. Определим площадь поперечного сечения:

$$F_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma_3]} \geq \frac{2 \cdot 10^3}{80} = 25 \text{ мм}^2.$$

Если внешний и внутренний диаметры трубчатого сечения D и d соответственно, то площадь будет равна:

$$F_3 = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (1,44d)^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = 0,345d^2.$$

Определим внешний и внутренний диаметры поперечного сечения:

$$d = \frac{F_3}{0,345} = \frac{25}{0,345} = 72,4 \text{ мм}; \quad D = 1,2d = 86,9 \text{ мм}.$$

Пример 5.2. Для заданного стального бруса (рис. 57, а), нагруженного сосредоточенными силами, требуется определить площадь поперечного сечения и перемещение точки В, если допускаемое нормальное напряжение $[\sigma_1] = 160 \text{ МПа}$, внешняя нагрузка $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = 5 \text{ кН}$, $P_3 = 30 \text{ кН}$, $P_4 = 60 \text{ кН}$ и длины участков бруса $l_1 = 0,4 \text{ м}$, $l_2 = 0,6 \text{ м}$, $l_3 = l_4 = 0,3 \text{ м}$.

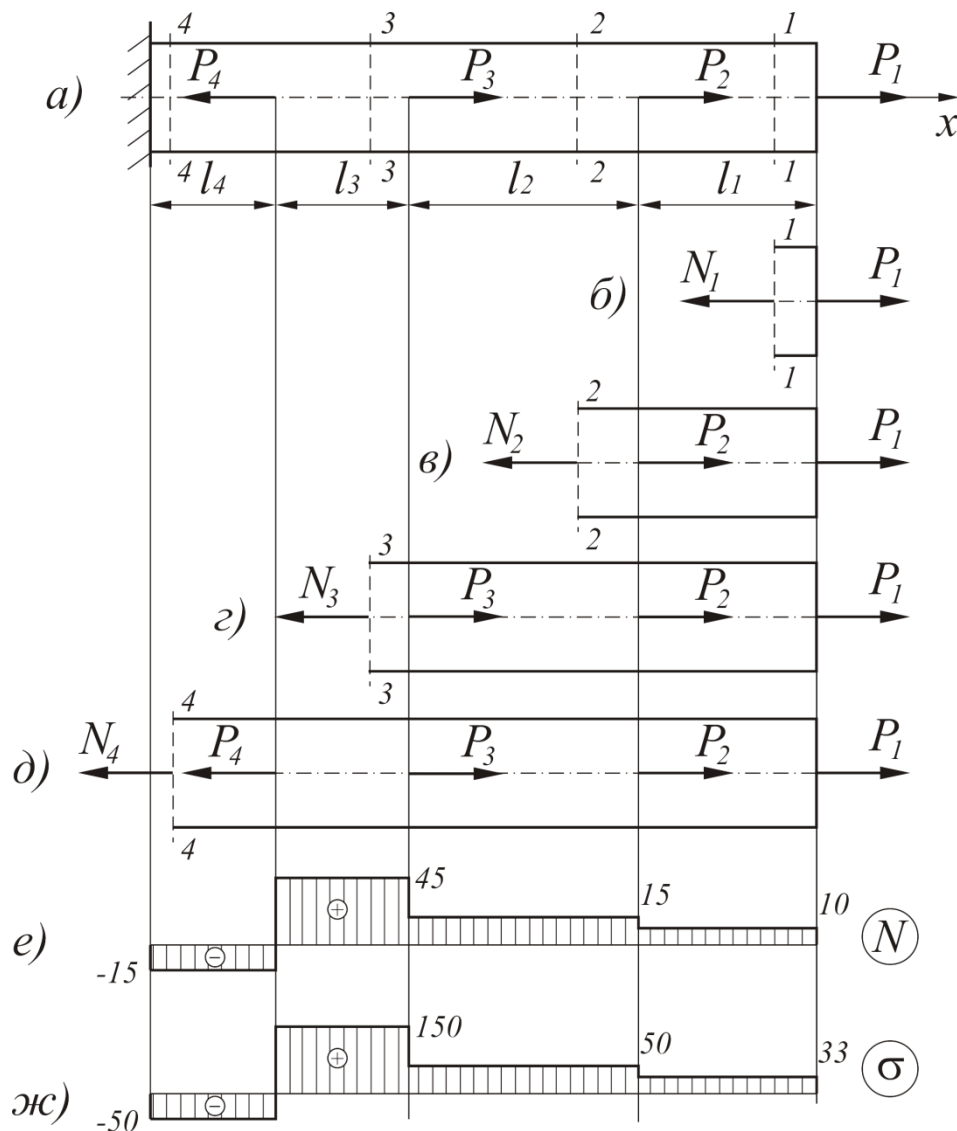


Рисунок 57 – Расчетная схема к примеру 5.2

Решение

Заданный брус разделен сосредоточенными силами на четыре участка, поэтому необходимо сначала определить внутреннюю продольную силу на каждом участке бруса

Для определения внутренних усилий воспользуемся методом сечения. Для этого проведем сечение 1–1, отбросим левую часть бруса и заменим ее действие на правую часть внутренней продольной

силой N_1 (см. рис 57, б). Для определения внутренней продольной силы N_1 составим уравнение равновесия:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_1 + P_1 = 0 \Rightarrow \quad N_1 = P_1 = 10 \text{ кН}.$$

Получили на первом участке внутреннюю продольную силу положительную, постоянную и равную 10 кН .

Аналогично проведем сечение 2–2, отбросим левую часть бруса и заменим ее действие на правую часть внутренней продольной силой N_2 (рис 57, в). Для определения внутренней продольной силой N_2 составим уравнение равновесия:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_2 + P_1 + P_2 = 0 \Rightarrow \quad N_2 = P_1 + P_2 = 15 \text{ кН}.$$

Проделав аналогичные действия, составим уравнения равновесия для третьего и четвертого участков:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_3 + P_1 + P_2 + P_3 = 0 \Rightarrow \quad N_3 = P_1 + P_2 + P_3 = 45 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = 0: \quad -N_4 + P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = 0 \Rightarrow \quad N_4 = P_1 + P_2 + P_3 - P_4 = -15 \text{ кН}.$$

Построим эпюру внутренних усилий N (рис. 57, е) в выбранном масштабе.

Площадь поперечного сечения определим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma^{max} = \frac{|N^{max}|}{F} \leq [\sigma] \Rightarrow F \geq \frac{|N^{max}|}{[\sigma]} \geq \frac{45 \cdot 10^3 \text{ Н}}{150} \geq 300 \text{ мм}^2.$$

Получили, что минимальная площадь поперечного сечения не должна быть меньше $F = 300 \text{ мм}^2$.

Зная площадь поперечного сечения, определим распределение нормального напряжения по участкам бруса:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = 33 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = 50 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F} = 150 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F} = -50 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру нормальных напряжений (см. рис. 57, ж).
Перемещение точки В определим по формуле (4.7):

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EF},$$

где n – количество участков бруса.

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta l_B &= \frac{N_1 l_1}{EF} + \frac{N_2 l_2}{EF} + \frac{N_3 l_3}{EF} + \frac{N_4 l_4}{EF} = \\ &= \frac{10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 300} (10 \cdot 400 + 15 \cdot 600 + 45 \cdot 300 - 15 \cdot 300) = 0,37 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Так как перемещение получилось положительное, следовательно, точка В перемещается вправо и брус при этом удлиняется.

Пример 5.3. Для ступенчатого бруса (рис. 58, а) с жестко защемленным концом необходимо:

1. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений Δl .

2. Подобрать величину площади поперечных сечений всех участков бруса из условия прочности по нормальным напряжениям, используя следующие числовые значения:

$$P_1 = 30 \text{ кН}; P_2 = 20 \text{ кН}; q = 20 \text{ кН/м}; a = 1 \text{ м}; [\sigma_P] = 160 \text{ МПа}; [\sigma_c] = 80 \text{ МПа}; E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}; F_1 = F; F_2 = 2F; F_3 = 3F.$$

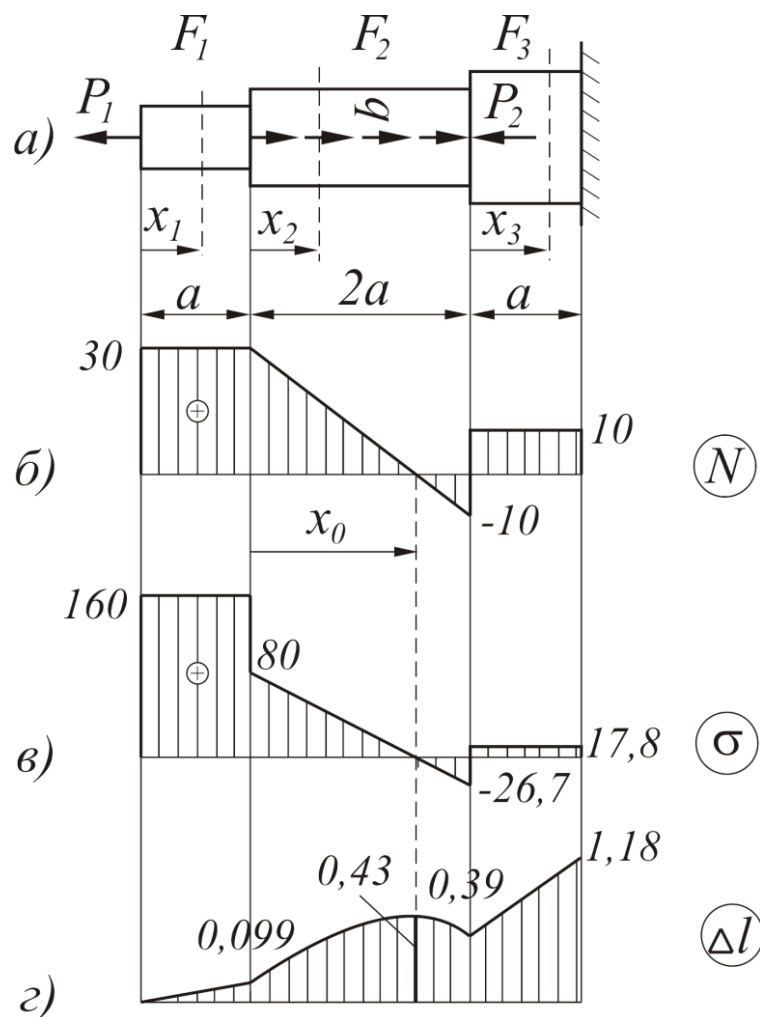


Рисунок 58 – Расчетная схема для примера 5.3

Решение

1. Брус состоит из трех участков. Границами участков являются сечения, к которым приложены внешние силы, или сечения, где изменяются размеры поперечных сечений.

Величину внутренних продольных усилий определим, используя метод сечений.

В соответствии с расчетной схемой (рис. 58, *a*) аналитические зависимости для определения продольной силы N будут иметь следующий вид:

$$N_1 = P_1 = 30 \text{ кН},$$

$$N_2 = P_1 - q_2 x_2,$$

где

$$0 \leq x_2 \leq 2a,$$

тогда

$$N_2(x_2 = 0) = P_1 = 30 \text{ кН},$$

$$N_2(x_2 = 2a) = P_1 - q \cdot 2a = -10 \text{ кН},$$

$$N_3 = P_1 - q \cdot 2a + P_2 = 10 \text{ кН}.$$

На основании полученных значений строим эпюру продольных сил N (см. рис. 58, б).

2. Из условия прочности по нормальным наибольшим напряжениям растяжения и сжатия определим площадь поперечного сечения F .

Из эпюры внутренних усилий (см. рис. 58, б) видно, что максимальное внутреннее усилие имеет место на первом участке, при этом первый участок имеет наименьшую площадь поперечного сечения, поэтому максимальные напряжения будут на первом участке.

Запишем условие прочности по растягивающим нормальным напряжениям для первого участка:

$$\sigma_P^{\max} = \sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{30}{F} \leq [\sigma_P],$$

тогда

$$F \geq \frac{30}{[\sigma_P]} = \frac{30 \cdot 10^3}{160} = 187 \text{ мм}^2.$$

Из эпюры внутренних усилий видно, что сжимающее напряжение будет только на втором участке, там, где внутреннее усилие отрицательное. Запишем условие прочности по сжимающим нормальным напряжениям:

$$\sigma_C^{\max} = \frac{|N_C^{\max}|}{F} \leq [\sigma_C].$$

Так как сжимающее усилие действует на втором участке, где заданная площадь поперечного сечения равна $F_2 = 2F$, то условие прочности запишется в следующем виде:

$$\sigma_C^{\max} = \frac{|-5|}{2F} \leq [\sigma_C],$$

тогда

$$F \geq \frac{|-5|}{2 \cdot [\sigma_C]} = \frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 60} \geq 41,6 \text{ мм}^2.$$

Окончательно выбираем параметр $F = 187 \text{ мм}^2$.

Определим площади поперечных сечений каждого участка:

$$F_1 = F = 187 \text{ мм}^2, F_2 = 2F = 374 \text{ мм}^2, F_3 = 3F = 561 \text{ мм}^2.$$

3. Определим значения нормальных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P_1}{F} = \frac{30 \cdot 10^3}{187} = 160 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P_1 - q \cdot x_2}{2F},$$

$$\sigma_2(x_2 = 0) = \frac{P_1}{2F} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 187} = 80 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2(x_2 = 2a) = \frac{P_1 - q \cdot 2a}{2F} = \frac{-10 \cdot 10^3}{2 \cdot 187} = -26,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_2} = \frac{P_1 - q \cdot 2a + P_2}{3F} = \frac{10 \cdot 10^3}{3 \cdot 187} = 17,8 \text{ МПа}.$$

Согласно полученным значениям, строим эпюру нормальных напряжений (рис. 58, в).

4. Для построения эпюры деформации Δl определим перемещения сечений на границах участков бруса, начиная от жесткой заделки (сечение А, перемещение которого равно нулю):

$$\Delta l_A = 0,$$

$$\Delta l_B = \frac{N_3 \cdot a}{EF_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 561} = 0,099 \text{ мм};$$

$$\begin{aligned} \Delta l_C &= \Delta l_B + \int_0^{2a} \frac{N_2}{EF_2} dx = \Delta l_B + \int_0^{2a} \frac{P_1 - qx_2}{EF_2} dx_2 = \Delta l_B + \frac{P_1 2a}{EF_2} - \frac{1}{2} \frac{q(2a)^2}{EF_2} = \\ &= 0,099 + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 374} - \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 4}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 374} = \\ &= 0,099 + 0,297 = 0,396 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Так как уравнение для перемещения на втором участке содержит квадратичную функцию, то графиком функции перемещения на втором участке будет являться парабола, причем в сечении, где $N_2 = 0$, парабола будет иметь экстремум. Для определения экстремума на параболе сначала необходимо определить расстояние x_0 до сечения, где $N_2 = 0$:

$$P_1 - qx_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{P_1}{q} = 1,5 \text{ м}.$$

Подставляя значение x_0 в пределы интегрирования, получим значение экстремума на параболе:

$$\begin{aligned} \Delta l_{x_0} &= \Delta l_B + \int_0^{x_0} \frac{N_2}{EF_2} dx_2 = \Delta l_B + \int_0^{x_0} \frac{P_1 - qx_2}{EF_2} dx_2 = \Delta l_B + \frac{P_1 x_0}{EF_2} - \frac{1}{2} \frac{q(x_0)^2}{EF_2} = \\ &= 0,099 + \frac{30 \cdot 1,5 \cdot 10^6}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 374} - \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 2,25 \cdot 10^6}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 374} = 0,433 \text{ мм}, \end{aligned}$$

$$\Delta l_D = \Delta l_C + \frac{N_1 \cdot a}{EF_1} = 0,396 + \frac{30 \cdot 10^6}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 187} = 0,295 + 0,891 = 1,18 \text{ мм}.$$

По найденным значениям Δl строим эпюру перемещений (рис. 58, з).

Пример 5.4. Жесткая балка (ее деформацией пренебречь) подперта стальным стержнем (подкосом) (рис. 59). Проверить прочность стержня. Определить допускаемую нагрузку P для заданного размера поперечного сечения стержня. Выполнить проектный расчет из условия прочности и жесткости ($[\delta_P]$ – допускаемая величина перемещения балки в точке приложения силы), если $P = 80 \text{ кН}$, $F = 1500 \text{ мм}^2$, $a = 1 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_T = 340 \text{ МПа}$, $[\delta_P] = 10 \text{ мм}$.

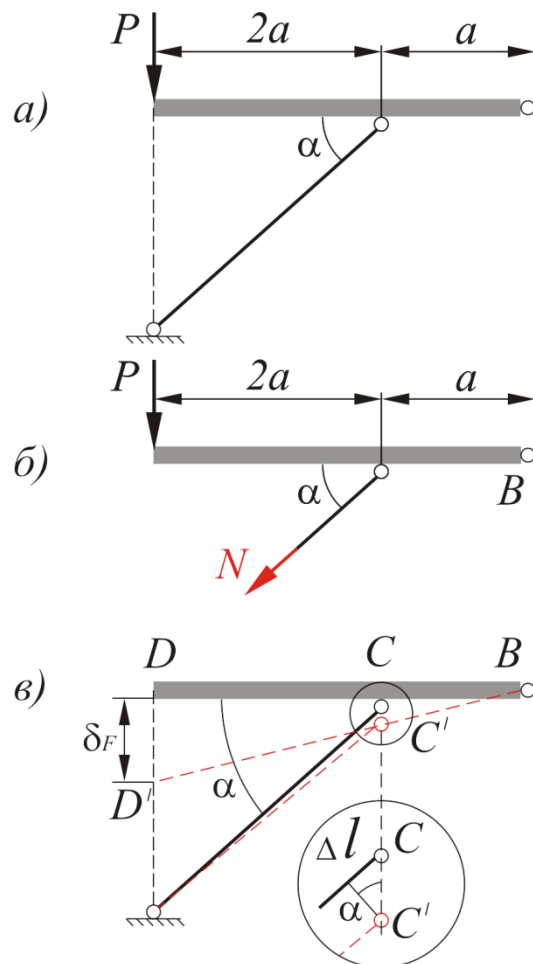


Рисунок 59 – Расчетная схема к примеру 5.4

Решение.

1. Определим внутреннее усилие в стержне.

Рассекаем стержень на две части (рис. 59, а), отбрасываем одну из частей и заменяем ее действие внутренним усилием N (рис. 59, б). Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0 : P \cdot 3a + N \cdot a \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = -\frac{P \cdot 3a}{a \cdot \sin \alpha} = -480 \text{ кН}.$$

2. Определим нормальное напряжение:

$$\sigma = \frac{N}{F} = -320 \text{ МПа}.$$

3. Определим фактический коэффициент запаса прочности:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{340}{|-320|} = 1,06.$$

Полученный коэффициент запаса прочности не входит в рекомендуемый (нормативный) диапазон значений $[n_T] = 1,3 \dots 2,3$. Поэтому **прочность недостаточна**.

4. Определим допускаемую нагрузку на конструкцию для заданного размера поперечного сечения стержня.

Из условия прочности при растяжении находим допускаемую нагрузку на стержень:

$$[N] \leq F[\sigma] = 15 \cdot 10^{-4} \cdot 170 \cdot 10^6 = 255 \text{ кН},$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} = \frac{340}{2} = 170 \text{ МПа}$ – допускаемое напряжение;

$[n_T] = 1,3 \dots 2,3$ – нормативный коэффициент запаса по текучести.

5. Из условия равновесия определим связь между допускаемой внешней нагрузкой $[P]$ на конструкцию и внутренним усилием $[N]$ в стержне:

$$[P] = \frac{-[N] \cdot a \cdot \sin \alpha}{3a} = \frac{|-255| \cdot 0,5}{3} = 42,5 \text{ кН}.$$

6. Определим требуемое значение площади поперечного сечения из условия прочности при растяжении:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{|-480 \cdot 10^3|}{170 \cdot 10^6} = 2,82 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 28,2 \text{ см}^2.$$

7. Выполним проектный расчет из условия жесткости. Под действием внешней нагрузки стержень деформируется; сечения балки изменяют свое положение в пространстве. Установим связь между внутренним усилием, деформацией стержня и перемещением заданного сечения конструкции. Покажем схему в исходном и деформированном (пунктирные линии) состояниях (рис. 59, в). Контролируемое перемещение сечения балки в точке D приложения силы δP связано с перемещением узла C точки прикрепления стержня к балке соотношением

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{3a}{a} = 3,$$

что следует из подобия треугольников BDD' и BCC' . Вследствие перемещения узла C стержень укорачивается на $\Delta l = CC' \cdot \sin \alpha$. Деформацию стержня определяем по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{N \cdot 2a}{EF \cos \alpha},$$

где l – длина стержня, определяемая из схемы нагружения (см. рис. 59, а). Тогда из условия жесткости конструкции

$$\delta_P = DD' = 3CC' = 3 \frac{N \cdot 2a}{EF \sin \alpha \cos \alpha} \leq [\delta_P]$$

определим требуемое значение площади поперечного сечения стержня:

$$F \geq \frac{3 \cdot N \cdot 2a}{[\delta_P] E \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{6 \cdot |-480000|}{0,01 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 0,866} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

Сравнивая результаты проектных расчетов из условия прочности и жесткости, назначаем большее из двух значений: 28,2 и 33,3 см, удовлетворяющее обоим условиям, т. е. $F \geq 33,3 \text{ см}^2$.

5.2. Расчет на прочность при растяжении и сжатии.

Статически неопределимая задача

Пример 5.5. Для статически неопределимого ступенчатого бруса (рис. 60, а):

- построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений Δl ;
- подобрать величину площади поперечных сечений всех участков бруса, если известно, что $P_1 = 30 \text{ кН}$; $P_2 = 20 \text{ кН}$; $a = 1 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

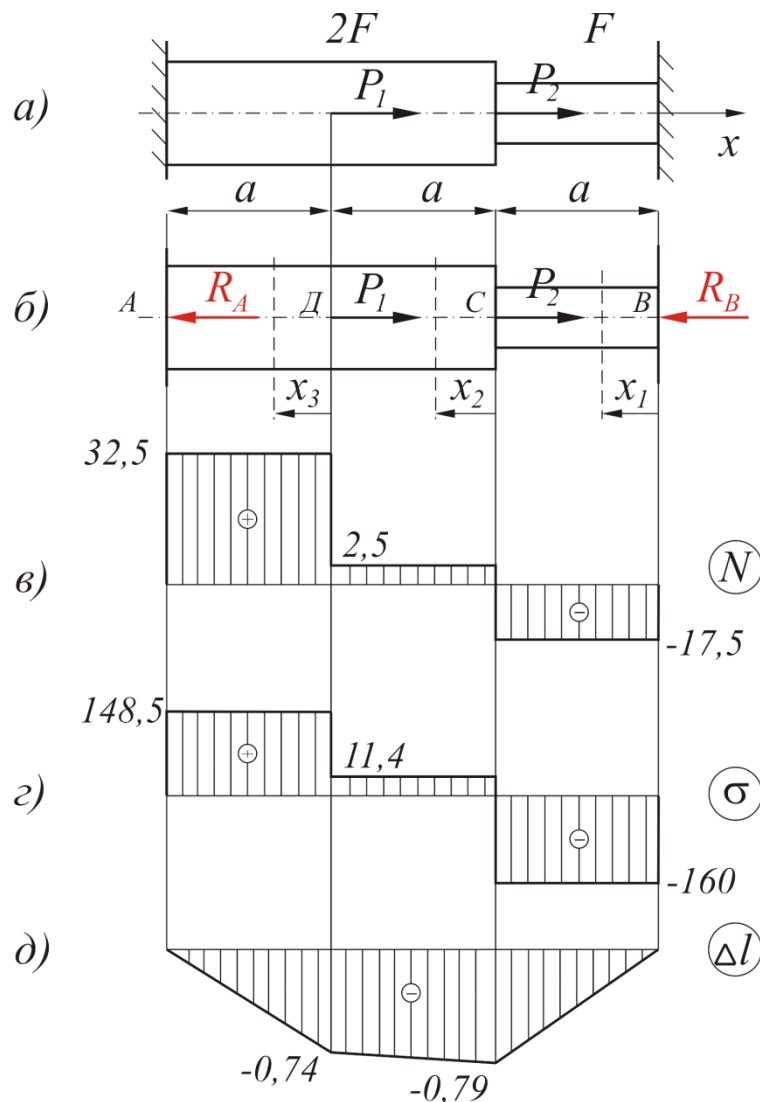


Рисунок 60 – Расчетная схема к примеру 5.5

Решение

Заменим действие жестких заделок реакциями R_A и R_B (рис. 60, б). Так как неизвестных реакций две, а уравнение равновесия для пло-

ской системы сил, действующих по одной прямой, только одно, то задача является один раз статически неопределимой.

Для определения реакций опор воспользуемся принципом независимости действия сил. Отбросим правую опору и заменим ее действие на брус реакцией R_B . Перемещение сечения в точке В равно нулю, так как это сечение жестко закреплено. Тогда, согласно принципу независимости действия сил, можно записать уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l_{BP_1} + \Delta l_{BP_2} + \Delta l_{BR_B} = 0,$$

где Δl_{BP_1} , Δl_{BP_2} , Δl_{BR_B} – деформации бруса от действия сил P_1 , P_2 и R_B .

Распишем эти деформации по закону Гука:

$$\frac{P_1 a}{E \cdot 2F} + \frac{P_2 2a}{E \cdot 2F} - \frac{R_B a}{E \cdot F} - \frac{R_B 2a}{E \cdot 2F} = 0,$$

отсюда

$$R_B = \frac{0,5P_1 + P_2}{2} = 17,5 \text{ кН}.$$

Для определения реакции в точке А составим уравнение равновесия:

$$\sum F_x = 0: \quad P_1 + P_2 - R_A - R_B = 0 \quad \Rightarrow R_A = P_1 + P_2 - R_B = 32,5 \text{ кН}.$$

Определим внутреннее продольное усилие N :

$$N_1 = -R_B = -17,5 \text{ кН},$$

$$N_2 = -R_B + P_2 = 2,5 \text{ кН},$$

$$N_3 = -R_B + P_2 + P_1 = 32,5 \text{ кН}.$$

Построим эпюру внутренней продольной силы (рис. 60, в).

Определим площадь поперечных сечений из условия прочности при растяжении и сжатии. Для этого запишем выражения для нормальных напряжений участков бруса и определим опасное сечение:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = -\frac{R_B}{F} = -\frac{17,5}{F},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2F} = \frac{1,25}{F},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2F} = \frac{16,25}{F}.$$

Из полученных выражений видно, что максимальное напряжение имеет место на первом участке, значит опасным является первый участок.

Запишем условие прочности для первого участка и определим параметр F :

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N_1}{F} \right| \leq [\sigma], \quad F \geq \frac{N_1}{[\sigma]} \geq 109,4 \text{ мм}^2.$$

Определим величины напряжений бруса:

$$\sigma_1 = -\frac{17,5}{F} = -160 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{1,25}{F} = 11,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{16,25}{F} = 148,5 \text{ МПа}.$$

Для построения эпюры деформации Δl определим перемещения сечений на границах участков бруса, начиная от жесткой заделки (сечение B , перемещение которого равно нулю). Причем перемещение сечения A должно получиться равным нулю:

$$\Delta l_B = 0;$$

$$\Delta l_C = \frac{N_1 a}{EF} = -\frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 109,4} = -0,799 \text{ мм},$$

$$\Delta l_D = \Delta l_C + \frac{N_2 a}{2EF} = -0,799 + \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 109,4} = -0,799 + 0,057 = -0,74 \text{ мм},$$

$$\Delta l_A = \Delta l_D + \frac{N_3 a}{2EF} = -0,74 + \frac{32,5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 109,4} = -0,74 + 0,74 = 0 \text{ мм}.$$

По полученным значениям построим эпюры напряжения (рис. 60, з) и деформации Δl (см. рис. 60, д).

Пример 5.6. Стержень, нагруженный продольной силой $P = 100 \text{ кН}$ (рис. 61, а), зашпелен в точке А и не доходит до противоположной опоры в точке В на величину зазора $\Delta l_0 = 1,25 \text{ мм}$. На участке АС стержень медный, длиной $l_M = 1600 \text{ мм}$ и площадью поперечного сечения $F_M = 1000 \text{ мм}^2$; на участке СВ стержень стальной, длиной $l_C = 800 \text{ мм}$ и площадью поперечного сечения $F_C = 2000 \text{ мм}^2$. Определить напряжения, возникающие в медной и стальной частях стержня, если модули упругости для меди $E_M = 1,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, для стали — $E_C = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

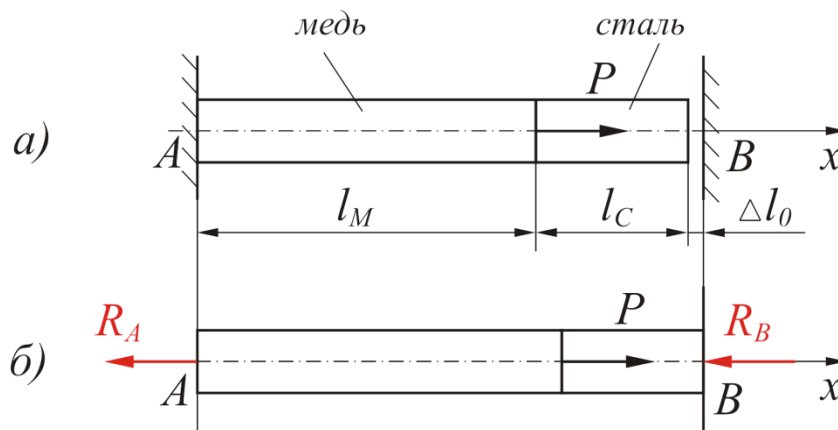


Рисунок 61 – Расчетная схема к примеру 5.6

Решение

Для начала определим реакции опор R_A и R_B в точках А и В (рис. 61, б), составив условие равновесия и условие совместности деформаций, учитывая, что разность величин удлинения медного участка и укорочения стального участка равна зазору $\Delta l_0 = 1,25 \text{ мм}$:

$$R_A + R_B = P,$$

$$\Delta l_M - \Delta l_C = \Delta l_0,$$

где $\Delta l_M, \Delta l_C$ – деформации медного и стального участков стержня.

Определим деформации медного и стального участков:

$$\Delta l_M = \frac{R_A l_M}{E_M F_M} \quad \text{и} \quad \Delta l_C = \frac{R_B l_C}{E_C F_C}.$$

Тогда

$$\frac{R_A l_M}{E_M F_M} - \frac{R_B l_C}{E_C F_C} = \Delta l_0.$$

Заменяя $R_B = P - R_A$, получим:

$$\frac{R_A l_M}{E_M F_M} + \frac{R_A l_C}{E_C F_C} = \frac{P l_C}{E_C F_C} + \Delta l_0.$$

Из полученного выражения определим реакцию R_A :

$$R_A = \frac{\frac{P l_C}{E_C F_C} + \Delta l_0}{\frac{l_M}{E_M F_M} + \frac{l_C}{E_C F_C}}.$$

После подстановки численных значений получим $R_A = 80,5 \text{ кН}$.

Тогда

$$R_B = P - R_A = 100 - 80,5 = 19,5 \text{ кН}.$$

Определим напряжения, возникающие на медном и стальном участках стержня:

$$\sigma_M = \frac{R_A}{F_M} = \frac{80,5 \cdot 10^3}{10^3} = 80,5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = \frac{R_B}{F_C} = \frac{19,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 9,75 \text{ МПа}.$$

**Задания для самостоятельной работы
по теме «Расчет на прочность при растяжении и сжатии»**

Задание 3. Расчет статически определимой стержневой системы при растяжении и сжатии.

Вариант численного значения (табл. 6) назначается преподавателем, а вариант схемы – по номеру студента в списке группы.

Для статически определимой стержневой системы (табл. 5.2), нагруженной силой P , необходимо:

1. Определить внутреннюю продольную силу в каждом из стержней, поддерживающих жесткий брус (толщиной удерживаемого бруса пренебречь).

2. Подобрать размеры поперечного сечения стержней:

– если стержень 1 – стальной, круглого поперечного сечения, допускаемое напряжение $[\sigma_1] = 160 \text{ МПа}$;

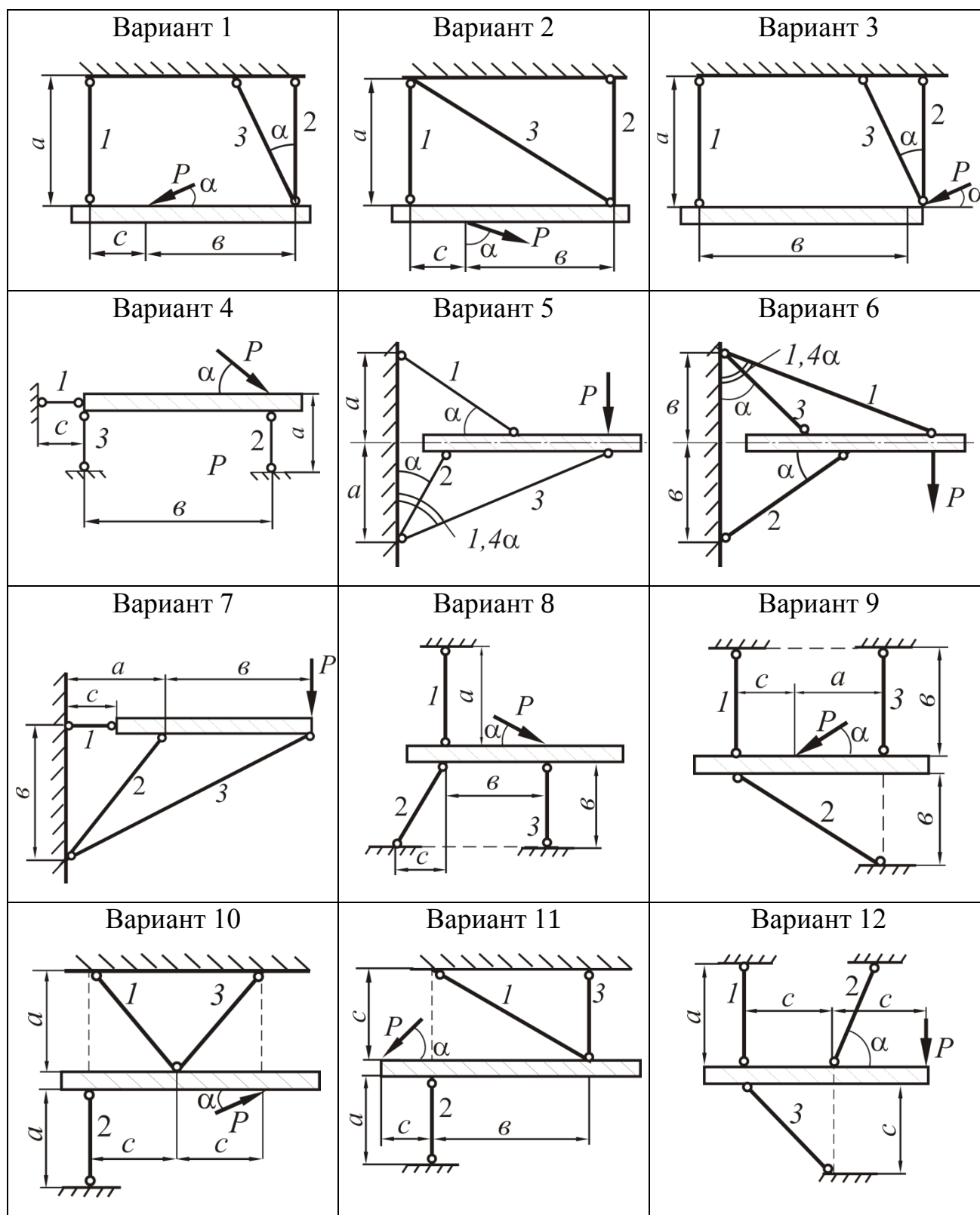
– стержень 2 – деревянный, квадратного поперечного сечения, допускаемое напряжение $[\sigma_2] = 8 \text{ МПа}$;

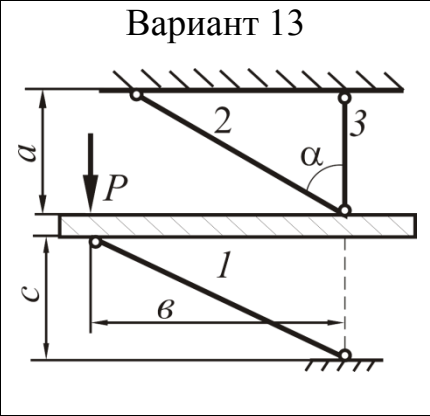
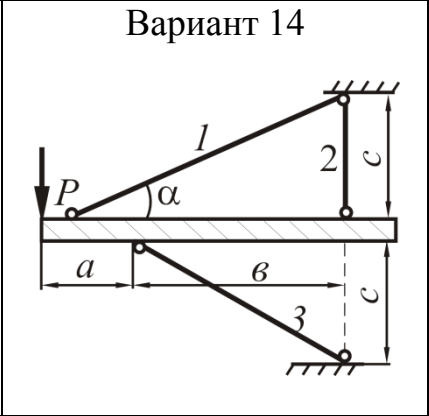
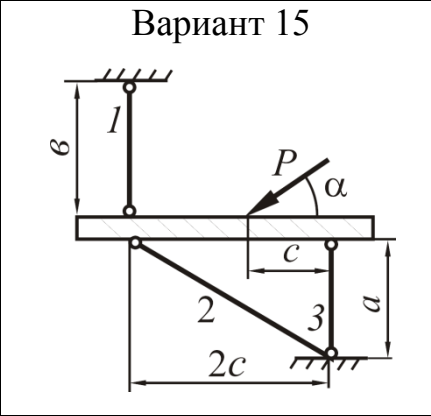
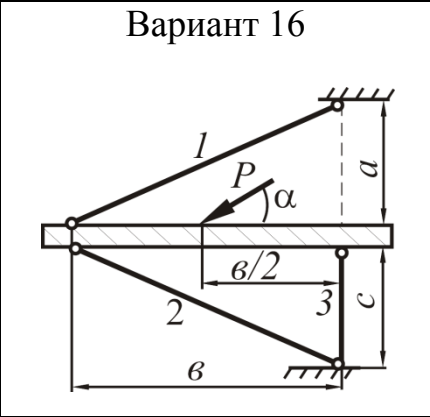
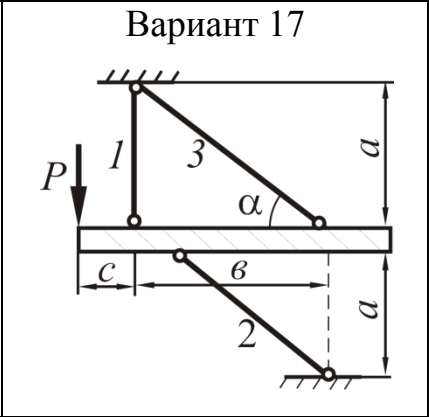
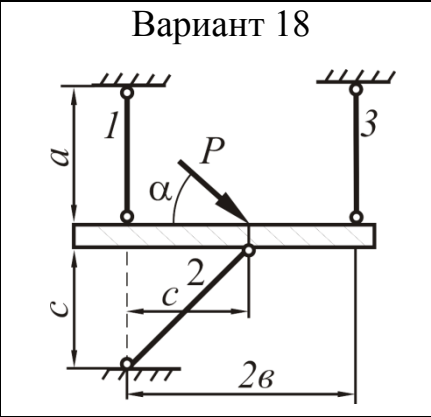
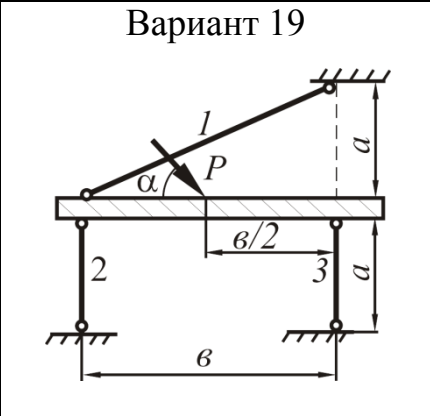
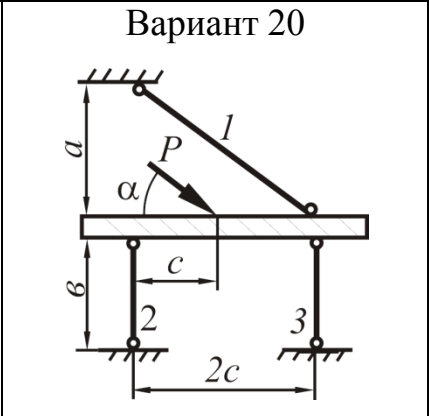
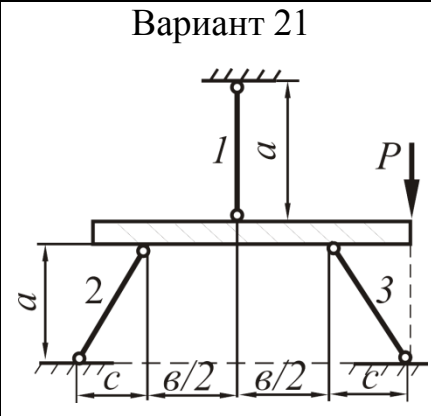
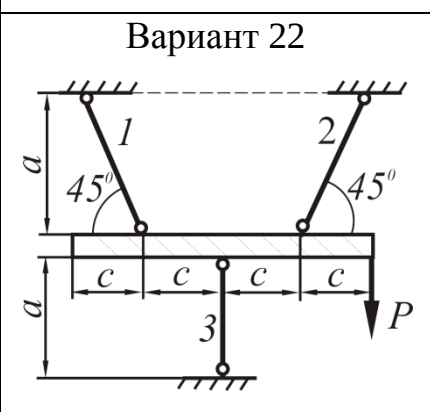
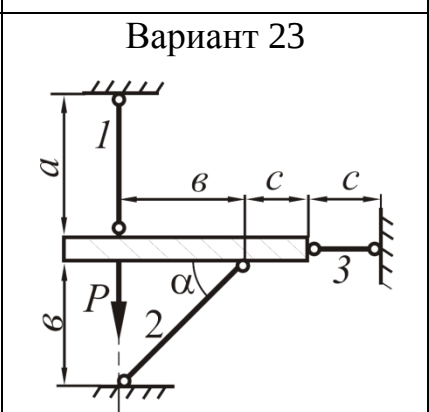
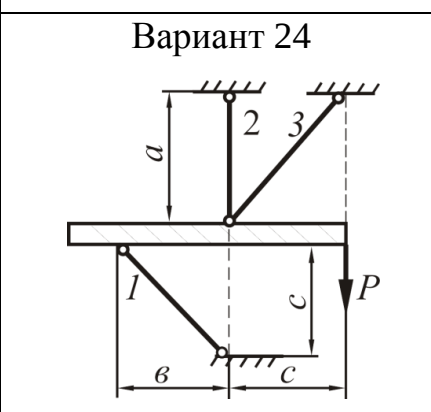
– стержень 3 – дюралюминиевый, трубчатого поперечного сечения, допускаемое напряжение $[\sigma_3] = 80 \text{ МПа}$. Отношение наружного и внутреннего диаметра составляет $D/d = 1,2$.

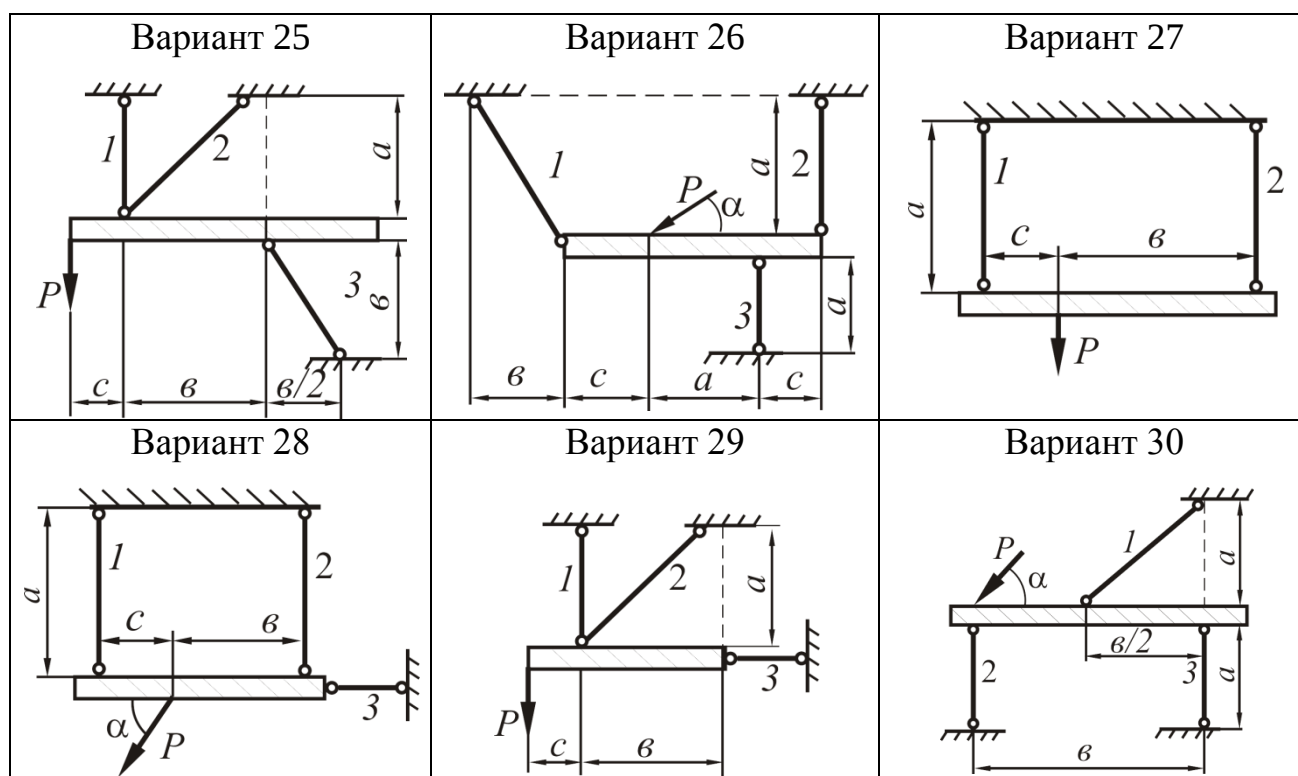
Таблица 6 – Численные значения к заданию 3

Вариант	$P, \text{ кН}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$\alpha, \text{ град.}$
1	10	0,9	1	0,3	30
2	15	1	1,5	0,6	35
3	12,5	0,9	1,8	0,4	40
4	18	1,1	1,7	0,5	25
5	20	1,3	1,6	0,7	45
6	22,3	1,5	2	0,5	28
7	25,6	1,2	1,7	0,6	18
8	17,8	0,8	1,6	0,2	39
9	11,5	0,7	1,5	0,3	40
10	16,2	1,3	2,1	0,6	37

Схемы к заданию 3



Вариант 13 	Вариант 14 	Вариант 15 
Вариант 16 	Вариант 17 	Вариант 18 
Вариант 19 	Вариант 20 	Вариант 21 
Вариант 22 	Вариант 23 	Вариант 24 



Задание 4. Расчет статически определимого ступенчатого стержня при растяжении и сжатии

Вариант численного значения (табл. 7) назначается преподавателем, а вариант схемы – по номеру студента в списке группы.

Для статически определимого ступенчатого стержня с жестко заштыленным концом (схема), нагруженного продольными усилиями P_1 , P_2 , q_1 и q_2 (табл. 7), необходимо:

1. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений Δl .
2. Подобрать величину площади поперечных сечений для всех участков стержня из условия прочности по допускаемым нормальным напряжениям при растяжении и сжатии.

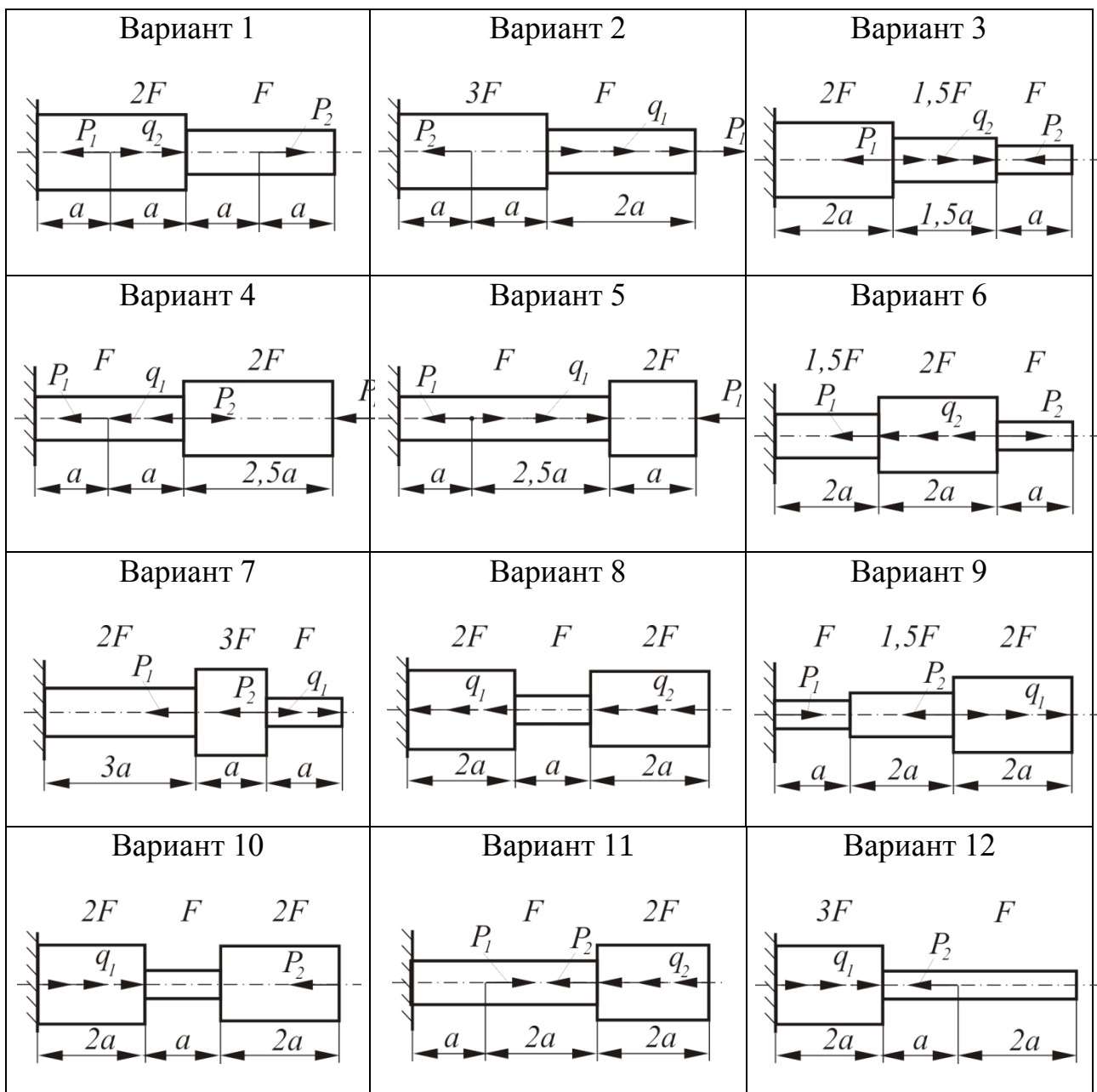
Таблица 7 – Численные значения к заданию 4

Вариант	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м
1	2	3	4	5
1	10	80	10	70
2	20	70	15	80
3	30	60	20	90
4	40	50	25	60
5	50	40	30	50

1	2	3	4	5
6	60	30	35	40
7	70	10	40	30
8	80	20	45	20
9	10	50	55	50
10	20	70	65	20

Принять для всех вариантов следующие соотношения: $[\sigma_p] = 160 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$, $E = 10^5 \text{ МПа}$, $a = 1 \text{ м}$.

Схемы к заданию 4



Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
Вариант 25	Вариант 26	Вариант 27
Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30

Задание 5. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня при растяжении и сжатии.

Вариант численного значения (табл. 8) назначается преподавателем, а вариант схемы – по номеру студента в списке группы.

Для статически неопределимого ступенчатого стержня с жестко защемленными концами (схема к заданию), нагруженного продольными усилиями P_1 , P_2 , q_1 и q_2 (табл. 8), необходимо:

1. Построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений Δ .

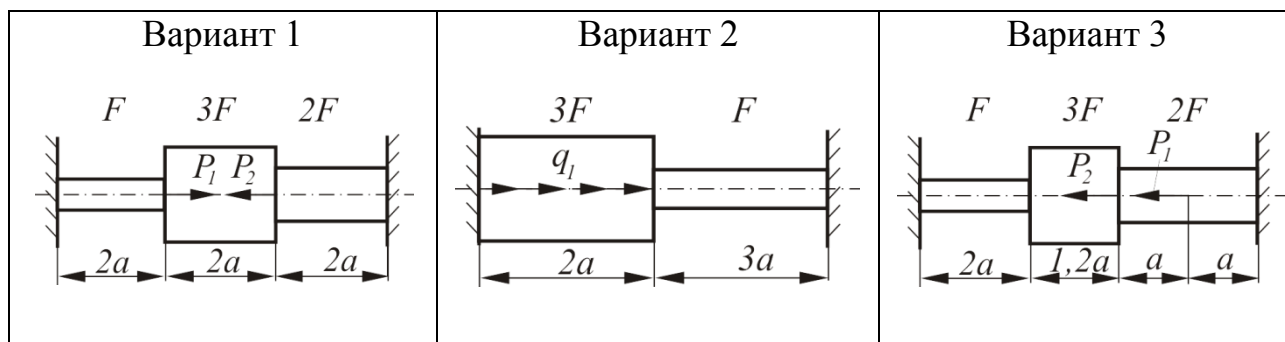
2. Подобрать величину площади поперечных сечений для всех участков стержня из условия прочности по допускаемым нормальным напряжениям при растяжении и сжатии.

Таблица 8 – Численные значения к заданию 5

Вариант	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м
1	10	80	10	70
2	20	70	15	80
3	30	60	20	90
4	40	50	25	60
5	50	40	30	50
6	60	30	35	40
7	70	10	40	30
8	80	20	45	20
9	10	50	55	50
10	20	70	65	20

Принять для всех вариантов следующие соотношения: $[\sigma_p] = 160 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$, $E = 10^5 \text{ МПа}$, $a = 1 \text{ м}$.

Схемы к заданию 5



Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21

Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
Вариант 25	Вариант 26	Вариант 27
Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30

Глава 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1. Напряжения в точке. Главные площадки и главные напряжения

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц, а возникающие при этом напряжения препятствуют смещению частиц, ограничивая его в большинстве случаев некоторой малой величиной.

В свое время Огюстена Луи Коши заинтересовали уравнения равновесия твердого тела, выведенные Навье, уравнения равновесия между внешними силами, действующими на тело, и внутренними силами между частицами этого тела. Навье считал, что на любое сечение при деформации действует система молекулярных сил, каждая из которых действует на бесконечно малую площадку. Для того чтобы элемент работал нормально, эта система сил должна находиться в равновесии.

Коши принадлежит гипотеза о том, что давление на любую поверхность твердого тела не обязательно должно быть перпендикулярным. В последствии Коши вывел те уравнения, с которых до сих пор начинается изучение теории упругости.

В первую очередь Коши рассматривает механическую «судьбу» бесконечно малого объема вещества, вырезанного из твердого тела, например изгибаемой балки. Мысленно проводится такая операция. Внутри тела делается четыре разреза, так что вырезанная часть тела становится похожа на часть отсеченного угла куба: три грани такого угла перпендикулярны друг другу, а четвертая – соединяет их длинные стороны.

Такая призмочка мысленно выносится из тела наружу и рассматривается ее равновесие. Поскольку вырезанная часть в теле была связана со всех сторон силами, то при обрыве этих связей она должна изменить форму и размеры. Чтобы этого не произошло, т. е. чтобы сохранилось равновесие, необходимо ко всем граням этого тела приложить такие силы, которые бы в точности восстановили его прежнюю форму в теле так, как будто разрезов и не было.

Приведя в порядок силы на гранях элементарного объема, т. е. разлагая их на нормальные перпендикулярные и сдвигающие, действующие в плоскости грани, можно получить равновесия, связывающие напряжения на разных гранях друг с другом.

Изучая напряженное состояние элементарного кусочка балки математическими методами, Коши открыл законы, по которым сила передается с одних граней на другие, по которым можно определить сжатые и растянутые, перегруженные и совсем ненагруженные места в элементе.

Коши устанавливает точное число разного вида напряжений, которое необходимо для полной характеристики механического состояния любой напряженной внутри тела плоской поверхности. Коши показал, что в теле всегда можно выделить такие площадки, в которых будут действовать только нормальные, т. е. перпендикулярные к сечению силы – он их назвал главными напряжениями, а их направления – главными направлениями. Соответственно деформации, которые вызваны главными напряжениями, названы им главными деформациями. В конечном итоге Коши выявит полную систему уравнений для решения задач теории упругости.

Немного позже уравнениями равновесия занялся современник Навье и Коши, Пуассон. Он доказал, что эти уравнения не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы рассчитать напряженное состояние твердого тела.

Напряженное состояние в данной точке тела характеризуется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих на бесконечном множестве различно ориентированных в пространстве площадок, которые можно провести через эту точку.

Предположим, что в окрестности исследуемой точки выделен бесконечно малый элемент, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и напряжения, возникающие на его гранях, известны. Каждое из этих напряжений может быть разложено на три составляющих, параллельных координатным осям. Таким образом, в общем случае на трех исходных площадках возникают девять составляющих напряжений, показанных на рисунке 62. Правило индексов для напряжений было дано выше в параграфе 3.3. Указанные девять величин называют *компонентами напряженного состояния в данной точке*.

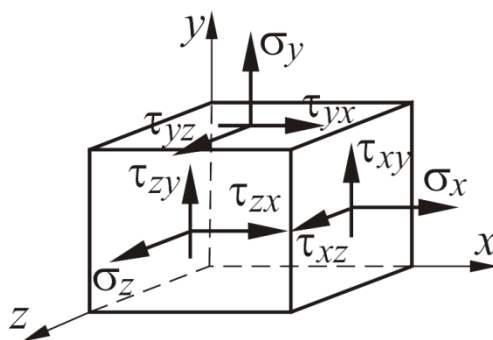


Рисунок 62 – Напряжения в точке

Из условия равновесия выделенного элемента следует, что составляющие касательных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру этих площадок, равны по абсолютному значению т. е.:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (6.1)$$

Это положение называют **законом парности касательных напряжений**. Следовательно, из девяти компонентов независимы лишь шесть.

Итак, первое положение теории напряженного состояния может быть сформулировано следующим образом: *напряженное состояние в точке тела задано, если известны напряжения на любых трех проходящих через нее взаимно перпендикулярных площадках*.

Таким образом, совокупность напряжений на гранях такого элементарного параллелепипеда полностью характеризует напряженное состояние в точке нагруженного тела. Эта совокупность напряжений называется **тензором напряжений**.

Если ориентацию граней выделяемого элемента изменить, то действующие на его гранях напряжения также изменятся. При этом можно провести такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Площадки, на которых касательных напряжений нет, называются **главными площадками**, а нормальные напряжения на этих площадках – **главными напряжениями**.

Можно доказать, что, как бы ни было нагружено тело, в каждой точке его имеются, по крайней мере, три главные площадки, причем они взаимно перпендикулярны. Следовательно, в каждой точке будут и три главных напряжения и они тоже взаимно перпендикулярны.

Направления, параллельные главным напряжениям, называют **главными направлениями напряжений в данной точке**.

Главные напряжения обозначают σ_1 , σ_2 и σ_3 , при этом индексы следует расставлять так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (6.2)$$

Такое напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю, называется **одноосным или линейным** (рис. 63, а). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то это **двухосное**, или **плоское**, напряженное состояние (рис. 63, б). Когда все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называется **трехосным** или **объемным** (рис. 63, в).

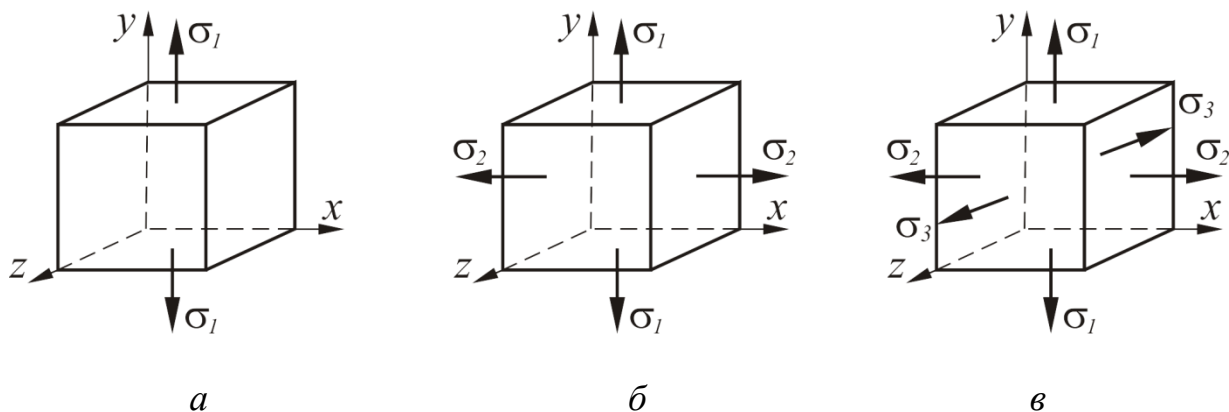


Рисунок 63 – Главные напряжения

Максимальное для данной точки тела касательное напряжение τ_{max} возникает на площадке, параллельной вектору σ_2 и делящей пополам прямой угол между площадками действия σ_1 и σ_3 .

Это напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}. \quad (6.3)$$

Площадка, на которой возникает напряжение τ_{max} , показана на рисунке 64. На площадке, перпендикулярной этой указанной площадке, возникает такое же по значению касательное напряжение.

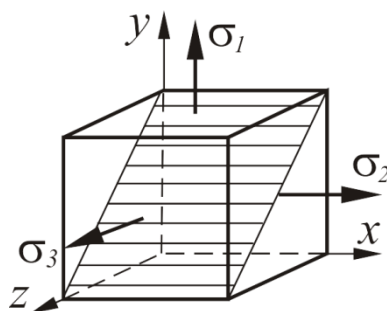


Рисунок 64 – Площадка максимального касательного напряжения

6.2. Исследование напряженного состояния при известных главных напряжениях

Для любой точки растянутого (сжатого) бруса одна из главных площадок совпадает с его поперечным сечением, а нулевые главные площадки совпадают с продольными сечениями. Напряжение, возникающее в поперечном сечении бруса при его растяжении, – это главное напряжение σ_1 ; при сжатии – главное напряжение σ_3 .

Предположим, что в окрестности некоторой точки тела выделен элемент, грани которого совпадают с главными площадками (рис. 65, а); напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 на этих гранях известны. Ограничимся определением нормальных и касательных напряжений для серии площадок, параллельных одному из главных напряжений.

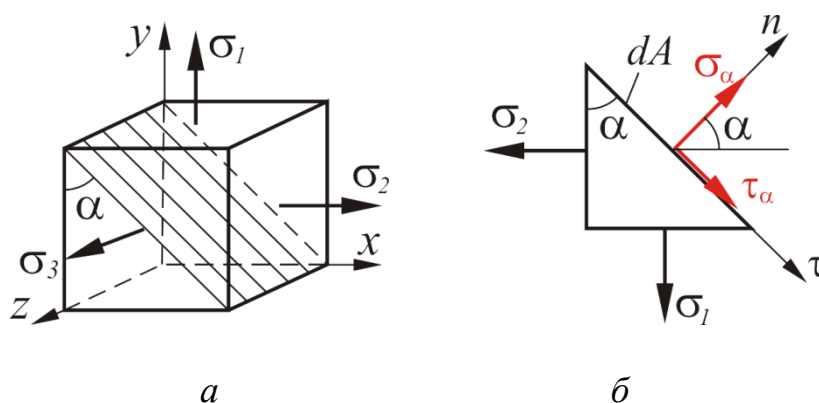


Рисунок 65 – Определение напряжений на площадке, параллельной одному из главных напряжений

Серией или семейством площадок называют совокупность бесчисленного множества площадок, параллельных одной и той же оси или, что то же самое, перпендикулярных одной и той же плоскости.

Рассечем элемент произвольной плоскостью, параллельной вектору σ_3 (см. рис. 65, а), и из уравнений равновесия, составленных для сил, действующих на отсеченную трехгранную призму (рис. 65, б), определим напряжения, возникающие на наклонной площадке.

Обозначим dA площадь указанной площадки и, спроецировав все силы, действующие на выделенную призму, на оси n и τ , получим

$$\sum_{np} n = 0: \quad \sigma_\alpha dA - (\sigma_1 dA \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_2 dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha. \quad (6.4)$$

$$\sum_{np} \tau = 0: \quad \tau_\alpha dA - (\sigma_1 dA \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_2 dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \cdot \sin \alpha,$$

или

$$\tau_\alpha = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.5)$$

Напряжения, возникающие на площадках рассматриваемой серии, не зависят от главного напряжения, параллельного этим площадкам (в нашем случае от σ_3).

Учитывая известные тригонометрические уравнения

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

преобразуем выражение (6.4):

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha.$$

Очевидно, наибольшее значение σ_α будет при $\alpha = 0^\circ$, $\max \sigma_\alpha = \sigma_1$ и минимальное – при $\alpha = 90^\circ$, $\min \sigma_\alpha = \sigma_2$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее нормальные напряжения для рассматриваемой серии площадок – это *главные напряжения*.

Учитывая, что

$$\sin 2\alpha = -\sin 2(\alpha + 90^\circ),$$

из выражения (6.5) будем иметь

$$|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+90^\circ}|.$$

Из этой же формулы следует, что наибольшее для данной серии площадок касательное напряжение возникает на площадке, нормаль к которой составляет угол 45° с направлением σ_1 , т. е. $\max \tau_\alpha = \tau_{12} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Формулы (6.4) и (6.5) справедливы (при соответствующей замене индексов) для любых из трех серий площадок, каждая из которых параллельна одному из главных напряжений. Для каждой из этих серий площадок есть свое наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ (для площадок, параллельных } \sigma_3);$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \text{ (для площадок, параллельных } \sigma_1);$$

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ (для площадок, параллельных } \sigma_2).$$

Учитывая, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, можно сделать вывод, что максимальным для данной точки тела, оказывается τ_{13} .

В частном случае при $\sigma_1 = \sigma_2$ ни на одной площадке исследуемой серии не возникает касательных напряжений, т. е. все площадки этой серии *главные*. Если все три главных напряжения равны между собой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то для данной точки тела любая проходящая через нее площадка *главная*.

6.3. Случай чистого сдвига

Рассмотрим частный случай плоского напряженного состояния, для которого отличные от нуля главные напряжения равны по модулю и противоположны по направлению (рис. 6б).

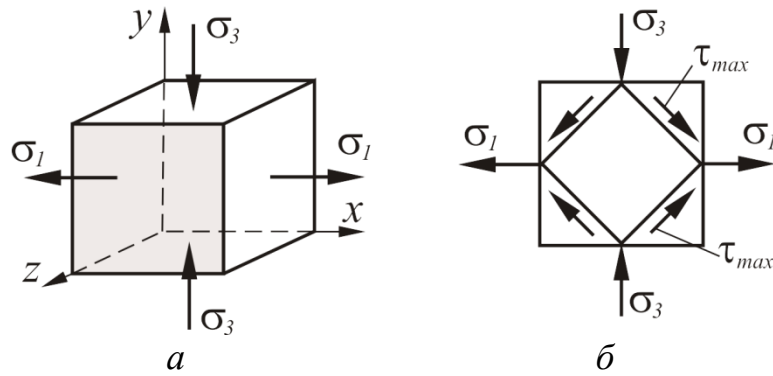


Рисунок 66 – Случай чистого сдвига

Такое напряженное состояние носит название *чистого сдвига*.

На рисунке 66, б показана проекция элемента на плоскость, совпадающую с нулевой главной площадкой (закрашенная плоскость на рис. 66, а). Для серии площадок, перпендикулярных плоскости чертежа, на основании формул (6.4) и (6.5) и условия $\sigma_1 = -\sigma_3$ имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_1 \sin^2 \alpha,$$

или

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos 2\alpha, \quad (6.6)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} \sin 2\alpha,$$

или

$$\tau_\alpha = \sigma_1 \sin 2\alpha. \quad (6.7)$$

Максимальное касательное напряжение для исследуемой серии площадок будет при угле $\alpha = 45^\circ$, $\max \tau_\alpha = \sigma_1$. Это напряжение максимально для данной точки тела, а не только для исследуемой серии площадок, так как эти площадки параллельны вектору σ_2 .

Итак, при чистом сдвиге

$$\tau_{13} = \tau_{\max} = \sigma_1 = -\sigma_3. \quad (6.8)$$

Подставляя в формулу (6.6) $\alpha = 45^\circ$ (или $\alpha = 135^\circ$), получаем, что $\sigma_{\alpha=45} = \sigma_{\alpha=135} = 0$, т. е. на площадках действия максимальных касательных напряжений нормальные напряжения отсутствуют.

Чистый сдвиг – единственный случай плоского напряженного состояния, когда через точку можно провести две взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения максимальны, а нормальные напряжения отсутствуют.

Таким образом, чистый сдвиг – это частный случай плоского напряженного состояния, при котором не равные нулю главные напряжения равны по значению и противоположны по знаку.

6.4. Основные понятия теории прочности

Галилей изучал состояние материалов в момент разрушения. Прочность, по Галилею, была связана с критическим, предельным состоянием элемента. Ученый пытался понять, почему колонна или балка разрушаются, какая сила вызывает это разрушение? Каковы должны быть форма, геометрические размеры и условия работы элемента, чтобы он не разрушался? Поведение же нагруженного элемента в нормальном рабочем состоянии, физико-механические процессы, происходящие при обычных нагрузках, были Галилею неведомы. Его представление о прочности тел и закономерности разрушения, на первый взгляд, было весьма упрощенным: тело разрушается в том случае, когда действующая на него растягивающая сила превзойдет предельную величину, постоянную для данного материала.

Галилей пытался выйти за рамки умозрительных рассуждений и при помощи математических доказательств прийти к теоретическому обобщению. Для этого ему не хватало математического аппарата и данных теоретической механики, поэтому нельзя сказать, что он построил теорию. Но он подготовил почву, на которой в дальнейшем выросла первая теория прочности.

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию. При оценке несущей способности конструкций и сооружений следует исходить из того, что в одних случаях наступление предельного состояния отождествляется с появлением пластических деформаций, в других – с разрушением конструкций. Если напряженное состояние в элементах сооружения является *одноосным*, то определение момента появления деформаций текучести или разрушения осуществляется достаточно просто путем сопоставления напряжений с пределом текучести или пределом прочности. Ситуация существенно усложняется в случае *плоского или объемного напряженного состояния*.

На первый взгляд, наиболее простой способ решения этой задачи состоит в испытании образцов материала при соответствующем нагружении с доведением их до предельного состояния. Однако такой путь приходится отклонить, поскольку для каждой новой комбинации нормальных и касательных напряжений пришлось бы снова проводить аналогичные эксперименты. Уже не говоря о том, что число таких испытаний было бы слишком велико, трудность заключается в практическом осуществлении подобных опытов. В связи с этим предпочтение отдается другому пути решения поставленной задачи, заключающемуся в установлении меры напряженного состояния, при достижении которой происходит *переход от упругого состояния к предельному*.

Такая мера устанавливается с помощью критериев пластичности (текучести) или прочности (разрушения). В качестве таких критериев были предложены различные факторы (максимальные нормальные напряжения, максимальные удлинения, энергия деформации и др.). Используется несколько различных критериев, так как каждый из них лишь косвенно отражает сложный, до конца не изученный процесс наступления предельного состояния в материале и оказывается применимым лишь в определенных условиях. Важно подчеркнуть, что «пластичность» и «прочность» – понятия разные, хотя они и могут быть взаимосвязанными. Появление пластических или остаточных деформаций, как правило, далеко не означает разрушение материала, в связи с чем критерии прочности и пластичности не следует отождествлять.

Допустим, что напряженное состояние в точке тела, отвечающее заданной нагрузке, известно. Путем ее увеличения напряжения в той же точке увеличиваются пропорционально и, в конце концов, либо наступает разрушение материала, либо появляются пластические деформации. Назовем *коэффициентом запаса* в этом случае отношение напряжений, при которых наступает предельное состояние в точке к одноименным действующим напряжениям. Будем называть *два напряженных состояния равноопасными*, если указанные коэффициенты запаса для них одинаковы.

Критерии текучести или прочности должны давать возможность сравнения степени опасности различных напряженных состояний материала. Указанное сравнение удобно производить, если одно из напряженных состояний, наиболее просто осуществимое в экспериментах, выбирается за основу. Такое напряженное состояние называют

эквивалентным. Обычно в качестве эквивалентного состояния выбирается *одноосное растяжение*.

Значение напряжения $\sigma_{эkv}$, при котором образец материала в условиях одноосного напряженного состояния оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженным состоянием в точке, называется *эквивалентным напряжением*.

Любое сложное напряженное состояние будем характеризовать главными напряжениями σ_1 , σ_2 и σ_3 . С использованием соответствующего критерия, как это показано ниже, может быть получено выражение $\sigma_{эkv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, после чего условие наступления предельного состояния записывается как при простом растяжении или сжатии:

$$\sigma_{эkv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0,$$

где σ_0 – опасное напряжение, вызывающее предельное состояние в образце при одноосном напряженном состоянии, т. е. это либо предел текучести $\sigma_0 = \sigma_T$, либо временное сопротивление $\sigma_0 = \sigma_B$.

В соответствии с методом предельных состояний, заменяя σ_0 на соответствующее нормируемое значение расчетного сопротивления материала R , условие прочности (пластичности) при сложном напряженном состоянии в общем случае формулируется в виде

$$\sigma_{эkv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq R. \quad (6.9)$$

Далее рассмотрены указанные зависимости при использовании различных критериев.

6.5. Теории прочности

Теории прочности используют для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. При двух- и трехосном напряженном состоянии соотношения между нормальными и касательными напряжениями настолько разнообразны, что экспериментальная проверка опасного состояния для каждого из соотношений практически исключается.

Задача несколько упрощается, если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной

линейному напряженному состоянию, т. е. простому растяжению или сжатию. Характеристики прочности и пластичности, полученные при испытании на растяжение, приведены в справочной литературе.

Суть теорий (гипотез, критериев) прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора), можно подобрать соответствующее *эквивалентное напряжение* при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с простым одноосным растяжением.

Эквивалентное напряжение $\sigma_{эkv}$ – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным с заданным.

Создан ряд теорий (гипотез, критериев) прочности (более 20), позволяющих определить вид функциональных зависимостей, представляющих сложное напряженное состояние эквивалентным ему одноосным напряженным состоянием.

В качестве причин наступления опасного состояния считают:

- а) нормальные напряжения – разрушение хрупкое, путем отрыва;
- б) линейные деформации;
- в) касательные напряжения – разрушение пластичное, путем сдвига;
- г) энергия деформации и др.

Следует заметить, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе области упругого деформирования. Это позволяет при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, пользоваться формулами, выведенными при условии применимости закона Гука.

Критерий наибольших нормальных напряжений. В качестве первого критерия прочности, называемого обычно *первой теорией прочности*, был принят *критерий наибольших нормальных напряжений*, в соответствии с которым причиной наступления предельного состояния считались наибольшие нормальные напряжения. Полагая эквивалентное напряжение равным наибольшему главному напряжению, условие наступления предельного состояния записываем в виде

$$\sigma_{эkv}^I = \sigma_1 \leq [\sigma], \quad (6.10)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении.

Эту гипотезу связывают с именем Г. Галилея. Гипотеза пренебрегает действием двух других главных напряжений и не учитывает появления пластических деформаций; дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов: стекла, керамики, камня, кирпича, бетона, гипса.

Теория наибольших нормальных напряжений не получила экспериментального подтверждения. Например, при всестороннем равномерном сжатии материалы не обнаруживают никаких признаков разрушения даже при напряжениях, превышающих предел прочности при сжатии. Если же при оценке прочности воспользоваться теорией наибольших нормальных напряжений, то разрушение должно произойти при $|\sigma_3| = \sigma_B$.

Критерий наибольших относительных удлинений. В качестве другого критерия прочности был предложен *критерий наибольших относительных удлинений*, обычно называемый *второй теорией прочности*. Согласно этой теории, прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении.

Таким образом, условие прочности следующее:

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon]. \quad (6.11)$$

Используя обобщенный закон Гука, выразим условие прочности (6.11) в напряжениях. Пусть наибольшее относительное удлинение будет ε_1 . Тогда

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Для линейного напряженного состояния, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, приняв в качестве допускаемого напряжение $[\sigma]$, мы тем самым для наибольшего относительного удлинения допускаем величину

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Подставим выражения для $\varepsilon_{\max}$ и $[\varepsilon]$ в условие прочности (6.11).

Тогда

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E},$$

или

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (6.12)$$

Как видно из условия прочности (6.12), в этой теории с допускаемым напряжением нужно сравнивать не то или другое главное напряжение, а их комбинацию. Эквивалентное напряжение в этом случае

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma. \quad (6.13)$$

Опытная проверка этой теории указывает на согласующиеся в ряде случаев результаты лишь для хрупкого состояния материала (например, для легированного чугуна и высокопрочных сталей после низкого отпуска). Отметим также, что применение второй теории прочности в виде (6.13) недопустимо для материалов, не следующих закону Гука или находящихся за пределами пропорциональности.

Критерий наибольших касательных напряжений (*третья теория прочности*). Согласно критерию наибольших касательных напряжений предполагается, что предельное состояние в общем случае наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение превысит допускаемое, определяемое при простом растяжении.

Условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau]. \quad (6.14)$$

Для объемного напряженного состояния

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (6.15)$$

При простом растяжении (линейном напряженном состоянии, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma}{2}, \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Решая совместно последние два равенства, получим

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (6.16)$$

Третья теория прочности хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения σ_2 , которое оказывает также некоторое, хотя во многих случаях и незначительное, влияние на прочность материала.

Отметим, что критерий наибольших касательных напряжений обычно рассматривается как условие начала образования пластических (остаточных) деформаций. Последние являются результатом скольжения слоев атомов в кристалле по определенным кристаллографическим плоскостям. Это становится возможным в случае, когда на указанных плоскостях скольжения касательные напряжения достигают некоторой предельной величины.

Таким образом, в качестве критерия, определяющего наступление текучести материала, можно принять величину наибольшего касательного напряжения.

Считая предельным состоянием наступление текучести, из равенства (6.16) имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (6.17)$$

Это условие удовлетворительно описывает начало пластической деформации для многих металлов и сплавов.

Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения – энергетическая теория прочности (*четвертая теория прочности*). Согласно энергетической теории, прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не превышает допускаемого значения, определенного при простом растяжении:

$$u_\phi \leq [u]. \quad (6.18)$$

Согласно гипотезе, высказанной Д. Максвеллом и разработанной М. Хубером, удельную потенциальную энергию деформации следует разложить на две компоненты, одна из которых отвечает за изменение объема, а другая – формы. В расчетах учитывать лишь одну из них – последнюю. Напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 , действующие по граням параллелепипеда, тоже можно разложить на две компоненты:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (\sigma_1 - \sigma_m) + \sigma_m, \\ \sigma_2 &= (\sigma_2 - \sigma_m) + \sigma_m, \\ \sigma_3 &= (\sigma_3 - \sigma_m) + \sigma_m,\end{aligned}$$

где $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ – среднее напряжение.

Опуская вывод, запишем формулу для энергии формоизменения для объемного напряженного состояния:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, приняв $\sigma_{экр} = \sigma_1$, получим

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2.$$

Тогда условие прочности по четвертой теории можно записать так:

$$\sigma_{экр}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (6.19)$$

Четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

Вопросы для самопроверки

1. Сколькими компонентами описывается напряженное состояние в точке в общем случае нагружения?
2. Что такое тензор напряжений?
3. Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
4. Какие главные напряжения характеризуют линейное, двухосное и объемное напряженное состояние?
5. Какие главные напряжения возникают в случае чистого сдвига?
6. Дайте определение равноопасному напряженному состоянию.
7. Что такое эквивалентное напряжение?
8. Перечислите основные причины наступления опасного состояния.
9. Охарактеризуйте основные теории прочности.

Глава 7. СДВИГ

7.1. Сдвиг. Расчет на срез

С деформацией сдвига мы встречаемся, когда из шести компонентов главного вектора и главного момента внутренних сил отличны от нуля только поперечные силы Q_y или Q_z . С достаточной степенью приближения деформация сдвига или среза практически может быть получена в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон на близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные оси бруса и направленные в противоположные стороны. Примером такого действия сил на брус может быть разрезание ножницами прутьев, полосы и т. п. (рис. 67). Примеры деталей, в которых может возникать сдвиг, показаны на рисунке 68. На практике сдвиг в чистом виде получить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций, чаще всего изгибом.

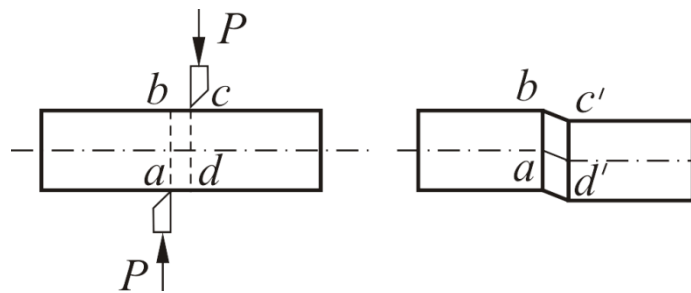


Рисунок 67 – Срез бруса

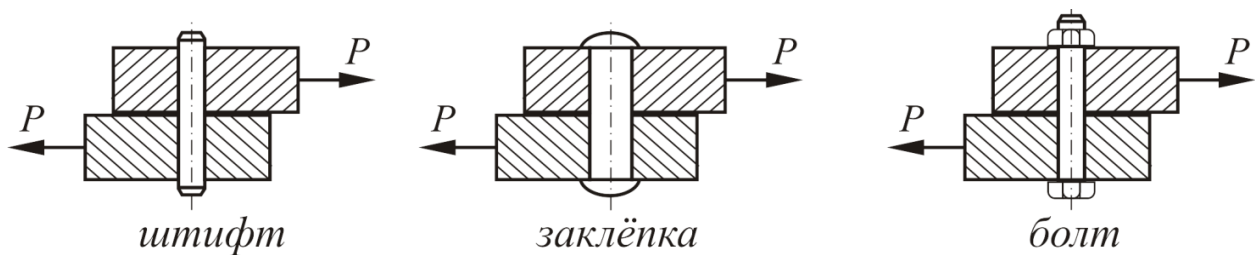


Рисунок 68 – Примеры деталей, работающих на срез

Практические расчеты на срез носят весьма условный характер и базируются на следующих основных допущениях:

1. В поперечном сечении возникает один внутренний силовой фактор – поперечная сила Q .

2. Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по его площади равномерно.

3. В случае если соединение осуществляется несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т. д.), принимается, что все они нагружены одинаково.

Установим формулы для напряжений и деформаций, необходимые при расчете на срез элементов конструкций, имеющих форму бруса. Рассмотрим брус, на который действует поперечная сила P (см. рис. 67). Используя метод сечений, определим на участке bc поперечную силу Q (рис. 69):

$$Q = P. \quad (7.1)$$

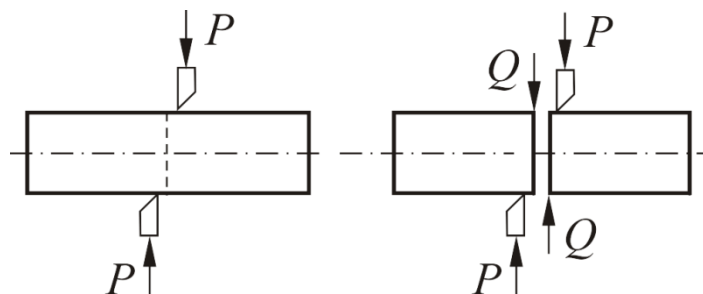


Рисунок 69 – Определение внутреннего усилия при сдвиге

Установим связь между поперечной силой и напряжениями, действующими в рассматриваемом сечении. Учитывая выражение (3.8), будем иметь

$$\int_F \tau dF = Q \quad (7.2)$$

Принимая касательные напряжения τ равномерно распределенными по площади поперечного сечения F , на основании выражений (7.1) и (7.2) будем иметь $Q = P = \tau F$, откуда

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (7.3)$$

Допущение о равномерности распределения касательных напряжений по сечению весьма условно. Однако это допущение во многих случаях оправдывает себя и поэтому в инженерной практике

им широко пользуются при расчете болтов, заклепочных соединений, шпонок, сварных соединений и других деталей.

Разрушение соединительных элементов происходит в результате их перерезывания по плоскости, совпадающей с поверхностью соприкосновения соединяемых деталей. Поэтому говорят, что элементы работают на срез, и возникающие в их поперечном сечении касательные напряжения также называют напряжениями среза и обозначают $\tau_{ср}$.

На основании вышеизложенных формул получаем *условие прочности при срезе*:

$$\tau_{ср} = \frac{P}{F} \leq [\tau_{ср}], \quad (7.4)$$

где $[\tau_{ср}]$ – допускаемое напряжение на срез, зависящее от материала соединяемых элементов и условий работы конструкции.

В машиностроении при расчете штифтов, болтов, шпонок и т. д. принимают $[\tau_{ср}] = (0,25 \dots 0,35)\sigma_T$, где σ_T – предел текучести материала конструкции.

Меньшее значение принимают при невысокой точности определения действующих нагрузок и возможности не строго статического нагружения.

7.2. Расчет на смятие

Расчет на срез обеспечивает прочность соединительных элементов, но не гарантирует надежности конструкций в целом. Если толщина соединяемых элементов недостаточна, то давления, возникающие между стенками их отверстий и соединительными деталями, получаются недопустимо большими. В результате стенки отверстий обминаются и соединение становится ненадежным. В случае если изменение формы отверстия значительно (при больших давлениях), а расстояние от его центра до края элемента невелики, часть элемента может срезаться (выколотся).

Давления, возникающие между поверхностями отверстий и соединительных деталей, принято называть *напряжениями смятия* и обозначать их $\sigma_{см}$. Распределение напряжений смятия на поверхности контакта деталей весьма неопределенно и в значительной степени за-

висит от зазора (в ненагруженном состоянии) между стенками отверстия и болтом (заклепкой и т. д.).

Расчет на смятие носит условный характер и ведется в предположении, что силы взаимодействия между деталями равномерно распределены по поверхности контакта и во всех точках нормальны к этой поверхности.

Условие прочности при смятии имеет следующий вид:

$$\sigma_{см} = \frac{P_{см}}{F_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (7.5)$$

где $P_{см}$ – нагрузка на одну соединительную деталь;

$F_{см}$ – расчетная площадь смятия;

$[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение на смятие.

В машиностроении допускаемое напряжение на смятие определяют следующим образом:

- для деталей из малоуглеродистой стали $[\sigma_{см}] = 100 \dots 120$ МПа;
- среднеуглеродистой стали $[\sigma_{см}] = 140 \dots 170$ МПа;
- чугунного литья $[\sigma_{см}] = 60 \dots 80$ МПа.

Обычно контактирующие детали изготовлены из различных материалов. В этом случае при выборе допускаемого напряжения ориентируются на материал той детали, прочность которой меньше.

За расчетную площадь смятия при контакте по плоскости принимают действительную площадь соприкосновения $F_{см}$. Так, например, для шпоночного соединения

$$F_{см} = tl,$$

где t – высота шпонки;

l – размер шпонки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

При контакте по цилиндрической поверхности принимают площадь проекции поверхности контакта на диаметральную плоскость, т. е.

$$F_{см} = d\delta,$$

где d – диаметр болта, штифта или заклепки (рис. 70);

δ – толщина соединяемых деталей. При различной толщине соединяемых деталей в расчетную формулу следует подставить δ_{min} .

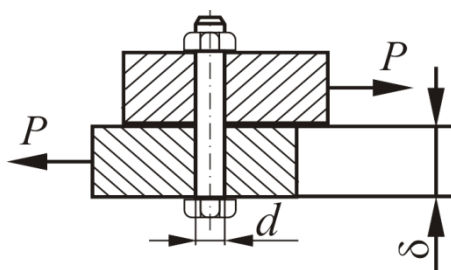


Рисунок 70 – Болтовое соединение

Помимо расчетов на срез и смятие, необходима проверка прочности соединяемых деталей на растяжение по ослабленному сечению, т. е. проходящему через центр отверстия, и расчет на срез части элемента от центра отверстия до ее края. Все указанные виды расчетов рассмотрены в следующих примерах.

Пример 7.1. Определить диаметр D и высоту h головки стержня, нагруженного растягивающей силой P (рис. 71). Расчет выполнить, исходя из условия равнопрочности стержня на растяжение, головки на срез и ее опорной поверхности на смятие, если $d_0 = 34$ мм, $d = 36$ мм. Допускаемые напряжения: $[\sigma_P] = 140$ МПа, $[\tau_{ср}] = 100$ МПа, $[\sigma_{см}] = 250$ МПа.

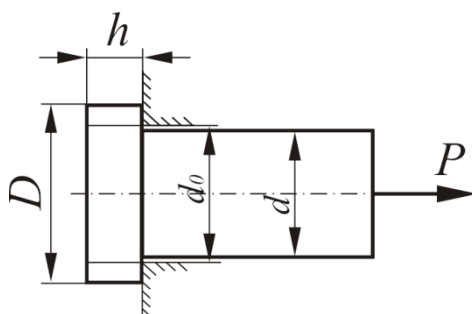


Рисунок 71 – Схема к примеру 7.1

Решение

1. Определим допускаемую нагрузку из условия прочности стержня на растяжение:

$$[P] = [\sigma_P] \frac{\pi d^2}{4} = 140 \cdot 10^6 \frac{3,14 \cdot 0,032^2}{4} = 112,6 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

2. Определим диаметр опорной поверхности головки из условия ее прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{P}{F_{см}} \leq [\sigma_{см}].$$

Принимая $P = [P]$, получаем

$$\sigma_{см} = \frac{[P]}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d_0^2)} \leq [\sigma_{см}],$$

откуда

$$D \geq \sqrt{\frac{4[P]}{\pi[\sigma_{см}]} + d_0^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 250 \cdot 10^6} + 0,034^2} \geq 0,0417 м \geq 41,7 мм.$$

Принимаем $D = 42 мм$.

3. Определим высоту головки из условия прочности на срез:

$$\tau_{ср} = \frac{P}{F_{ср}} \leq [\tau_{ср}].$$

Площадь среза равна боковой поверхности цилиндра высотой h и диаметром d_0 (место возможного среза условно показаны на рисунке 71 пунктирными линиями).

Принимая $P = [P]$, получаем

$$\tau_{ср} = \frac{[P]}{\pi d_0 h} \leq [\tau_{ср}],$$

Откуда

$$h \geq \frac{[P]}{\pi d_0 [\tau_{ср}]} = \frac{112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 34 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^6} \geq 0,01055 м \geq 10,55 мм.$$

Принимаем $h = 11 мм$.

7.3. Расчет заклепочных соединений

Заклепочные соединения относятся к неразъемным соединениям. На рисунке 72, *а* представлено соединение двух поло внахлестку, а на рисунке 72, *б* – встык с одной накладкой. В том и другом случае при разрушении заклепок срез каждой из них происходит по одному поперечному сечению, поэтому эти соединения называют *односрезными*. На рисунке 73, *а* показано соединение встык с двумя накладками, а на рисунке 73, *б* – прикрепление к фасонному листу узла фермы стержня, состоящего из двух равнобоких прокатных уголков. В том и другом случае срез каждой заклепки при разрушении происходит по двум поперечным сечениям и соединение называют *двухсрезным*.

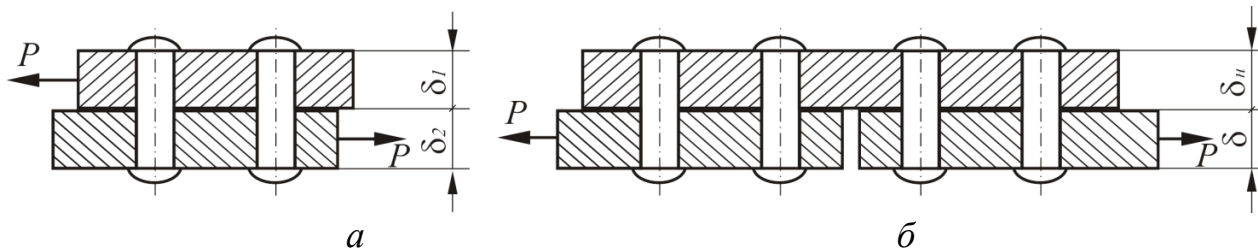


Рисунок 72 – Односрезное соединение

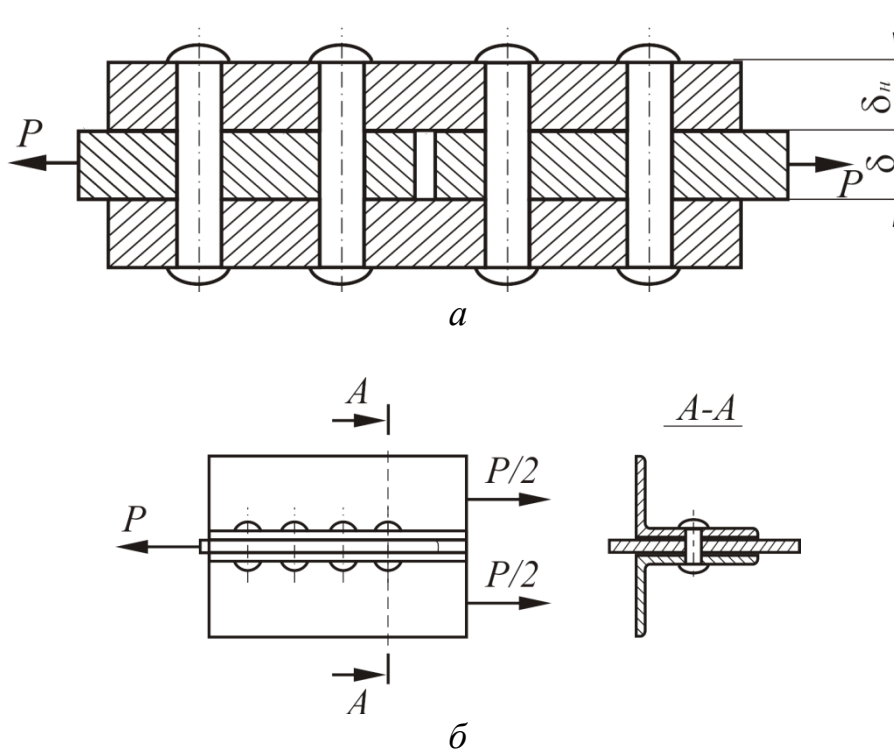


Рисунок 73 – Двухсрезное соединение

Расчет заклепочных соединений ведется на срез и смятие на основе допущений, указанных в предыдущем параграфе. Между склепываемыми элементами развиваются значительные силы трения, а работа заклепок на срез начинается лишь после того, как внешние силы станут больше сил трения и начнется сдвиг склепанных полос. При расчетах это обстоятельство не учитывают.

Склепываемые элементы (полосы, уголки и т. д.) рассчитывают на растяжение (сжатие) с учетом ослабления их поперечных сечений отверстиями для заклепок.

Расстояние e от центра первой заклепки до края полосы (рис. 72, *a*) принимают обычно равным удвоенному диаметру заклепки. При таком расстоянии прочность края полосы на срез обеспечена и специальный расчет не нужен.

Диаметр отверстия в склепываемых элементах на 0,5...1 мм больше диаметра непоставленной заклепки. В расчетные формулы входит диаметр d отверстия, так как в выполненном соединении заклепка практически полностью заполняет отверстие.

Зависимости для проверочных расчетов имеют следующий вид:

– на срез

$$\tau_{cp} = \frac{P}{ik \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_{cp}], \quad (7.6)$$

где i – общее число заклепок, передающих заданную нагрузку P ; в конструкциях, представленных на рисунках 72, *a* и 73, *б* – это общее число заклепок, а в соединениях встык (рис. 72, *б* и 73, *a*) – это число заклепок по одну сторону стыка;

k – число плоскостей среза одной заклепки; для конструкций, приведенных на рисунке 72, $k = 1$, а на рисунке 73 – $k = 2$;

– на смятие

$$\sigma_{cm} = \frac{P}{id\delta} \leq [\sigma_{cm}]. \quad (7.7)$$

При односрезных соединениях (рис. 72) вместо δ надо подставлять в формулу значения меньшей из толщин склепываемых элементов, а при двухсрезных – меньшей из величин δ или $2\delta_n$ (рис. 73, *a*). Для соединения, показанного на рис. 73, *б*, под δ_n надо понимать толщину полки уголка.

При проектном расчете заклепочного соединения диаметром заклепок задаются, принимая его примерно равным $(1,5 \dots 2,5) \delta$. При различной толщине склепываемых элементов под δ понимают меньшую из них. Затем определяют допускаемую силу на одну заклепку:

а) из условия прочности на срез

$$[Q_{cp}] = [\tau_{cp}] k \frac{\pi d^2}{4}; \quad (7.8)$$

б) из условия прочности на смятие

$$[Q_{cp}] = [\sigma_{см}] d \delta. \quad (7.9)$$

По меньшей из допускаемых сил определяют требуемое число заклепок:

$$i \geq \frac{P}{Q_{min}}. \quad (7.10)$$

Пример 7.2. Определить необходимое число заклепок диаметром $d = 23 \text{ мм}$ для прикрепления раскоса фермы, состоящего из двух уголков $90 \times 56 \times 8$, к фасонному листу (косынке), имеющему толщину $\delta = 12 \text{ мм}$ (рис. 74). Растягивающее усилие в раскосе $N = 300 \text{ кН}$, материал – Ст3, для которого $[\tau_{cp}] = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma_{см}] = 280 \text{ МПа}$, отверстия для заклепок продавлены.

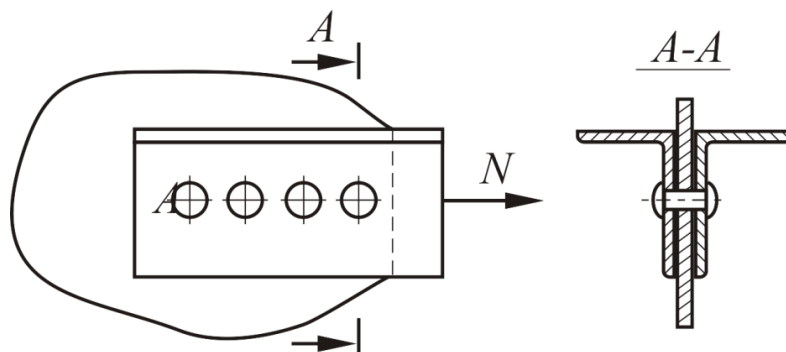


Рисунок 74 – Схема к примеру 7.2

Решение

Полагая, что усилия между заклепками распределяются равномерно и имея в виду, что они испытывают двойной срез (одноре-

менно по двум сечениям), число заклепок i определим из условия прочности на срез:

$$\tau_{cp} = \frac{N}{2i \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_{cp}],$$

или из условия прочности на смятие:

$$\sigma_{cm} = \frac{N}{i \delta d} \leq [\sigma_{cm}].$$

Тогда из расчета на срез и смятие определим необходимое количество заклепок:

$$\text{– из расчета на срез – } i \geq \frac{N}{2 \frac{\pi d^2}{4} [\tau_{cp}]} \geq \frac{300000}{2 \frac{\pi \cdot 23^2}{4} \cdot 100} \geq 3,6;$$

$$\text{– из расчета на смятие – } i \geq \frac{N}{\delta d [\sigma_{cm}]} \geq \frac{300000}{12 \cdot 23 \cdot 280} \geq 3,9.$$

Принимаем, что число заклепок $i = 4$.

В расчете на смятие фигурировала толщина фасонного листа $\delta = 12$ мм, так как суммарная толщина полок двух уголков $2\delta = 24$ мм, а следовательно, напряжение смятия в заклепках в местах контакта с уголками будет меньше, чем в месте контакта с косынкой (предполагается, что материал заклепок мягче, чем материал соединяемых элементов).

Пример 7.3. Проверить прочность заклепочного соединения, изображенного на рисунке 71, где $P = 280$ кН, $e = 45$ мм, $t = 60$ мм, $b = 180$ мм, $\delta = 12$ мм, $\delta_k = 14$ мм, диаметр заклепки $d = 23$ мм. Допускаемые напряжения: $[\tau_{cp}] = 140$ МПа, $[\sigma_{cm}] = 320$ МПа, $[\sigma_p] = 160$ МПа.

Решение

1. Учитывая, что каждая заклепка передает силу P/i , построим эпюру продольных сил для полосы (рис. 75). Расчет на растяжение следует выполнять для сечения I–I, в котором возникает наибольшая

Для сечения $I-I$:

где F_{HTI} – площадь НЕТТО сечения $I-I$, т. е. расчетная площадь – полная площадь за вычетом площади отверстий для заклепок.

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F_{HTII}} = \frac{4P}{5\delta(b-2d)} = \frac{4 \cdot 280 \cdot 10^3}{5 \cdot 0,012(0,18 - 2 \cdot 0,023)} = 139 \text{ МПа.}$$
$$\tau_{cp} = \frac{F}{i \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{280 \cdot 10^3}{5 \frac{3,14 \cdot 0,023^2}{4}} = 135 \text{ MPa} \leq [\tau_{cp}].$$

3. Проверим соединение на смятие, учитывая, что $\delta < \delta_k$:

$$\sigma_{см} = \frac{P}{i\delta d} = \frac{280 \cdot 10^3}{5 \cdot 0,023 \cdot 0,012} = 203 \text{ МПа} \leq [\sigma_{см}].$$

Расчет показывает, что прочность соединения обеспечена. Возможно даже некоторое уменьшение толщины полосы, так как расчеты на растяжение и смятие обнаруживают некоторые резервы прочности.

7.4. Расчет сварного соединения

На срез принято (также условно) рассчитывать и некоторые сварные соединения. Изготавливая металлические конструкции, часто применяют сварку электрической дугой. Если выбор конструкции соединения, материалов и технологии сварки сделан правильно, то сварное соединение по надежности не уступает заклепочному при действии как статических, так и динамических нагрузок. В то же время соединение элементов конструкций с помощью сварки имеет целый ряд преимуществ, основное из которых – экономичность.

Наиболее распространены соединения в стык и с помощью угловых, или валиковых, швов. Соединения в стык применяют, когда листы находятся в одной плоскости. При толщине листов $\delta < 8$ мм кромки их не обрабатывают (рис. 76, а); при $\delta = 8 \dots 20$ мм кромки скашивают и заваривают листы с одной стороны (V-образный шов, рис. 76, б); при $\delta \geq 20$ мм кромки скашивают с двух сторон (X-образный шов, рис. 76, в). Расчетную толщину шва принимают равной толщине листа δ , наплывы не учитывают.

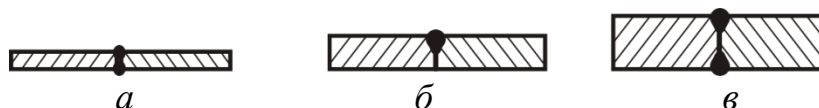


Рисунок 76 – Виды сварных соединений в стык

Соединения с помощью угловых швов делают, когда листы параллельны или перпендикулярны. Сюда относят соединения внахлестку, с накладками и в тавр. Если направление углового шва перпендикулярно к действующему усилию, то шов называется *лобовым*

(торцевым). Швы, параллельные усилию, носят название *фланговых (боковых)*. Применяют также косые швы (рис. 77), направленные под углом к усилию. На рисунке 78 показано соединение листов внахлестку лобовыми швами, на рисунке 79 – соединение с накладками, приваренными фланговыми швами, а на рисунке 80 – тавровое соединение.

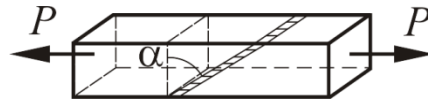


Рисунок 77 – Косой сварной шов

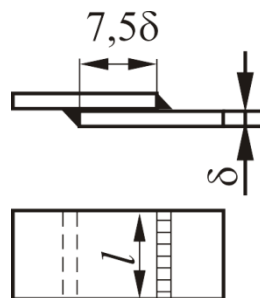


Рисунок 78 – Сварное соединение листов внахлестку лобовыми швами

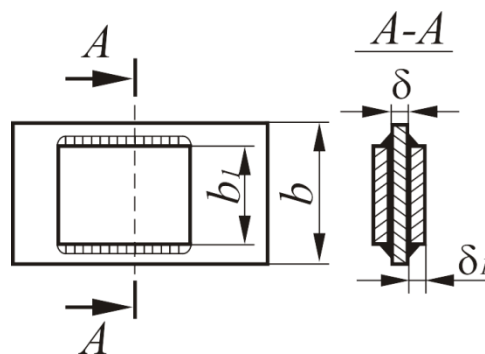


Рисунок 79 – Сварное соединение с накладками

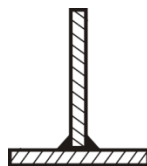


Рисунок 80 – Сварное тавровое соединение

Если не учитывать наплывы, то в разрезе угловой шов имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Разрушение шва будет происходить по его минимальному сечению, высота которого $a = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta$.

Расчетная площадь сечения шва

$$F_9 = al = 0,7 \delta l,$$

где l – расчетная длина шва.

Не останавливаясь на расчетах всех видов швов, рассмотрим на примерах расчет только лобовых и фланговых, т. е. таких швов, которые, главным образом, должны сопротивляться действию касательных напряжений.

Учитывая, что сопротивление стали срезу ниже, чем растяжению, составляющей нормальных напряжений в лобовом шве пренебрегают и рассчитывают его условно на срез, предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по площади сечения AA_1B_1B (рис. 81). При этом для соединения внахлестку в расчет вводят оба шва – верхний и нижний. Тогда, предположив, что работают оба шва с общей площадью опасного сечения $F_9 = 2al_T = 2 \cdot 0,7\delta l_T = 1,4 \delta l_T$, где l_T – расчетная длина торцевого шва.

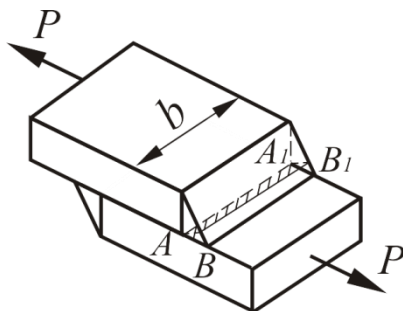


Рисунок 81 – Сварное соединение внахлестку

Запишем условие прочности шва:

$$\tau = \frac{P}{F_9} = \frac{P}{1,4\delta l_T} \leq [\tau_9]. \quad (7.11)$$

Поскольку в начале и в конце шва из-за непровара качество шва ухудшается, действительную его длину увеличивают по сравнению с расчетной на 10 мм, т. е. $l = l_T + 10 \text{ мм}$, где l – действительная длина шва (на рис. 81 – $l = b$).

Отметим, что вследствие незначительной деформативности материала шва в направлении действия силы лобовые швы жесткие, поэтому они разрушаются при весьма малых остаточных деформациях и плохо сопротивляются действию повторно-переменных и ударных нагрузок.

Более распространены на практике фланговые швы. Они относятся к вязким, так как разрушаются лишь после значительных остаточных деформаций. Фланговые швы всегда ставят парами; эти швы работают на срез в биссекторных сечениях (рис. 82). Площадь среза каждого шва

$$al_{\phi} = 0,7\delta(l - 10).$$

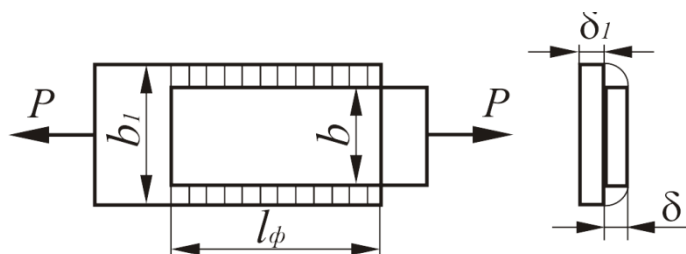


Рисунок 82 – Фланговый сварной шов

Условие прочности на срез принимает вид:

$$\tau = \frac{P}{1,4\delta(l - 10)} \leq [\tau_s]. \quad (7.12)$$

Пример 7.4. Определить необходимые размеры фланговых швов, соединяющих полосы (рис. 82). Растягивающая сила $P = 140 \text{ кН}$, а допускаемое напряжение на срез для металла шва $[\tau_s] = 110 \text{ МПа}$; $\delta = 10 \text{ мм}$; $\delta_1 = 8 \text{ см}$; $b = 100 \text{ мм}$; $b_1 = 125 \text{ мм}$.

Из условия прочности (7.13) определяем необходимую длину шва:

$$l = \frac{P}{1,4\delta[\tau_s]} + 10 \text{ мм} = \frac{1400}{1,4 \cdot 10 \cdot 110} + 10 = 101 \text{ мм}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сколько компонент внутренних усилий возникает в поперечном сечении в случае сдвига?
2. В каком случае возникает деформация сдвига?
3. Какие напряжения возникают в случае среза? Запишите условия прочности при срезе и смятии болтового соединения.
4. Какие допущения используют при расчете на срез?
5. Какие соединения относятся к неразъемным?
6. По каким напряжениям рассчитывается заклепочное соединение?
7. Что такое односрезное и многосрезное соединения?
8. Назовите виды сварных соединений.
9. В каком случае сварной шов называется лобовым?
10. Какие виды сварных швов наиболее распространены на практике? По какой причине?

Глава 8. КРУЧЕНИЕ

Изучением вопросов кручения одним из первых занялся французский ученый Шарль Огюстэн Кулон. Он вывел точные зависимости крутящего момента от угла закручивания и диаметра стержня. Его формулы по кручению для стержня малого диаметра применяют до сих пор. Именно Кулон, изучив разрушение сжатых элементов, пришел к выводу, что главной причиной разрушения является сдвиг. Такое предположение стало основой для утверждения нового взгляда, названного впоследствии третьей теорией прочности.

Также вопросами кручения занимался Навье. Он предположил, что при кручении стержня любого сечения, чем дальше волокно стержня удалено от оси симметрии, тем большие сдвигающие напряжения в нем возникают. Для круглых стержней это было верно. А вот для любой другой формы получалось совсем наоборот. Оказалось, что при кручении стержня в виде узкого прямоугольника самые опасные сдвигающие силы возникают не вблизи углов, а возле центров боковых и наиболее близких к оси стержня граней. Стержень квадратного профиля при кручении оказался прочнее круглого, той же площади сечения на 25 %. При этом если торцевые поверхности у круглых крутящихся стержней оставались плоскими, то в сечениях иных форм они превращались в холмистую поверхность, образованную гиперболическими линиями. Эти данные по кручению получил французский ученый Сен-Венан.

8.1. Применение валов в сельскохозяйственной технике

Практически всегда в различных технических системах механическая энергия передается вращающимися деталями – валами. Примеров валов огромное множество (валы коробок передач, карданные валы автомобилей и тракторов, приводные валы и т. д.).

Крутящий момент на ведущие колеса, если они не управляемые, передается от главной передачи и дифференциала двумя валами с фланцами, называемыми *полуосями*. В конструкциях ведущих мостов легковых автомобилей к фланцу полуоси крепится колесо. В такой конструкции полуось передает вес автомобиля, нагружаясь изгибающими моментами. Такие полуоси называют *полуразгруженными* (рис. 83, б). В конструкциях ведущих мостов грузовых автомобилей чтобы снять с полуоси изгибающие нагрузки применяют дополни-

тельный узел – ступицу колеса. Она через ступичные подшипники передает реакцию дороги сразу на балку моста, а полуось своим фланцем или с помощью шлицов передает только крутящий момент ступице. Такие полуоси называют полностью *разгруженными* (рис. 83, *а*).

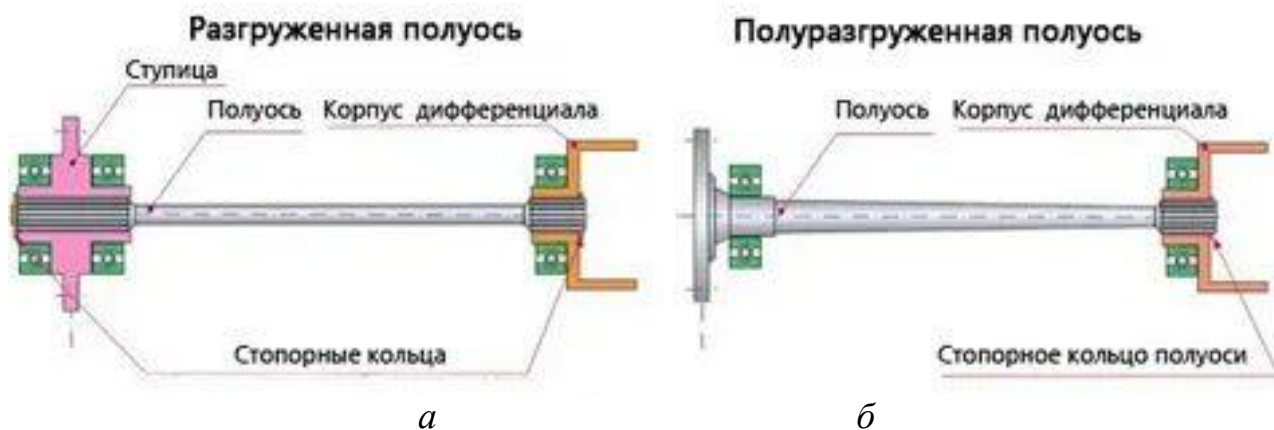


Рисунок 83 – Схемы полуосей

Если ведущие колеса управляемые, то момент к ним подводится валами с шарнирами, чаще всего, равных угловых скоростей (ШРУС). Они могут быть открытыми (на легковых автомобилях, при независимой подвеске колес) (рис. 84) и закрытыми в балке моста (при зависимой подвеске колес) (рис. 85).



Рисунок 84 – Открытый ШРУС



Рисунок 85 – Закрытый ШРУС

Карданные валы применяют для передачи вращения от трактора к сельскохозяйственной машине – *валы отбора мощности* (рис. 86).



Рисунок 86 – Вали отбора мощностей

Также широко распространены в сельскохозяйственной технике различные приводные валы на комбайнах: валы молотильных барабанов (рис. 87), коленчатые валы соломотряса (рис. 88).



Рисунок 87 – Молотильный барабан



Рисунок 88 – Коленчатый вал соломотряса

8.2. Напряжения и деформации при кручении

Как уже указывалось, деформация кручения вызывается парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к оси стержня. Поэтому при кручении в произвольном поперечном сечении стержня из шести внутренних силовых факторов возникает только один – крутящий момент T_k (рис. 89). Как показывают опыты, поперечные сечения при кручении поворачиваются одно относительно другого вокруг оси стержня, при этом длина стержня не меняется.

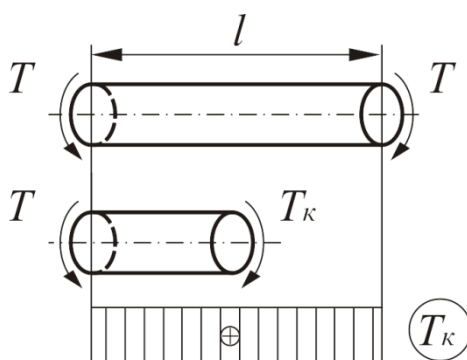


Рисунок 89 – Кручение вала

Стержни, работающие на кручение, обычно называют *валами*. Рассматривая кручение вала (например, по схеме, приведенной на рис. 90), легко установить, что под действием скручивающего момента, приложенного к свободному концу, любое сечение на расстоянии x от заделки поворачивается относительно закрепленного сечения на некоторый угол φ – *угол закручивания*. При этом, чем больше скручивающий момент T_k , тем больше и угол закручивания.

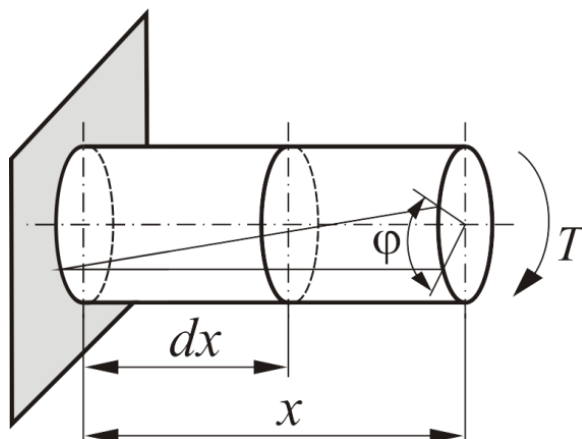


Рисунок 90 – Угол закручивания

В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило: *крутящий момент считают положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он стремится вращать сечение против хода часовой стрелки.*

Теория брусьев, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях:

- поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии (гипотеза Бернулли);
- радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Поперечные сечения остаются круглыми;
- расстояния между поперечными сечениями вдоль оси бруса не изменяются.

Для установления связи напряжений с внутренними усилиями рассмотрим несколько этапов решения задачи.

Статическая сторона задачи

Поскольку T_k – единственный внутренний силовой фактор в поперечном сечении, то уравнение равновесия принимает следующий вид:

$$T_k = \int_F \rho \tau dF, \quad (8.1)$$

где τ – касательное напряжение, действующее на элементарной площадке dF , расположенной на произвольном расстоянии ρ от центра сечения (рис. 91, а).

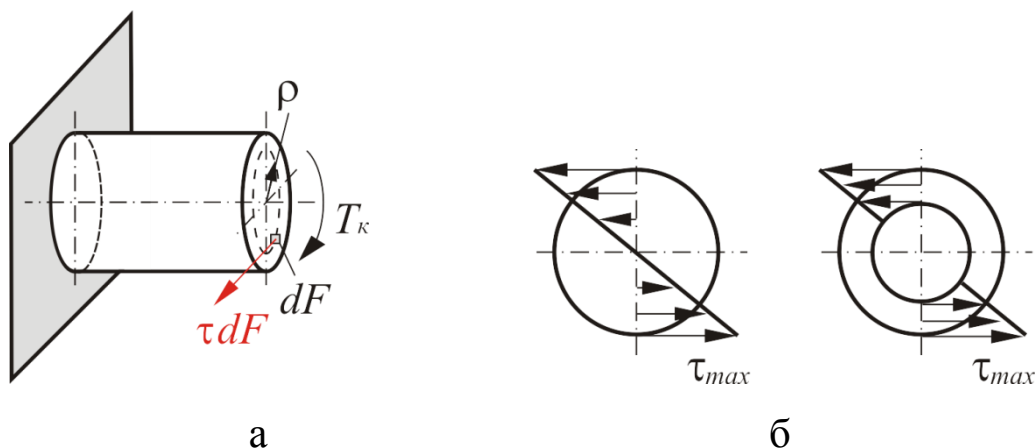


Рисунок 91 – Касательное напряжение на элементарной площадке

Геометрическая сторона задачи

Характер распределения касательных напряжений по сечению определим, рассмотрев геометрическую картину деформации вала при кручении.

Рассмотрим некоторый участок вала длиной dx (рис. 92), выделенный из исследуемого вала (рис. 90). Вал подвержен действию скручивающего момента T , вызывающего в поперечных сечениях внутренние крутящие моменты T_k . Пусть угол поворота сечения относительно неподвижного будет φ , тогда угол поворота сечения, расположенного на расстоянии dx , будет $\varphi + d\varphi$. Следовательно, угол закручивания участка стержня длиной dx равен $d\varphi$.

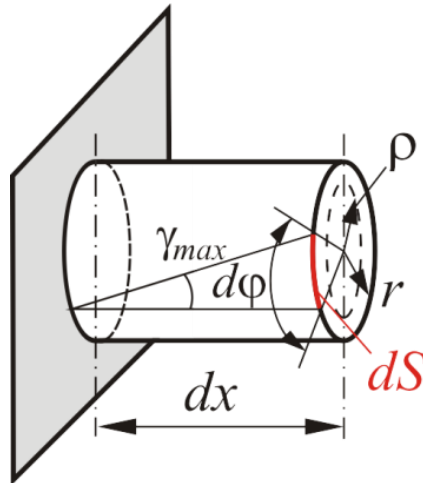


Рисунок 92 – Деформация элементарного участка при кручении

Рассмотрев геометрическую сторону задачи и учитывая малость угла γ , из рисунка 92 можно записать:

$$\gamma_{\max} = \operatorname{tg} \gamma_{\max} = \frac{dS}{dx} = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.2)$$

Величина $d\varphi/dx$ является *относительным (погонным) углом закручивания* (измеряется в см^{-1}).

В цилиндре произвольного радиуса ρ внутри элемента угол γ :

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.3)$$

Физическая сторона задачи

Связь между касательным напряжением и угловой деформацией определяется законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma. \quad (8.4)$$

Математическая сторона задачи

Подставляя выражение (8.1) в (8.3), получим:

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (8.5)$$

а выражение (8.5) в (8.4):

$$T_{\kappa} = \int_F \rho^2 G \frac{d\varphi}{dx} dF = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF. \quad (8.6)$$

Учитывая, что $I_{\rho} = \int_F \rho^2 dF$ – полярный момент инерции, то получим

$$T_{\kappa} = I_{\rho} G \frac{d\varphi}{dx},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T_{\kappa}}{I_{\rho} G}. \quad (8.7)$$

Подставив это выражение в (8.5):

$$\tau = G\rho \frac{T_{\kappa}}{GI_{\rho}},$$

получим напряжение в произвольной точке сечения:

$$\tau = \frac{T_k \rho}{I_\rho}. \quad (8.8)$$

Закон распределения касательных напряжений – линейный. В центре $\tau = 0$, так как $\rho = 0$, на периферии $\tau = \tau_{max}$, так как $\rho_{max} = r$ (см. рис. 91, б).

8.3. Расчет на прочность при кручении

Учитывая, что $\frac{I_\rho}{\rho_{max}} = \frac{I_\rho}{r} = W_\rho$ – полярный момент сопротивления сечения, измеряемый в m^3 . Полярный момент сопротивления сечения является геометрической характеристикой прочности бруса круглого поперечного сечения при кручении. *Условие прочности при кручении* имеет следующий вид:

$$\tau_{max} = \frac{T_k}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (8.9)$$

Для круглого сечения $I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}$, $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}$.

Для кольцевого сечения $I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$, $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4)$,

где $c = d/D$ – коэффициент пустотелости.

Допускаемое напряжение при кручении $[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$.

Виды расчетов на прочность:

а) поверочный – вычисляют τ_{max} и сравнивают его с $[\tau]$, определяя недогрузку или перегрузку в процентах, либо находят коэффициент запаса прочности и сравнивают его с нормативными значениями;

б) проектный – вычисляют диаметр вала D при известных значениях T_k и $[\tau]$;

в) определяют допускаемый крутящий момент при известных диаметре вала D и допускаемом касательном напряжении $[\tau]$.

8.4. Деформация вала при кручении

Формулу для определения угла закручивания элемента бруса длиной dx найдем из выражения (8.7):

$$d\varphi = \frac{T_{\kappa}}{I_{\rho}G} dx.$$

Тогда

$$\varphi = \int_l \frac{T_{\kappa}}{I_{\rho}G} dx. \quad (8.10)$$

Произведение GI_{ρ} называется *жесткостью круглого сечения при кручении*.

Для вала постоянной жесткости сечения на длине l и постоянно-го крутящего момента M_{κ} угол закручивания вала определяется:

$$\varphi = \frac{T_{\kappa}l}{I_{\rho}G}. \quad (8.11)$$

8.5. Расчет жесткости вала при кручении

За меру жесткости принимают относительный угол закручивания, т. е. угол, приходящийся на единицу длины вала:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_{\kappa}}{I_{\rho}G}. \quad (8.12)$$

Условие жесткости

$$\theta = \frac{T_{\kappa}}{I_{\rho}G} \leq [\theta], \quad (8.13)$$

где $[\theta]$ – допускаемый угол закручивания, измеряемый в $рад/м$.

Значения допускаемых углов закручивания, встречающихся в различных отраслях машиностроения, зависит от назначения вала и варьируется в пределах:

$$[\theta] = (4,38...17,5)10^{-3} \text{ рад/м} = 0,25...1,0 \text{ град/м}.$$

Из рисунка 91, б видно, что, удаляя материал вблизи оси вала, его прочность снижают весьма незначительно, так как эта часть материала для вала сплошного сечения малонагружена. При равных площадях поперечного сечения, а следовательно, при одинаковой массе

валов кольцевое сечение обладает большим полярным моментом инерции и сопротивлению, чем сплошное, т. е. вал кольцевого сечения оказывается жестче и прочнее. При равной прочности или равной жесткости, т. е. при одинаковых значениях I_p или W_p полый вал получается легче сплошного.

Пример 8.1. Для стального вала круглого поперечного сечения (рис. 93, а), нагруженного сосредоточенным моментом T и равномерно распределенным моментом m необходимо:

1. Определить внутренний крутящий момент и построить его эпюру.

2. Из условия прочности по касательным напряжениям определить диаметр поперечного сечения и построить эпюру углов закручивания, если $T = 50 \text{ кНм}$; $m = 10 \text{ кНм/м}$; $a = 1 \text{ м}$.

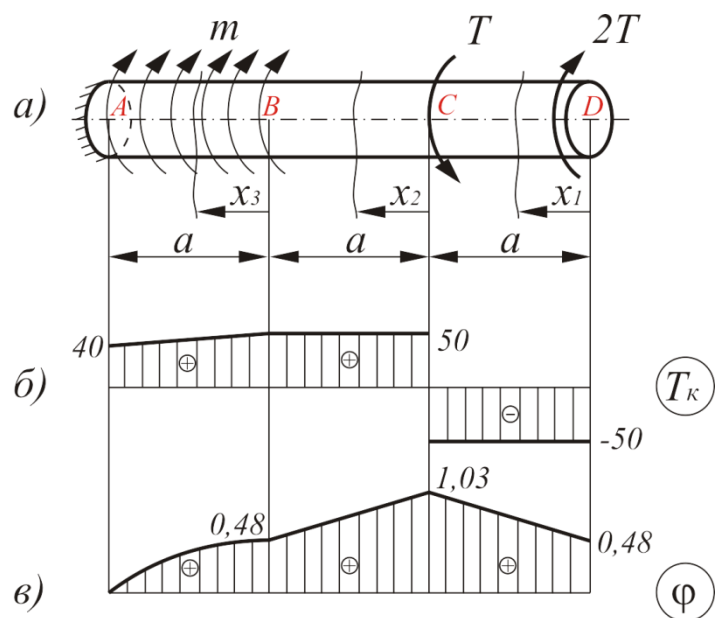


Рисунок 93 – Расчетная схема к примеру 8.1

Решение

1. Для определения внутреннего крутящего момента применим метод сечения. Для этого вал рассекаем произвольной плоскостью на расстоянии x от начала участка; отбрасываем одну из частей и действие отброшенной части вала заменяем внутренним крутящим моментом T_k . Для его определения составляем уравнения равновесия. Крутящий момент будем считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он стремится повернуть оставшуюся часть стержня против хода часовой стрелки.

$$T_{k1} = -T = -50 \text{ кНм};$$

$$T_{k2} = -T + 2T = 50 \text{ кНм};$$

$$T_{k3} = -T + 2T - m \cdot x_3 \quad \left| \begin{array}{l} x_3 = 0 \quad T_{k3} = -T + 2T = 50 \text{ кНм}; \\ x_3 = a \quad T_{k3} = -T + 2T - ma = 40 \text{ кНм}. \end{array} \right.$$

По найденным значениям строим эпюру крутящего момента (рис. 93, б).

2. Из условия прочности по касательным напряжениям определим диаметр поперечного сечения вала:

$$\tau_{max} = \frac{|T_{max}|}{W_\rho} \leq [\tau],$$

где $T_{max} = 50 \text{ кНм}$ – максимальный крутящий момент по модулю;

$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления круглого сечения.

Подставляя полярный момент сопротивления W_ρ в условие прочности, будем иметь:

$$\tau_{max} = \frac{16T_{max}}{\pi d^3} \leq [\tau],$$

отсюда найдем диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T_{max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 161 \text{ мм}.$$

3. Зная диаметр вала, определим углы закручивания по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{z=0}^a \frac{T_\kappa}{GI_\rho} dx,$$

где $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 161^4}{32} = 66 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$ – полярный момент инерции.

Определим углы закручивания в характерных сечениях A , B , C и D , идя от заделки (рис. 93, a):

$$\varphi_A = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A + \int_{x_3=0}^a \frac{T_{\kappa 3}}{GI_\rho} dx_3 = \int_{x_3=0}^a \frac{T - mz_3}{GI_\rho} dx_3 = \frac{Ta}{GI_\rho} - \frac{ma^2}{2GI_\rho} = \\ &= \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 66 \cdot 10^6} - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 66 \cdot 10^6} = 0,00852 \text{ рад} = 0,48 \text{ град}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_B + \int_{x_2=0}^a \frac{T_{\kappa 2}}{GI_\rho} dx_2 = \varphi_B + \int_{x_2=0}^a \frac{T}{GI_\rho} dx_2 = \varphi_B + \frac{T \cdot a}{GI_\rho} = \\ &= 0,00852 + \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 66 \cdot 10^6} = \\ &= 0,00852 + 0,00947 = 0,0179 \text{ рад} = 1,03 \text{ град}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \int_{x_1=0}^a \frac{T_{\kappa 1}}{GI_\rho} dx_1 = \varphi_C + \int_{z_1=0}^a -\frac{MT}{GI_\rho} dzx_1 = \varphi_C - \frac{Ta}{GI_\rho} = \\ &= 0,0179 - \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 66 \cdot 10^6} = 0,0084 \text{ рад} = 0,48 \text{ град}. \end{aligned}$$

По найденным значениям строим эпюру углов закручивания (рис. 93, b).

Пример 8.2. Для вала (рис. 94), нагруженного сосредоточенными крутящими моментами, выполнить проектный расчет из условия прочности и жесткости: определить диаметры валов в двух вариантах исполнения – сплошного и полого с коэффициентом пустотелости $c = d/D = 0,8$. Построить эпюры углов закручивания вала если $T_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_2 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_3 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_4 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 0,6 \text{ м}$; $b = 0,8 \text{ м}$; $c = 0,7 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $[\theta] = 0,8 \text{ град/м}$. Валы сопоставить по металлоемкости и жесткости.

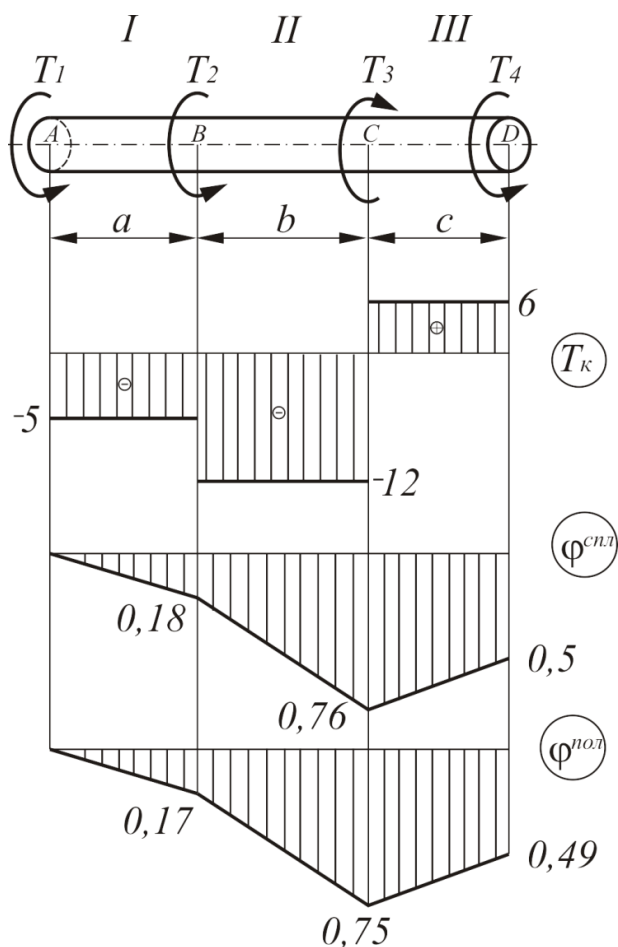


Рисунок 94 – Расчетная схема к примеру 8.2

Решение

1. Для расчетов на прочность и жесткость необходимо найти положение опасных сечений и величины крутящих моментов, действующих в этих сечениях вала. Воспользовавшись методом сечений, определим внутренние усилия и построим эпюру крутящих моментов T_k . Опасными являются все сечения на участке II, где действует $T_{max} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

2. Определим допускаемое касательное напряжение, связанное с допускаемым нормальным напряжением. Принимаем по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0,5[\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}.$$

Из условия прочности и жесткости при кручении находим требуемые значения полярного момента сопротивления и момента инерции

$$\tau_{max} = \frac{T_{kmax}}{W_{\rho}} \leq [\tau] \quad \Rightarrow \quad W_{\rho} \geq \frac{T_{kmax}}{[\tau]} = \frac{12000}{80 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$\theta = \frac{T_{kmax}}{GI_{\rho}} \frac{180^0}{\pi} \leq [\theta] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\rho} \geq \frac{T_{kmax}}{G[\theta]} \frac{180^0}{\pi} = \frac{12000 \cdot 180}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8 \cdot \pi} = 1,074 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

3. Определим размеры сплошного и полого круглого поперечного сечения из условия прочности, учитывая, что

$$W_{\rho}^{cпл} = \frac{\pi D^3}{16}, \quad W_{\rho}^{пол} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4),$$

тогда

$$D_{cпл} \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_{\rho}^{cпл}}{\pi}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,0914 \text{ м},$$

$$D_{пол} \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_{\rho}^{пол}}{\pi(1 - c^4)}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi(1 - 0,8^4)}} = 0,1090 \text{ м}.$$

4. Определим диаметры сплошного и полого круглого поперечного сечения из условия жесткости, учитывая, что

$$I_{\rho}^{cпл} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad I_{\rho}^{пол} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4),$$

тогда

$$D_{cпл} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{\rho}^{cпл}}{\pi}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi}} = 0,1023 \text{ м},$$

$$D_{пол} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{\rho}^{пол}}{\pi(1 - c^4)}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi(1 - 0,8^4)}} = 0,1167 \text{ м}.$$

Выбираем по ГОСТ диаметры вала: $D_{cпл} = 105 \text{ мм}$, $D_{пол} = 120 \text{ мм}$.

5. Определим площади поперечных сечений:

$$F_{cнл} = \frac{\pi D_{cнл}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,105^2}{4} = 86,6 \text{ см}^2;$$

$$F_{пол} = \frac{\pi D_{cнл}^2}{4} (1 - c^2) = \frac{\pi \cdot 0,120^2}{4} (1 - 0,8^2) = 40,7 \text{ см}^2.$$

6. Определим моменты инерции для назначенных диаметров вала:

$$I_{\rho}^{cнл} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,105^4}{32} = 1,193 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_{\rho}^{пол} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 0,120^4}{32} (1 - 0,8^4) = 1,202 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

7. Определим углы закручивания участков вала:

$$\varphi_1^{cнл} = \frac{T_{к1}a}{GI_{\rho}^{cнл}} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5}} = -0,00314 \text{ рад};$$

$$\varphi_2^{cнл} = \frac{T_{к2}b}{GI_{\rho}^{cнл}} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5}} = -0,01005 \text{ рад};$$

$$\varphi_3^{cнл} = \frac{T_{к3}c}{GI_{\rho}^{cнл}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5}} = -0,00440 \text{ рад};$$

$$\varphi_1^{пол} = \frac{T_{к1}a}{GI_{\rho}^{пол}} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}} = -0,00312 \text{ рад};$$

$$\varphi_2^{пол} = \frac{T_{к2}b}{GI_{\rho}^{пол}} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}} = -0,00999 \text{ рад};$$

$$\varphi_3^{пол} = \frac{T_{к3a}}{GI_{\rho}^{пол}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{80 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}} = 0,00437 \text{ рад}.$$

8. Определим углы закручивания характерных участков вала (точки *A*, *B*, *C* и *D*):

$$\varphi_A^{снл} = 0;$$

$$\varphi_B^{снл} = \varphi_1^{снл} = -0,00314 \text{ рад} = -0,18 \text{ град};$$

$$\varphi_C^{снл} = \varphi_1^{снл} + \varphi_2^{снл} = -(0,00314 + 0,1005) \text{ рад} = -0,76 \text{ град};$$

$$\varphi_D^{снл} = \varphi_1^{снл} + \varphi_2^{снл} + \varphi_3^{снл} = -(0,00314 + 0,1005 - 0,0044) \text{ рад} = -0,5 \text{ град};$$

$$\varphi_A^{пол} = 0;$$

$$\varphi_B^{пол} = \varphi_1^{пол} = -0,00312 \text{ рад} = -0,17 \text{ град};$$

$$\varphi_C^{пол} = \varphi_1^{пол} + \varphi_2^{пол} = -(0,00312 + 0,099) \text{ рад} = -0,75 \text{ град};$$

$$\varphi_D^{пол} = \varphi_1^{пол} + \varphi_2^{пол} + \varphi_3^{пол} = -(0,0031 + 0,1005 - 0,0044) \text{ рад} = -0,49 \text{ град}.$$

Строим эпюры углов закручивания $\varphi^{снл}$ и $\varphi^{пол}$ (рис. 94).

9. Результаты расчетов для сравнения сведем в таблицу.

Поперечное сечение вала	Наружный диаметр вала, мм			Площадь поперечного сечения, мм ²	Угол закручивания крайнего сечения, град
	Из условия прочности	Из условия жесткости	По ГОСТу		
Сплошное	91,4	102	105	8659	0,5
Полое	109	116,7	120	4072	0,49

10. Сопоставление металлоемкости валов двух вариантов.

Металлоемкость вала определяется его объемом, т. е. произведением длины на площадь поперечного сечения. Поскольку длина вала неизменна, сопоставим площади поперечных сечений сплошного вала с полым:

$$\frac{F^{спл}}{F^{пол}} = \frac{8659}{4072} = 2,12.$$

Таким образом, наиболее рациональным сечением является полое сечение, поскольку при одинаковой нагрузке углы закручивания отличаются незначительно, а металлоемкость в два раза меньше.

Полученный результат по сопоставлению металлоемкости валов ожидаем, поскольку большой объем материала, сосредоточенный около центра тяжести сечения, испытывает напряжения ниже допустимого и вклад его в общую прочность конструкции невелик. Поэтому целесообразно убирать неработающий материал из этой области.

Пример 8.3. Рассчитать на прочность валы трансмиссии автомобиля ГАЗ-3307 (рис. 95).

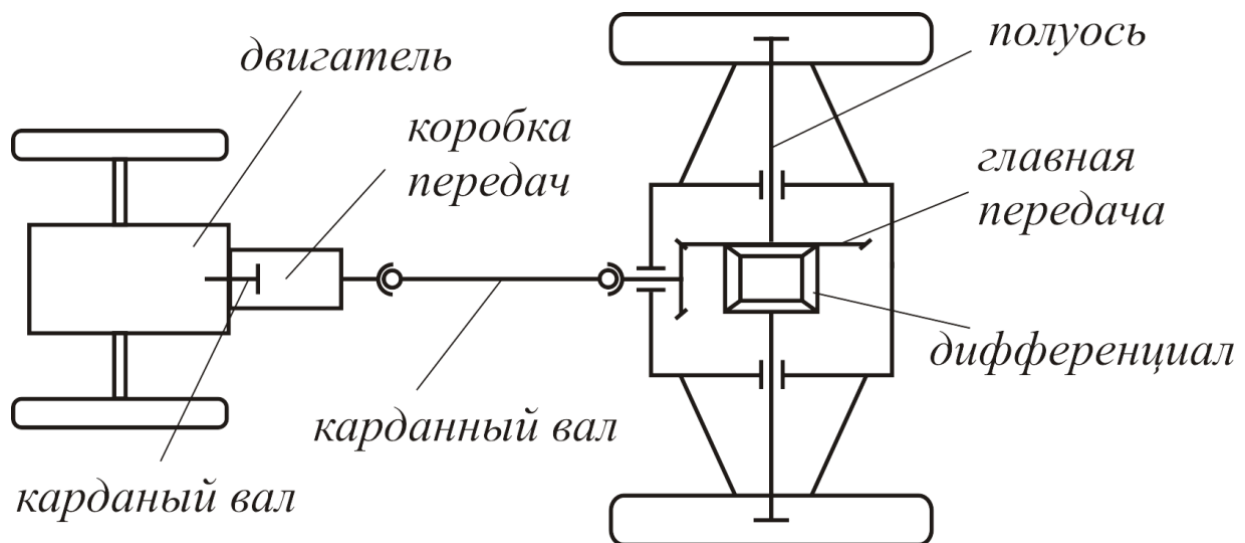


Рисунок 95 – Схема трансмиссии автомобиля ГАЗ-3307

Расчетные значения:

- крутящий момент вала двигателя $T_{дв} = 285 \text{ Нм}$;
- передаточное число коробки передач $i_{кп} = 6,29$;
- передаточное число главной передачи $i_{ен} = 6,17$;
- модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Размеры валов:

- первичный вал $l_{нв}=300$ мм, $D_{нв}=35$ мм;
- карданный вал $l_{кв}=1600$ мм, $D_{кв}=80$ мм, $d_{кв}=72$ мм;
- полуось $l=1100$ мм, $D=45$ мм.

Решение

1. Определим касательное напряжение, возникающее в первичном валу под действием крутящего момента $T_{дв}$:

$$\tau_{нв} = \frac{T_{дв}}{W_{ρнв}},$$

где

$$W_{ρнв} = \frac{\pi D_{нв}^3}{16} = \frac{3,14(3,5 \cdot 10^{-2})^3}{16} = 8,41 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

тогда

$$\tau_{нв} = \frac{T_{дв}}{W_{ρнв}} = \frac{285}{8,41 \cdot 10^{-6}} = 33,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,9 \text{ МПа}.$$

2. Определим угол закручивания от действия крутящего момента:

$$\varphi_{нв} = \frac{T_{дв} l_{нв}}{GI_{ρнв}},$$

где

$$I_{ρнв} = \frac{\pi D_{нв}^4}{32} = \frac{\pi \cdot (3,5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 147 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

тогда

$$\varphi_{нв} = \frac{285 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 147 \cdot 10^{-8}} = 0,727 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,417 \text{ град}.$$

3. Определим крутящий момент карданного вала, на который передается момент от двигателя, увеличенный на передаточное отношение коробки передач:

$$T_{кв} = T_{дв} \cdot i_{кп} = 285 \cdot 6,29 = 1793 \text{ кНм}.$$

4. Определим касательное напряжение на карданном валу:

$$\tau_{кв} = \frac{T_{кв}}{W_{\rho кв}},$$

где

$$W_{\rho кв} = \frac{\pi D_{кв}^3}{16} (1 - c^4), \text{ а } c = \frac{d_{кв}}{D_{кв}} \text{ для полого вала,}$$

тогда

$$W_{\rho кв} = \frac{\pi \cdot (8 \cdot 10^{-2})^3}{16} \left(1 - \left(\frac{72}{80} \right)^4 \right) = 34,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

а

$$\tau_{кв} = \frac{T_{кв}}{W_{\rho кв}} = \frac{1793 \cdot 10^3}{34,6 \cdot 10^{-6}} = 0,0518 \cdot 10^9 \text{ Па} = 51,8 \text{ МПа}.$$

5. Определим угол закручивания карданного вала:

$$\varphi_{кв} = \frac{T_{кв} l_{кв}}{GI_{\rho кв}},$$

где

$$I_{\rho кв} = \frac{\pi D_{кв}^4}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot (8 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 138 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

тогда

$$\varphi_{кв} = \frac{1793 \cdot 10^3 \cdot 1,6}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 138 \cdot 10^{-8}} = 0,0026 \text{ рад} = 1,49 \text{ град}.$$

6. Определим крутящий момент на полуоси с учетом передаточного отношения главной передачи:

$$T = T_{кв} \cdot i_{2n} = 1793 \cdot 6,17 = 11,06 \text{ кНм}.$$

Полученный крутящий момент реализуется через два колеса (правое и левое), соединенные между собой дифференциалом, кото-

рый разделяет поровну крутящий момент на правую и левую стороны, поэтому на каждое колесо будет подаваться момент:

$$T_{no} = \frac{T}{2} = \frac{11,06}{2} = 5,53 \text{ кНм.}$$

7. Определим касательное напряжение, возникающее в полуоси:

$$\tau_{no} = \frac{T_{no}}{W_{\rho no}},$$

где

$$W_{\rho no} = \frac{\pi D_{no}^3}{16} = \frac{3,14 (4,5 \cdot 10^{-2})^3}{16} = 17,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

тогда

$$\tau_{kno} = \frac{T_{no}}{W_{\rho no}} = \frac{5,53 \cdot 10^3}{17,9 \cdot 10^{-6}} = 0,309 \cdot 10^9 \text{ Па} = 309 \text{ МПа.}$$

8. Определим угол закручивания карданного вала:

$$\varphi_{кв} = \frac{T_{no} l_{no}}{GI_{\rho no}},$$

где

$$I_{\rho no} = \frac{\pi D_{no}^4}{32} = \frac{\pi \cdot (4,5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 40,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

тогда

$$\varphi_{no} = \frac{5,53 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 40,2 \cdot 10^{-8}} = 0,189 \text{ рад} = 10,8 \text{ град.}$$

9. Для анализа полученных результатов сведем их в таблицу.

Вал	Полярный момент сопротивления, $W_{\rho}, \text{ м}^3$	Полярный момент инерции, $I_{\rho}, \text{ м}^4$	Касательное напряжение, $\tau, \text{ МПа}$	Угол закручивания, $\varphi, \text{ град}$	Крутящий момент, $T, \text{ кНм}$
Первичный	8,41	14,7	33,9	0,417	0,285

Карданный	34,6	138	51,8	1,49	1,793
Полуось	17,9	40,2	309	10,8	5,53

Анализ результатов расчета показывает, что самым нагруженным валом трансмиссии автомобиля является приводной вал колеса (полуось), поэтому их изготавливают из качественных легированных сталей марок 40Г, 38ХГС, 47ГТ, 40ХГТР.

При решении задачи получили, что полуось закручивается на значительный угол – $10,8$ град. Даже без учета деформации других валов трансмиссии, перемещение коленчатого вала двигателя при деформации только полуоси составит $10,8 \cdot 6,29 \cdot 6,17 = 419$ град = $1,16$ оборота, что является недопустимым.

Невысокая жесткость валов трансмиссии приводит к возникновению крутильных колебаний, что при неумелом управлении муфтой сцепления автомобиля, может приводить к разрушению валов трансмиссии, в первую очередь полуосей.

8.6. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка

Винтовые пружины широко применяют в различных областях машиностроения, в том числе и в сельскохозяйственной технике, в качестве элементов амортизирующих (смягчающих толчки и удары) устройств, а также для возврата движущихся деталей в исходное положение (например, клапанные пружины двигателей), в элементах регистрирующих и записывающих устройств. Если говорить о сельскохозяйственной технике, в которой применяют пружины, то это в первую очередь бороны различного типа для обработки почвы (рис. 96). Также пружины используют в культиваторах (рис. 97), посевной технике (рис. 98), механизированных граблях или ворошилках, в технике для обработки зерна, самоходных косилках, опрыскивателях и т. д.

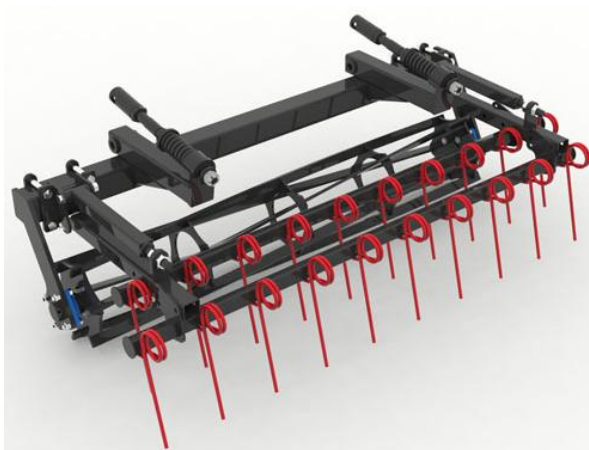


Рисунок 96 – Пружинная борона



Рисунок 97 – Культиватор



Рисунок 98 – Сошник сеялки

По форме винтовые пружины делят на цилиндрические, конические и фасонные. В данном параграфе мы рассмотрим только цилиндрические пружины, изготовленные из проволоки круглого поперечного сечения.

Расчет пружин растяжения и сжатия на прочность и жесткость одинаков, но для пружин сжатия при $H/D \geq 2,6$ (H – высота пружины в свободном состоянии; D – ее средний диаметр) возникает опасность потери устойчивости (выпучивания). Такие сравнительно высокие пружины монтируют в гильзах или на оправках, препятствующих выпучиванию пружин.

Рассмотрим пружину, растягиваемую силой P (рис. 99, а). Покажем, что пруток, из которого свита цилиндрическая пружина, при малом угле наклона витков работает главным образом на кручение. Для этого отсечем часть пружины плоскостью, проведенной через ее ось (рис. 99, б). Из условия равновесия оставшейся части пружины находим, что в осевом сечении прутка должны возникать сила $Q = P$ и момент $T_z = PR$. Если пренебрегать углом наклона оси витка α (угол наклона не должен превышать 15°), приняв $\alpha = 0$, то указанное сечение витка можно считать нормальным к оси витка. Тогда Q будет поперечной силой, вызывающей деформацию среза, а T_z – крутящим моментом в сечении прутка.

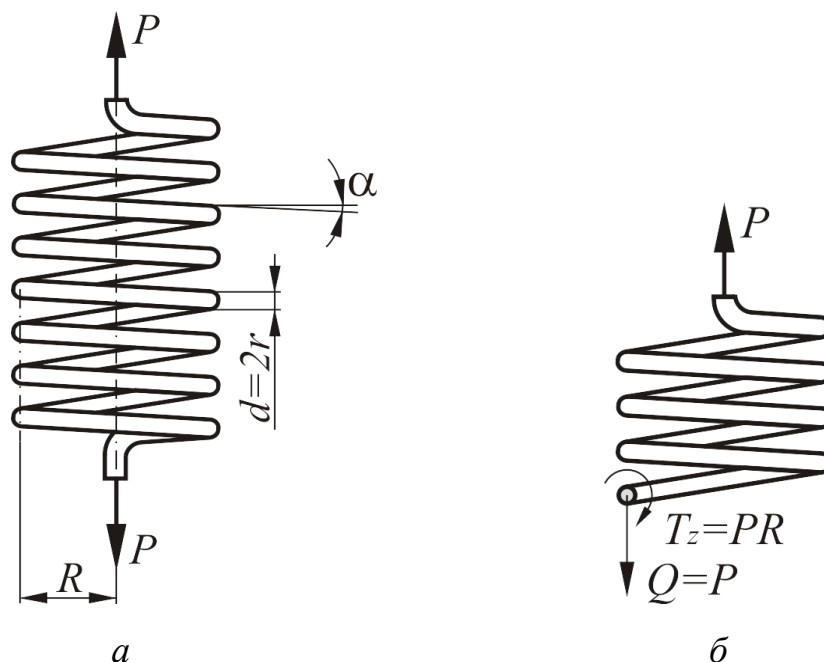


Рисунок 99 – Усилия в поперечном сечении при растяжении пружины

Таким образом, в поперечном сечении витка возникают только касательные напряжения. Для их определения вводят следующие допущения:

1. Касательные напряжения, связанные с наличием крутящего момента, определяются так же, как при кручении прямого бруса круглого поперечного сечения.
2. Касательные напряжения, связанные с наличием поперечной силы, распределены по сечению равномерно.

Определим значение вызываемых ими касательных напряжений от крутящего момента:

$$\tau_1 = \frac{T_z}{W_\rho} = \frac{PR}{\pi r^3 / 2} = \frac{2PR}{\pi r^3}, \quad (8.14)$$

где R – радиус навитки пружины;

r – радиус сечения прутка.

Определим значение вызываемых ими касательных напряжений от среза:

$$\tau_2 = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\pi r^2}, \quad (8.15)$$

где F – площадь поперечного сечения прутка пружины.

Наибольшее напряжение возникает во внутренних точках витков, где напряжения τ_1 и τ_2 совпадают по направлению и суммируются:

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{2PR}{\pi r^3} (1 + \beta), \quad (8.16)$$

где $\beta = r/2R$.

Так как $\beta \approx 0$, то во многих случаях расчетное напряжение в пружине определяют только по формуле касательного напряжения при кручении (8.14). Таким образом, максимальное касательное напряжение, возникающие при деформации пружины, определяют по формуле

$$\tau_{max} = \frac{2PR}{\pi r^3}. \quad (8.17)$$

Эта формула дает значения напряжения, меньше действительного, т. е. погрешность формулы идет не в запас прочности расчета. Формула (8.17) является приближенной не только из-за пренебрежения влиянием поперечной силы: более существенная погрешность получается из-за того, что при ее выводе не учтена кривизна витков. Действительно, распределение натяжений от кручения принято без должных оснований таким же, как для прямого бруса круглого сечения, а ось витков пружины представляют собой пространственную кривую – винтовую линию.

Исследования напряжений в пружинах, выполненные методами теории упругости, позволяют уточнить значение τ_{max} путем введения

в формулу (8.17) поправочного коэффициента, зависящего от отношения $c_{II} = R/r$ (индекс пружины) и угла подъема ее витков.

С учетом указанного коэффициента условие прочности пружины можно записать в виде

$$\tau_{max} = k \frac{2PR}{\pi r^3} \leq [\tau]. \quad (8.18)$$

Значения поправочного коэффициента k принимают в зависимости от индекса пружины c_{II} .

c_{II}	2	5	6	8	10	12
k	1,37	1,29	1,24	1,17	1,14	1,11

Несколько менее точное, но вполне приемлемое для практических расчетов значение k получается по формуле

$$k = \frac{4c_{II} + 1}{4c_{II} - 4}. \quad (8.19)$$

Пружины изготавливают из высококачественной стали, поэтому допускаемые напряжения, принимаемые при их расчете, имеют весьма высокие значения: $[\tau] = 200 \dots 1000 \text{ МПа}$.

Важной характеристикой упругих свойств пружины является *жесткость пружины* c – так называется сила P , которая вызывает удлинение пружины $\lambda = 1$. Для получения соотношения силы P и λ применим энергетический метод. Определим энергию деформации кручения прутка пружины (энергией деформации среза пренебрегаем) через работу силы P :

$$\frac{1}{2} P \lambda = U_{кр} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T_z^2 ds}{G I_\rho} = \frac{(PR)^2 l}{2G \left(\frac{\pi r^4}{2} \right)}, \quad (8.20)$$

где l – длина прутка пружины, равная

$$l = 2\pi R n,$$

где n – число витков в пружине.

Подставляя l в формулу (8.20), получим

$$\lambda = \frac{4PR^3n}{Gr^4}. \quad (8.21)$$

Полагая в (8.21) $\lambda = 1$, найдем жесткость пружины:

$$c = \frac{Gr^4}{4R^3n}. \quad (8.22)$$

Пример 8.4. Определить величину максимальной допускаемой сжимающей пружину нагрузки, а также осадку пружины, если известно, что $R = 60$ мм, $r = 8$ мм, $n = 6$, $G = 8,2 \cdot 10^4$ МПа; расчетное сопротивление материала пружины на срез $[\tau] = 300$ МПа.

Решение

Определим максимальную допускаемую сжимающую силу из уравнения (8.14) для касательного напряжения при кручении:

$$P_{max} = \frac{[\tau]\pi r^3}{2R} = \frac{300 \cdot 3.14 \cdot 8^3}{2 \cdot 60} = 4 \text{ кН}.$$

Определим максимальную допускаемую сжимающую силу из уравнения (8.15) для касательного напряжения при сдвиге:

$$P_{max} = [\tau]\pi r^2 = 300 \cdot 3.14 \cdot 8^2 = 60,3 \text{ кН}.$$

Таким образом, максимальная допускаемая сжимающая сила равна $P_{max} = 4$ кН.

Определим осадку пружины по формуле (8.18)

$$\lambda = \frac{4PR^3n}{Gr^4} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 60^3 \cdot 6}{8,2 \cdot 10^4 \cdot 8^4} = 61 \text{ мм}.$$

Пример 8.5. Для стальной пружины с параметрами $R = 6 \text{ см}$, $r = 0,5 \text{ см}$, $n = 12$ витков определить жесткость c , осадку и напряжение от силы $P = 0,25 \text{ кН}$.

Решение

Жесткость пружины определим по формуле (8.22):

$$c = \frac{Gr^4}{4R^3n} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 5^4}{4 \cdot 60^3 \cdot 12} = 4,82 \text{ Н / мм}.$$

Определим осадку от силы P :

$$\lambda = \frac{P}{c} = \frac{250}{4,82} = 51,8 \text{ мм}.$$

Максимальное напряжение определим по формуле (8.16)

$$\tau_{\max} = \frac{2PR}{\pi r^3} (1 + \beta) = \frac{2 \cdot 250 \cdot 60}{3,14 \cdot 5^3} \left(1 + \frac{5}{120} \right) = 79,6 \text{ МПа}.$$

Пример 8.6. Предохранительный клапан диаметром $d_{\kappa} = 75 \text{ мм}$ должен открываться при давлении пара $p = 0,6 \text{ МПа}$, иметь возможность подниматься на высоту $\lambda_0 = 20 \text{ мм}$. Диаметр проволоки стальной пружины $r = 6 \text{ мм}$, средний диаметр витка пружины $R = 30 \text{ мм}$. При отсутствии нагрузки шаг витков пружины $t = 17 \text{ мм}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Определить необходимое число витков пружины с тем, чтобы при максимальном поднятии клапана еще оставался запас на дальнейшее сжатие не менее $\lambda_2 = 15 \text{ мм}$. Найти начальное сжатие пружины λ_1 и касательное напряжение при полном открытии клапана.

Решение

Сила, поднимающая клапан

$$P = p \frac{\pi d_{\kappa}^2}{4} = 0,6 \frac{3,14 \cdot 75^2}{4} = 2,56 \text{ кН}.$$

Под действием этой силы пружина по формуле (8.21) будет иметь следующую начальную осадку:

$$\lambda_1 = \frac{4PR^3n}{Gr^4} = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 30^3 \cdot n}{8 \cdot 10^4 \cdot 6^4} = 2,76n \text{ мм.}$$

Полная осадка пружины в нагруженном состоянии складывается из λ_1 , требуемого подъема λ_0 и запаса λ_2 . Эта сумма должна равняться разности шага пружины и диаметра проволоки пружины, умноженной на число витков, т. е.:

$$\lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_2 = n(t - d),$$

или

$$2,76n + 20 + 15 = n(17 - 12),$$

откуда

$$n = 35/2,24 \approx 16 \text{ витков.}$$

Предварительная осадка пружины

$$\lambda_1 = 2,76n = 2,76 \cdot 16 = 44 \text{ мм.}$$

Наибольшее напряжение в пружине при полном открытии клапана определим, связав выражения для λ и τ_{max} . Из формулы (8.21) определим силу, необходимую для полного открытия клапана:

$$P = \frac{\lambda Gr^4}{4R^3n}.$$

Подставляя это выражения для P в формулу (8.17) для τ_{max} , найдем напряжение при полном открытии клапана:

$$\tau_{max} = \frac{2R}{\pi^3} \cdot \frac{\lambda Gr^4}{4R^3n} = \frac{\lambda rG}{2\pi R^2} = \frac{64 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10^4}{2 \cdot 3,14 \cdot 16 \cdot 30^2} \approx 340 \text{ МПа.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие внутренние усилия возникают в поперечном сечении в случае кручения вала?
2. Дайте определение угла закручивания.
3. Какие допущения принимают при расчете вала на кручение?

4. Какие напряжения возникают в поперечном сечении при кручении вала и как они распределены?
5. Запишите условие прочности и жесткости при кручении.
6. Как определить угол закручивания?
7. Назовите основные виды пружин.
8. Какие напряжения возникают при деформации пружины?
9. Что такое жесткость пружины?

Задания для самостоятельной работы по теме «Кручение»

Задание 6. Расчет вала на прочность при кручении.

Вариант численного значения (табл. 9) назначается преподавателем, а вариант схемы – по номеру студента в списке группы.

Для стального вала круглого поперечного сечения (см. схемы), находящегося под действием сосредоточенного крутящего момента T и распределенного крутящего момента m необходимо:

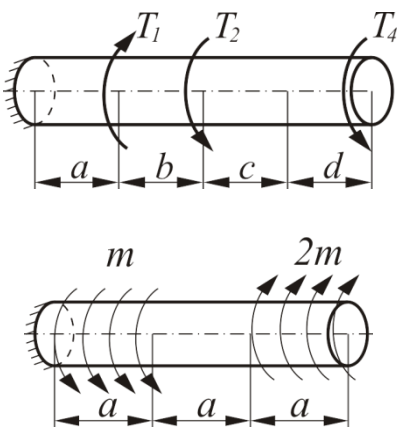
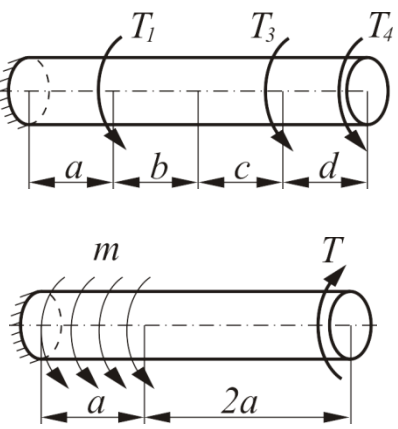
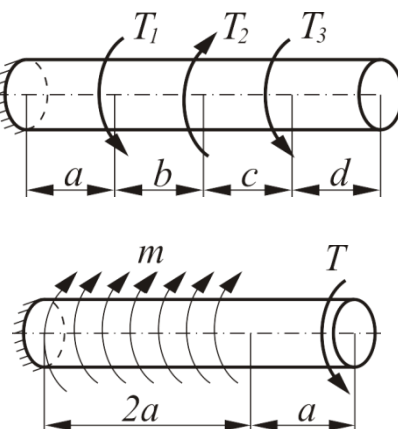
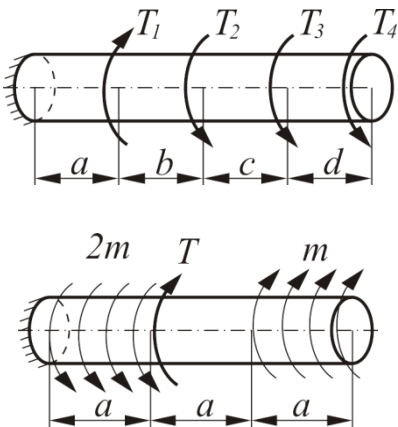
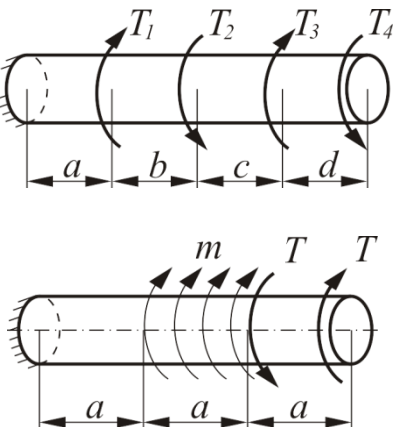
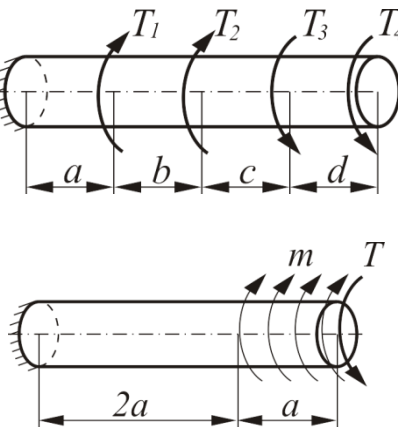
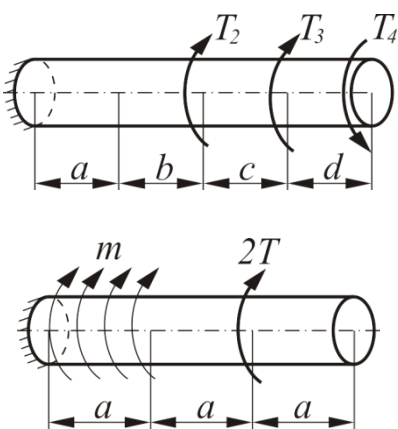
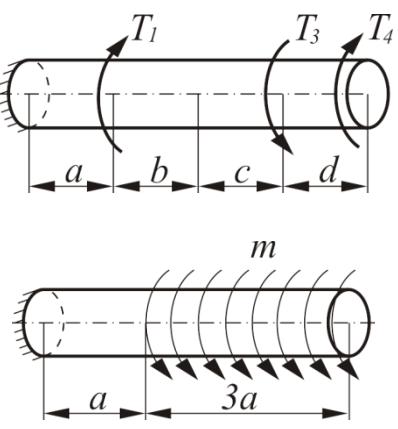
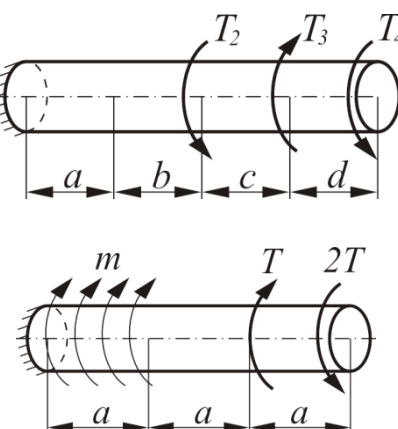
1. Составить аналитические выражения для определения внутреннего крутящего момента.
2. По полученным выражениям построить эпюру крутящего момента.
3. Из условия прочности по касательным напряжениям определить диаметр поперечного сечения.
4. Построить эпюру углов закручивания.

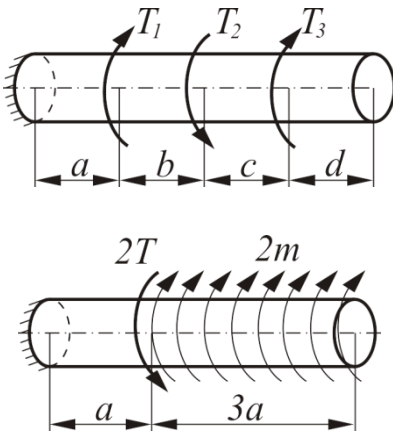
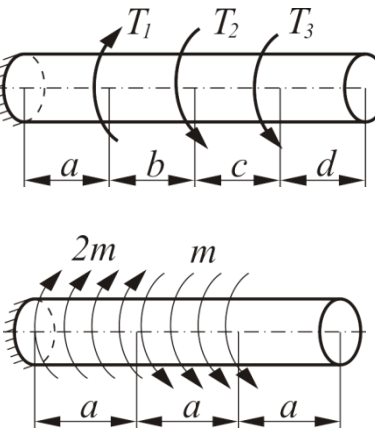
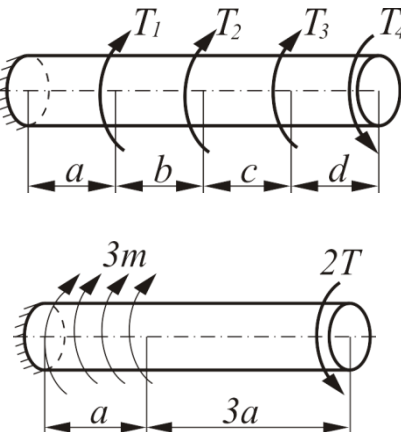
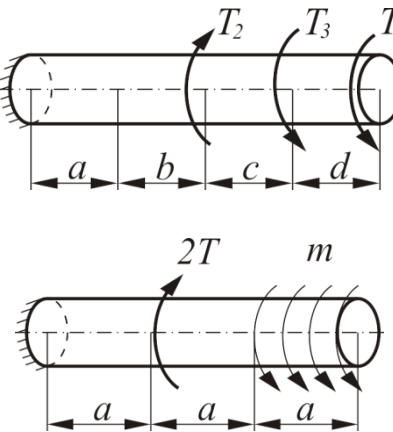
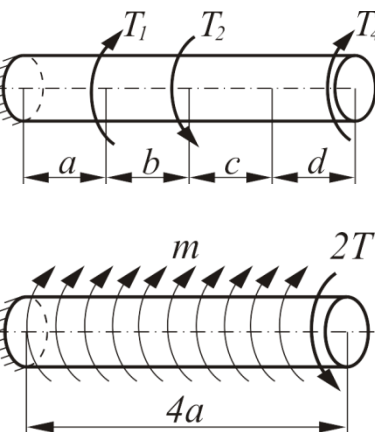
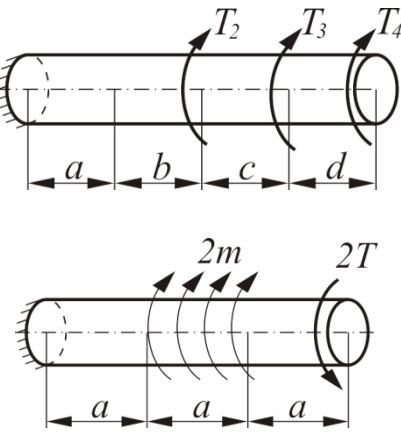
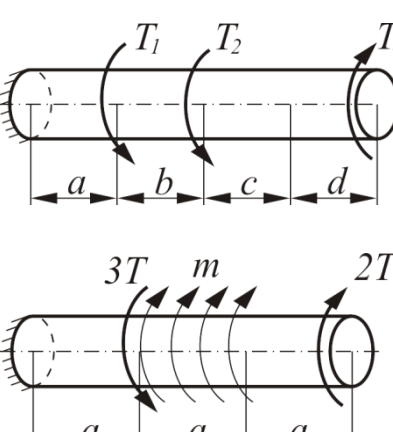
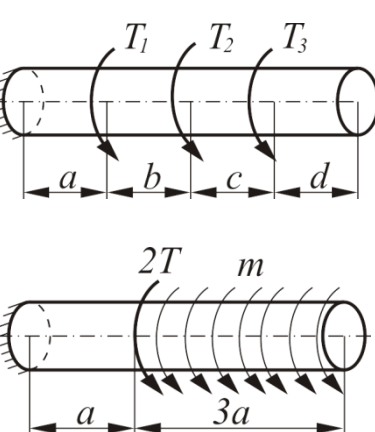
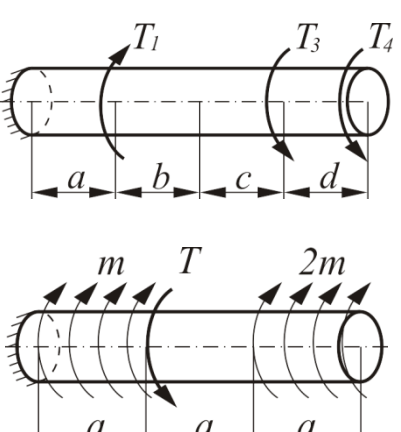
Принять для всех валов следующие соотношения:
 $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $[\tau] = 60 \text{ МПа}$. Численные значения приведены в таблице 9.

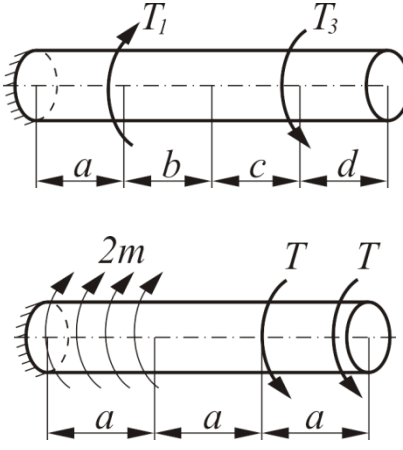
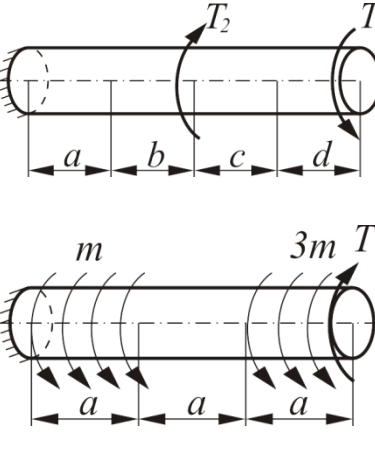
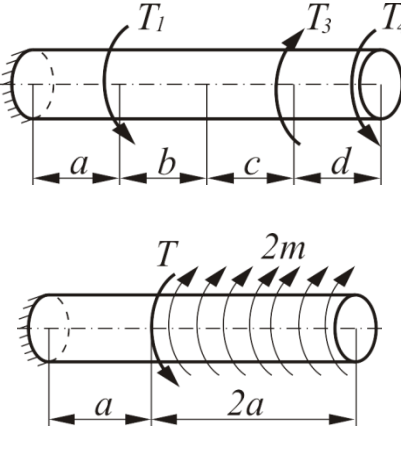
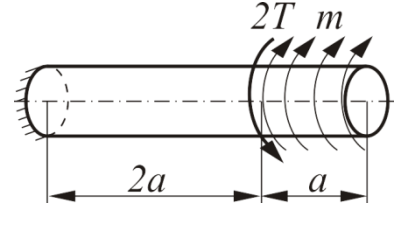
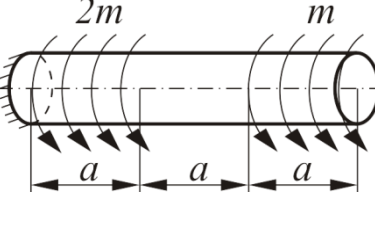
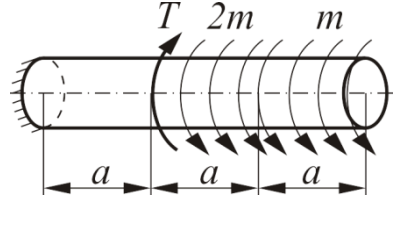
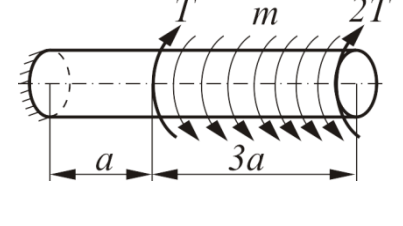
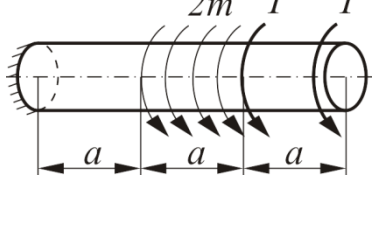
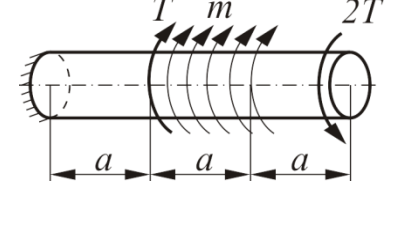
Таблица 9 – Численные значения к заданию 6

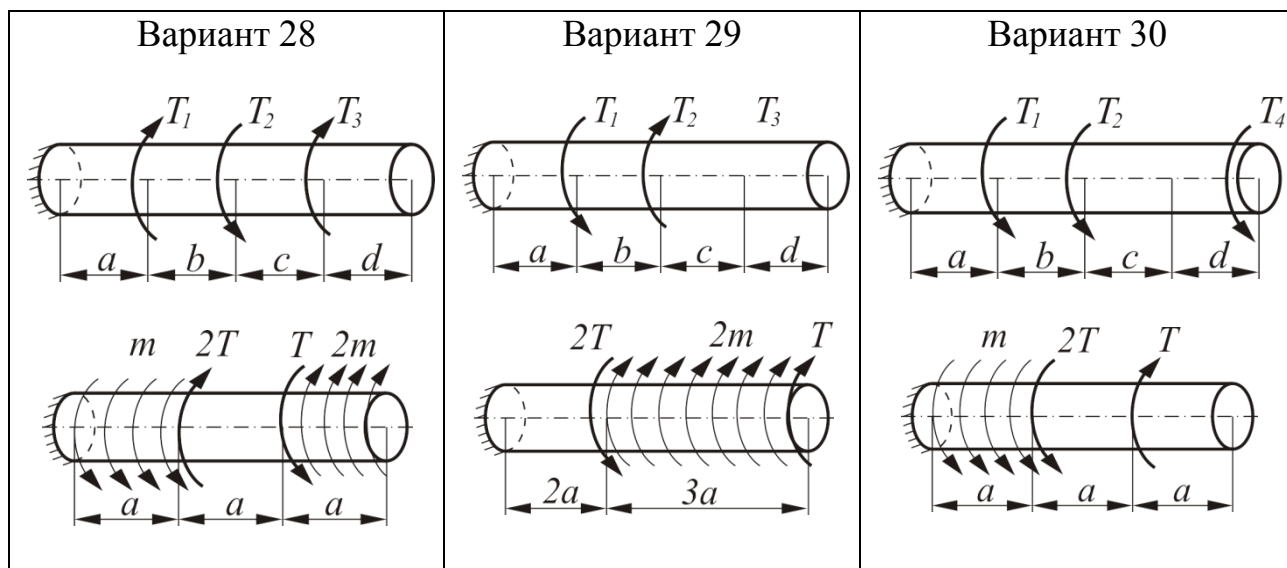
Вариант	T , кНм	T_1 , кНм	T_2 , кНм	T_3 , кНм	T_4 , кНм	m , кНм/м	a , м	b , м	c , м	d , м
1	2	1,0	2,0	1,0	1,0	90	0,8	1,2	1,4	1,6
2	4	1,0	2,0	1,0	0,8	70	0,9	1,4	1,6	1,9
3	5	2,0	4,0	1,0	1,0	60	1	1,6	1,0	1,2
4	6	3,0	5,0	1,6	1,4	50	1,1	1,0	1,2	1,4
5	7	4,0	6,0	1,8	1,4	10	1,2	1,1	1,8	1,5
6	8	2,0	4,0	1,2	1,2	20	0,5	1,3	1,5	1,1
7	9	2,0	3,0	1,2	1,0	70	0,8	1,5	1,3	1,3
8	2	3,0	4,0	1,0	1,0	60	0,7	1,7	1,5	1,4
9	5	4,0	5,0	1,8	1,6	70	1,3	1,9	1,7	1,3
0	3	5,0	6,0	2,0	1,6	80	1	1,4	1,4	1,2

Схемы к заданию 6

Вариант 1  Diagram 1: A shaft of total length $4a$ is divided into four segments of length a by points b and c. Four torques T_1, T_2, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment a and a concentrated torque $2m$ at the end of the third segment a.	Вариант 2  Diagram 2: A shaft of total length $3a$ is divided into two segments of length a by point b. Three torques T_1, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment a and a concentrated torque T at the end of the second segment $2a$.	Вариант 3  Diagram 3: A shaft of total length $3a$ is divided into two segments of length a by point b. Three torques T_1, T_2, T_3 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment $2a$ and a concentrated torque T at the end of the second segment a.
Вариант 4  Diagram 4: A shaft of total length $4a$ is divided into four segments of length a by points b and c. Four torques T_1, T_2, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque $2m$ over the first segment a and a concentrated torque T at the end of the second segment a, with another distributed torque m over the third segment a.	Вариант 5  Diagram 5: A shaft of total length $4a$ is divided into four segments of length a by points b and c. Four torques T_1, T_2, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment a and a concentrated torque T at the end of the second segment a, with another concentrated torque T at the end of the third segment a.	Вариант 6  Diagram 6: A shaft of total length $3a$ is divided into two segments of length a by point b. Four torques T_1, T_2, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment $2a$ and a concentrated torque T at the end of the second segment a.
Вариант 7  Diagram 7: A shaft of total length $3a$ is divided into three segments of length a by points b and c. Three torques T_2, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment a and a concentrated torque $2T$ at the end of the second segment a.	Вариант 8  Diagram 8: A shaft of total length a is divided into one segment of length a. Three torques T_1, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the entire segment $3a$.	Вариант 9  Diagram 9: A shaft of total length $3a$ is divided into three segments of length a by points b and c. Three torques T_2, T_3, T_4 are applied at the ends. The bottom diagram shows a distributed torque m over the first segment a and a concentrated torque T at the end of the second segment a, with another concentrated torque $2T$ at the end of the third segment a.

Вариант 10 	Вариант 11 	Вариант 12 
Вариант 13 	Вариант 14 	Вариант 15 
Вариант 16 	Вариант 17 	Вариант 18 

Вариант 19 	Вариант 20 	Вариант 21 
Вариант 22 	Вариант 23 	Вариант 24 
Вариант 25 	Вариант 26 	Вариант 27 



Задание 7. Расчет валов автомобилей на прочность при кручении.

Рассчитать углы закручивания и касательные напряжения в первичном валу коробки передач (табл. 9), карданном валу и полуоси автомобиля, возникающие от действия скручивающих моментов (см. рис. 95). Валы стальные, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Характеристики автомобиля приведены в таблице 10.

Таблица 10 – Численные значения к заданию 7

Вариант (последняя цифра зачетки)	Передача в коробке передач	Вариант (предпоследняя цифра зачетки)	Марка автомобиля
0	1	0	ГАЗ-3307
1	2	1	ВАЗ-2107
2	3	2	ГАЗ-3302
3	4	3	ГАЗ-3307
4	5	4	ВАЗ-2107
5	4	5	ГАЗ-3302
6	3	6	ГАЗ-3307
7	2	7	ВАЗ-2107
8	1	8	ГАЗ-3302
9	2	9	ГАЗ-3307

Таблица 11 – Характеристики автомобилей

Показатель	Значение		
Автомобиль	ГАЗ-3307	ВАЗ-2107	ГАЗ-3302
Двигатель	ЗМЗ-53.11	ВАЗ-2103	ЗМЗ-4063.10
Крутящий момент, Нм	285	104	195
Передаточные числа коробки передач	1–6,29 2–3,39 3–2,13 4–1,35 5–1	1–3,67 2–2,1 3–1,36 4–1,0 5–0,85	1–4,05 2–2,34 3–1,4 4–1,0 5–0,85
Передаточное число главной передачи	6,17	4,1	5,13
Длина первичного вала, мм	300	200	250
Диаметр первичного вала, мм	35	24	28
Длина карданного вала, мм	1600	1400	1500
Диаметр наружный карданного вала, мм	80	60	70
Диаметр внутренний карданного вала, мм	72	52	62
Длина полуоси, мм	1100	900	1000
Диаметр полуоси, мм	45	28	35

Рекомендации по решению задачи. Для расчета валов сначала необходимо получить значения крутящих моментов, которые их нагружают. Первичный вал передает момент от муфты сцепления в коробку передач, нагружен крутящим моментом двигателя, который задан в таблице 10.

В коробке передач и главной передаче автомобиля происходит изменение величины крутящего момента двигателя. Передаточное отношение (основная кинематическая характеристика передачи) показывает, во сколько раз изменяется момент.

Передаточное отношение (передаточное число) – это отношение угловой скорости или частоты вращения ведущего звена передачи к угловой скорости или частоте вращения ведомого звена передачи.

Глава 9. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

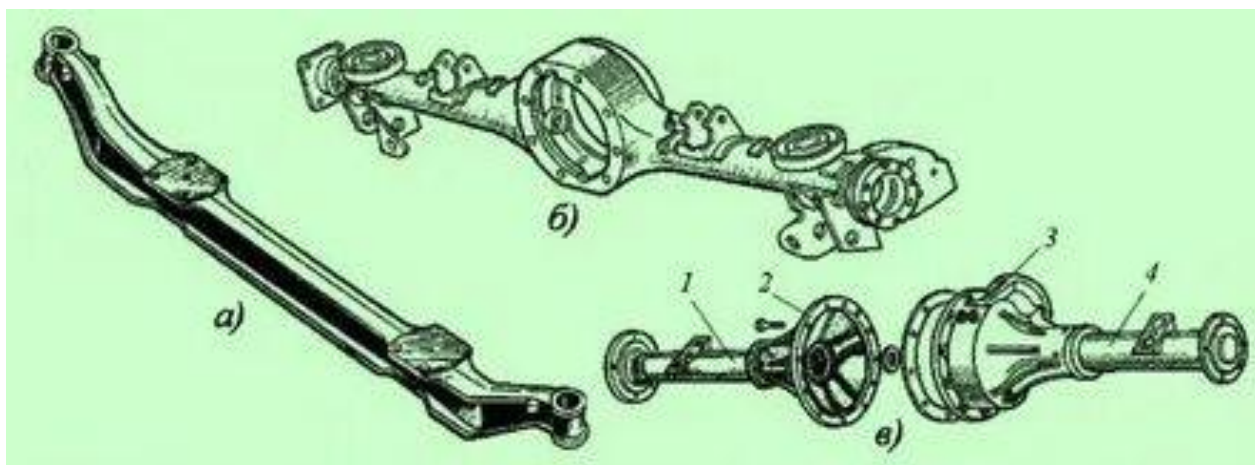
9.1. Применение валов в сельскохозяйственной технике

В сельскохозяйственной технике многие детали подвержены изгибу, в том числе плоскому изгибу.

В технике, в частности, в автомобилях, в конструкции зависимой подвески колес применяют балки. Любой рычаг управления, оси и валы в технике работают на изгиб.

Так, например, если ось не ведущая, то балка имеет форму двутавра, по краям нагруженная через опорные подшипники поворотных кулаков реакцией дороги, а ближе к середине нагруженная через рессору весом автомобиля. Таким образом, центральная часть балки (между опорными площадками рессор) испытывает чистый изгиб.

Если ось ведущая, то балка моста имеет пустотелую конструкцию (рис. 100), организуя внутри рабочее пространство для главной передачи (картер главной передачи), к которой присоединены, а иногда – изготовлены штамповкой заодно с картером рукава приводных валов колес (полуосей).



*Рисунок 100 – Автомобильные мосты:
а – поперечина; б – неразъемная балка; в – разъемная балка*

В независимой подвеске несущие элементы – рычаги, работающие на изгиб (рис. 101), передают вес автомобиля через шаровые опоры на поворотные кулаки и колеса, а к кузову прикреплены через упругие цилиндрические шарниры – резиновые сайлент-блоки.



Рисунок 101 – Рычаги

Передние оси сельскохозяйственных универсально-пропашных тракторов тоже представляют собой балку, закрепленную в центре цилиндрическим шарниром и работающую на изгиб (рис. 102).



Рисунок 102 – Передняя ось пропашного трактора

Большинство валов в передачах вместе с кручением от передаваемого момента испытывают и деформации изгиба из-за возникающих в передачах радиальных сил (рис. 103).



Рисунок 103 – Вал цепной передачи

9.2. Основные понятия и определения

Изгиб – это такой вид деформации, при котором происходит искривление оси балки.

Изгиб чистый – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю только одно – изгибающий момент M_z или M_y .

Плоский изгиб – это изгиб, при котором внешние силы лежат в главной плоскости инерции и являются перпендикулярными к геометрическим осям. Если сечение имеет ось симметрии, то внешние силы располагаются в плоскости симметрии. В случае плоского изгиба в сечениях бруса наряду с изгибающим моментом M действует и поперечная сила Q , лежащие в одной плоскости.

Ограничимся рассмотрением брусьев, поперечные сечения которых имеют, по меньшей мере, одну ось симметрии. Как известно, ось симметрии и перпендикулярная ей центральная ось являются главными центральными осями сечения. Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называют *главной плоскостью бруса*.

В случае, если *силовая плоскость*, т. е. плоскость действия нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей (рис. 104), имеет место *прямой изгиб бруса*. Линию пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения бруса называют *силовой линией*. Следовательно, при прямом изгибе силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей поперечного сечения.

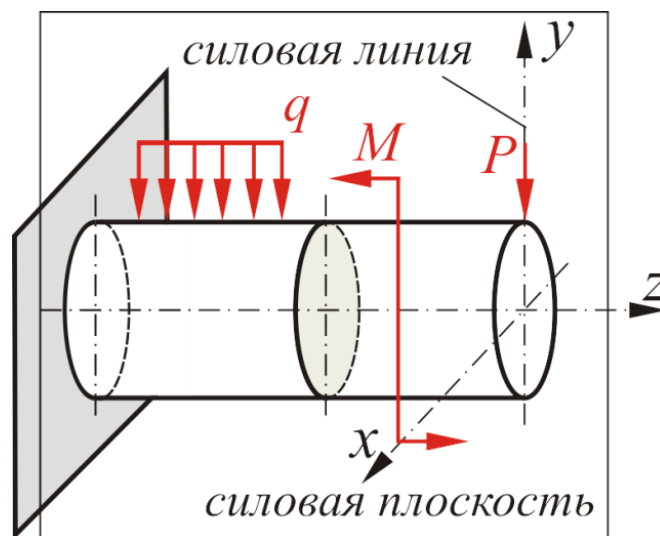


Рисунок 104 – Плоский изгиб

В случае плоского изгиба деформация происходит в силовой плоскости, т. е. в этой плоскости располагается ось изогнутого бруса.

Если силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса или, что то же самое, силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей его поперечного сечения, изгиб называется *косым*. Такое название объясняется тем, что при этом виде изгиба ось изогнутого бруса не лежит в силовой плоскости.

9.3. Типы опор и опорные реакции

Для того чтобы балка могла воспринимать внешнюю нагрузку, она должна быть закреплена. На практике чаще всего встречаются три основных типа опор: шарнирно подвижная, шарнирно неподвижная опоры и жесткая заделка (консольное закрепление). Рассмотрим основные конструктивные особенности и реакции, возникающие в опорах балки.

Шарнирно подвижная опора (рис. 105) допускает перемещение балки в горизонтальном направлении и поворот балки относительно опоры на некоторый угол φ . Вертикальное перемещение на такой опоре отсутствует, поэтому в шарнирно подвижной опоре возникает только вертикальная реакция R .

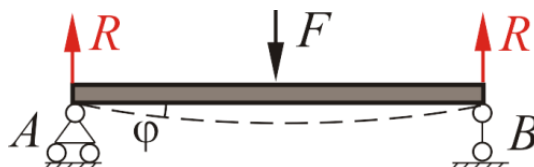


Рисунок 105 – Шарнирно подвижная опора

Шарнирно неподвижная опора (рис. 106) допускает поворот балки относительно опоры и не допускает линейных перемещений. В этом случае в опоре возникают две реакции R_x и R_y .

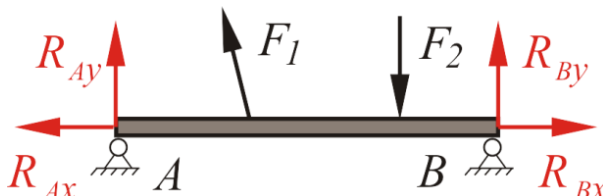


Рисунок 106 – Шарнирно неподвижная опора

Жесткая заделка (рис. 107) не допускает поворота и поступательного перемещения закрепленного конца балки. В этом случае в заделке будут возникать три реакции: вертикальная и горизонтальная силы R_x и R_y и реактивный момент M .

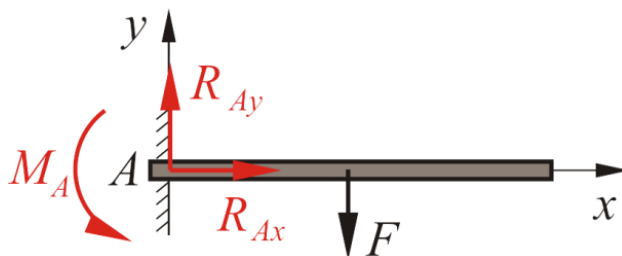


Рисунок 107 – Жесткая заделка

В балочных конструкциях встречаются конструктивные особенности в виде промежуточных шарниров (рис. 108). Особенностью балки с промежуточным шарниром является то, что вертикальные и горизонтальные перемещения сечений слева и справа от шарнира одинаковы, а углы поворота различны. Таким образом, в шарнире имеет место скачок угла поворота $\Delta\varphi$, а изгибающий момент равен нулю.

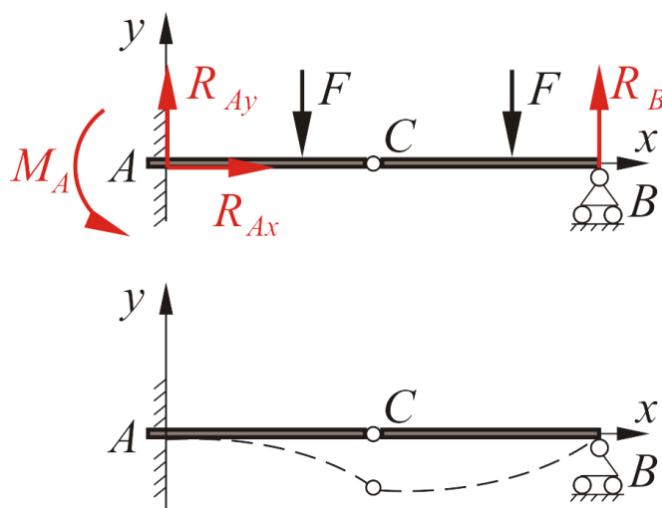


Рисунок 108 – Балка с промежуточным шарниром

Прежде чем определять внутренние усилия и напряжения при изгибе, сначала определяют реакции опор. В случае если балка статически определима, т. е. количество неизвестных реакций не превышает трех, составляют уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; \\ \sum F_y &= 0; \\ \sum M_O &= 0.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Если число реакций превышает число уравнений статики, то задача и балка являются статически неопределимой. Особый случай представляют балки с промежуточными шарнирами. В таких балках наряду с тремя уравнениями равновесия для всей балки в целом (9.1) можно составить дополнительно уравнение равновесия для части балки, расположенной слева или справа от шарнира. Так, для балки, показанной на рисунке 108, таким дополнительным уравнением будет

$$\sum M_C^{слева} = 0 \quad \text{или} \quad \sum M_C^{справа} = 0.$$

Таким образом, данная балка является статически определимой, так как для определения четырех опорных реакций R_{Ax} , R_{Ay} , R_B и M_A можно составить четыре уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; \\ \sum F_y &= 0; \\ \sum M_A &= 0; \\ \sum M_C &= 0.\end{aligned}$$

9.4. Внутренние усилия при плоском изгибе

При плоском поперечном изгибе в случае отсутствия осевых нагрузок в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y .

При определении внутренних усилий применяют следующее правило знаков:

- изгибающий момент M_z считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 109);
- поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки (110).



Рисунок 109 – Правило знаков для изгибающего момента

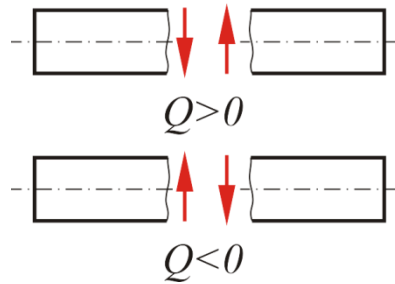


Рисунок 110 – Правило знаков для поперечной силы

Для определения внутренних усилий используют метод сечений. Рассекая балку поперечным сечением, перпендикулярным оси балки, на произвольном расстоянии x , рассматривают равновесие левой или правой части балки.

Пример 9.1. Определим внутренние усилия для балки, изображенной на рисунке 111.

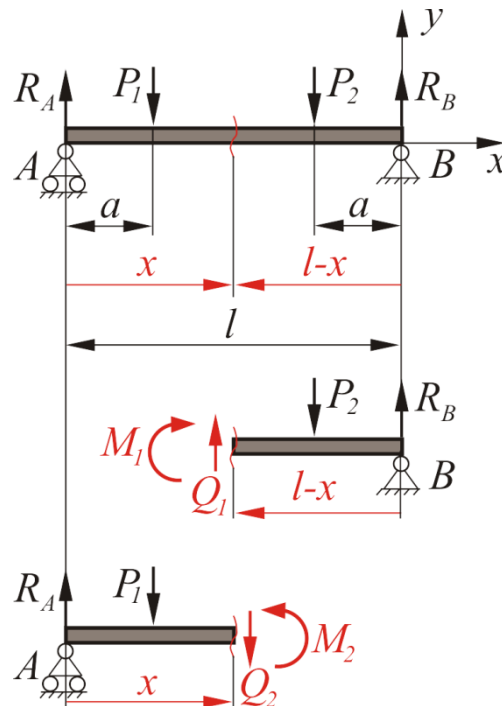


Рисунок 111 – Определение внутренних усилий при плоском изгибе

Рассечем балку поперечным сечением на расстоянии x от шарнира A . В сечении приложим внутренние усилия: изгибающий момент M и поперечную силу Q , используя правило знаков. Рассмотрим равновесие правой и левой части балки. Составим уравнения равновесия и определим внутренние усилия для *правой части*:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0: & \quad Q_1 - P_2 + R_B = 0; \\ \sum M_z = 0: & \quad -M_1 + R_B(l - x) - P_2(l - x - a) = 0,\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}Q_1 &= P_2 - R_B; \\ M_1 &= R_B(l - x) - P_2(l - x - a).\end{aligned}$$

Далее определим внутренние усилия для *левой части*:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0: & \quad -Q_2 - P_1 + R_A = 0; \\ \sum M_z = 0: & \quad M_2 - R_A x + P_1(x - a) = 0,\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}Q_2 &= -P_1 + R_A; \\ M_2 &= R_A x - P_1(x - a).\end{aligned}$$

9.5. Дифференциальные зависимости при изгибе

Для того чтобы произвести расчет балки на прочность при изгибе, необходимо знать наибольшие значения поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z и положение сечений, в которых они действуют. В связи с этим возникает необходимость определить закон изменения Q_y и M_z по длине балки. Для этой цели строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Для нахождения зависимости между изгибающим моментом M_z , поперечной силой Q_y и распределенной нагрузкой $q(x)$ в балке, находящейся под действием плоской системы сил, двумя поперечными сечениями выделим элемент протяженностью dx (рис. 112), к которому не приложены сосредоточенные силы и моменты. Поскольку вся балка находится в равновесии, то в равновесии находится и элемент dx .

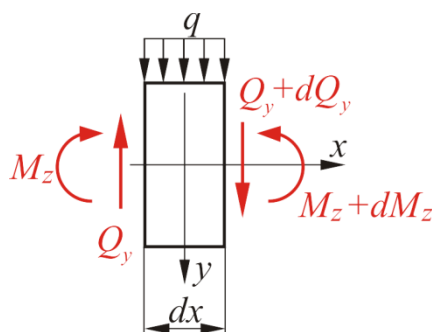


Рисунок 112 – Определение зависимости между внутренними усилиями и распределенной нагрузкой

В силу малости длины элемента распределенную в ее пределах dx нагрузку $q(x)$ принимаем постоянной. Рассмотрев равновесие элемента, составим уравнения равновесия:

$$\sum F_y = 0: \quad qdx - Q_y + Q_y + dQ_y = 0;$$

$$\sum M_O = 0: \quad M_z + Q_y \frac{dx}{2} + (Q_y + dQ_y) \frac{dx}{2} - (M_z + dM_z) = 0.$$

Пренебрегая слагаемым $dQ_y dx$ из-за порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми, получим

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q; \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y. \quad (9.2)$$

Из выражений (9.2) следует

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = -q(x). \quad (9.3)$$

То есть *первая производная от изгибающего момента по длине участка равна поперечной силе*.

Соотношение (9.3) в общем виде было получено Журавским и носит название *теоремы Журавского*.

На основании теоремы Журавского могут быть сформулированы *правила проверки эпюр*:

1. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре Q_y должен быть скачок, равный по величине и знаку приложенной силе.

2. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре M_z должен быть скачок, равный по величине и по знаку приложенному моменту.

3. На участке, где приложена распределенная нагрузка, эпюра Q_y является наклонной прямой (наклон по направлению действия нагрузки), а эпюра M_z – параболой, выпуклость которой направлена навстречу распределенной нагрузке.

4. На участках, где $Q_y > 0$, M_z возрастает, на участках, где $Q_y < 0$, M_z убывает, если $Q_y = 0$ (эпюра пересекает нулевую линию), то эпюра M_z имеет экстремум.

5. В тех точках, где на эпюре Q_y имеется скачок, на эпюре M_z будет излом.

6. Чем больше по модулю величина Q_y , тем круче изменяется эпюра M_z .

7. На свободных концах балки изгибающий момент равен нулю.

Пример 9.2. Для балки, работающей на изгиб (рис. 113), необходимо определить значение поперечной силы Q и изгибающего момента M , построить соответствующие эпюры, если $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $P = 10 \text{ кН}$; $q_1 = 50 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$

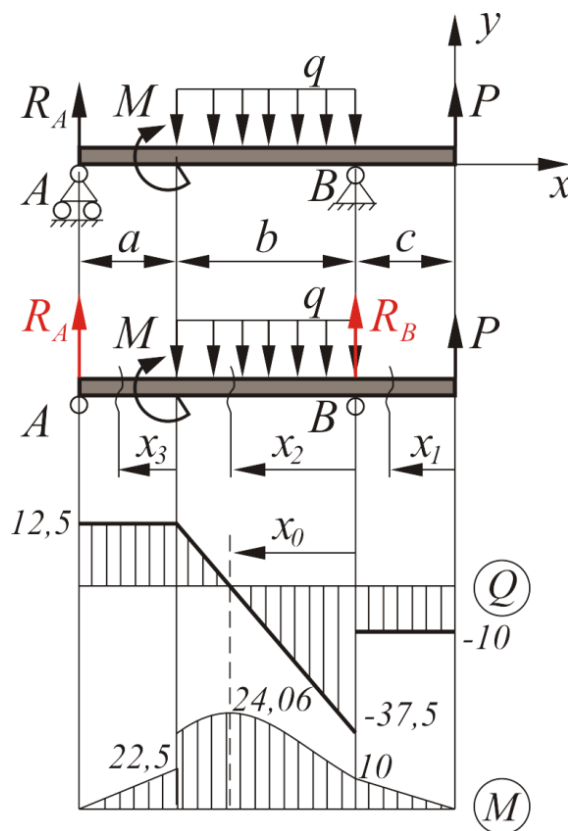


Рисунок 113 – Построение эпюр внутренних усилий при плоском изгибе балки

Решение

1. Определим опорные реакции R_A и R_B , направив их вверх вдоль оси y . Горизонтальная составляющая реакции в точке B равна нулю, поэтому на опоре B будет только вертикальная реакция. Для определения реакций составим 2 уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0: R_B(a + \vartheta) + P(a + \vartheta + c) - q\vartheta\left(a + \frac{\vartheta}{2}\right) - M = 0;$$

$$\sum M_B = 0: -R_A(a + \vartheta) + Pc + q\frac{\vartheta^2}{2} - M = 0.$$

Из этих уравнений определим реакции R_A и R_B :

$$R_B = \frac{-P(a + \vartheta + c) + q\vartheta\left(a + \frac{\vartheta}{2}\right) + M}{a + \vartheta} = \frac{-10 \cdot 3 + 50 \cdot 1,5 + 10}{2} = 27,5 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{Pc + q\frac{\vartheta^2}{2} - M}{a + \vartheta} = \frac{10 + 50 \cdot 0,5 - 10}{2} = 12,5 \text{ кН}.$$

2. Определим внутренние усилия. Для этого воспользуемся методом сечения и правилом знаков для внутренних усилий при плоском изгибе.

Сечение 1

$$0 \leq x_1 \leq c;$$

$$Q_1 = -P = -10 \text{ кН};$$

$$M_1 = Px_1 \begin{cases} x_1 = 0 & M_1 = 0; \\ x_1 = c & M_1 = Pc = 10 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Сечение 2

$$0 \leq x_2 \leq b;$$

$$Q_2 = -P - R_B + qx_2 \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 0 \quad Q_2 = -P - R_B = -37,5 \text{ кН}; \\ x_2 = b \quad Q_2 = -P - R_B + qb = 12,5 \text{ кН}; \end{array} \right.$$

$$M_2 = P(c + x_2) + R_B x_2 - q \frac{x_2^2}{2} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 0 \quad M_2 = Pc = 10 \text{ кНм}; \\ x_2 = b \quad M_2 = P(c + b) + R_B b - q \frac{b^2}{2} = \\ = 22,5 \text{ кНм}. \end{array} \right.$$

Эпюрой изгибающего момента на 2-м участке является парабола. Для ее построения надо знать координаты трех точек: в начале, в конце участка и в точке, где эпюра имеет экстремум. Экстремум на параболе будет в том же сечении балки, в котором поперечная сила Q_2 равна нулю. Расстояние до сечения, в котором на эпюре момента будет экстремум, обозначим через x_0 . Значение x_0 найдем из следующего уравнения

$$-P - R_B + qx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{P + R_B}{q} = \frac{10 + 27,5}{50} = 0,75 \text{ м}.$$

Подставим значение x_0 в уравнение для момента M_2 и найдем экстремум на параболе:

$$\begin{aligned} M_2(x_0) &= P(c + x_0) + R_B x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = 10 \cdot 1,75 + 27,5 \cdot 0,75 - 50 \frac{0,75^2}{2} \\ &= 24,06 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Сечение 3

$$0 \leq x_3 \leq a;$$

$$Q_3 = -P - R_B + qb = 12,5 \text{ кН} = R_A.$$

$$M_3 = P(c + \vartheta + x_3) + R_B(\vartheta + x_3) - q\vartheta\left(\frac{\vartheta}{2} + x_3\right) - M =$$

$$= \begin{cases} x_3 = 0 & M_3 = P(c + \vartheta) + R_B\vartheta - q\frac{\vartheta^2}{2} - M = 12,5 \text{ кНм}; \\ x_3 = a & M_3 = P(c + \vartheta + a) + R_B(\vartheta + a) - q\vartheta\left(\frac{\vartheta}{2} + a\right) - M = 0. \end{cases}$$

По найденным значениям внутренних усилий строим эпюры поперечной силы и изгибающего момента (рис. 113).

9.6. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим простейший случай изгиба – чистый изгиб, при котором в поперечных сечениях бруса действует только одно внутреннее усилие – изгибающий момент (рис. 114). Например, в условиях чистого изгиба работают участки балки, на которых изгибающий момент постоянен, а поперечная сила отсутствует ($dM/dx = 0$).

При расчете балки на изгиб будем считать справедливыми принятые ранее гипотезы, из которых выделим следующие:

- гипотеза плоских сечений (Бернулли): поперечные сечения бруса плоские до деформации, остаются плоскими и в деформированном состоянии;
- гипотеза постоянства напряжений по ширине бруса;
- гипотеза отсутствия боковых давлений: боковые волокна бруса не давят друг на друга.

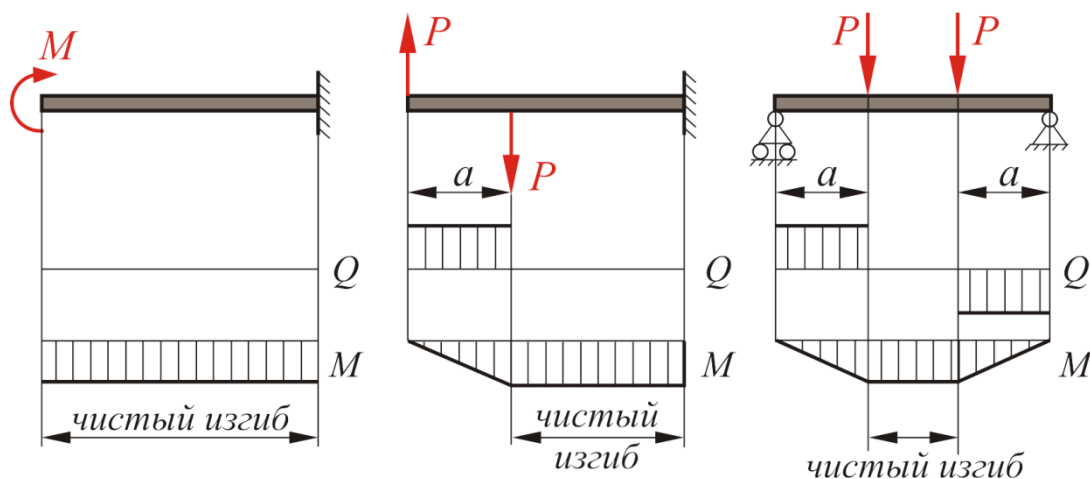


Рисунок 114 – Примеры чистого изгиба балки

Изучим закон распределения напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе.

С помощью эксперимента установлено, что если на боковую поверхность бруса прямоугольного поперечного сечения нанести ортогональную сетку в виде продольных и поперечных прямых (рис. 115), то после деформирования на участке чистого изгиба продольные прямые принимают криволинейное очертание, а поперечные – остаются прямыми. При этом сетка остается ортогональной. Отсюда можно сделать вывод, что угловые деформации в плоскости изгиба отсутствуют, и поперечные сечения балки при деформации не искривляются.

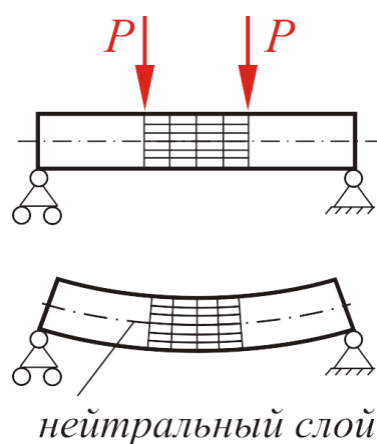


Рисунок 115 – Деформация в случае чистого изгиба

Из рисунка 115 видно, что продольные волокна балки, расположенные ниже некоторого слоя, будут растянуты, а выше этого слоя – сжаты. Такой слой называется *нейтральным слоем*. Он не испытывает деформаций растяжения и сжатия. Следовательно, ниже нейтрального слоя в поперечных сечениях действуют растягивающие нормальные напряжения, а выше этого слоя – сжимающие. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется – *нейтральной осью* (нулевой линией) сечения.

Геометрическая сторона задачи

Выделим двумя сечениями ad и bc на расстоянии dx бесконечно малый элемент (рис. 116, a , b) и рассмотрим его деформацию (рис. 116, $в$).

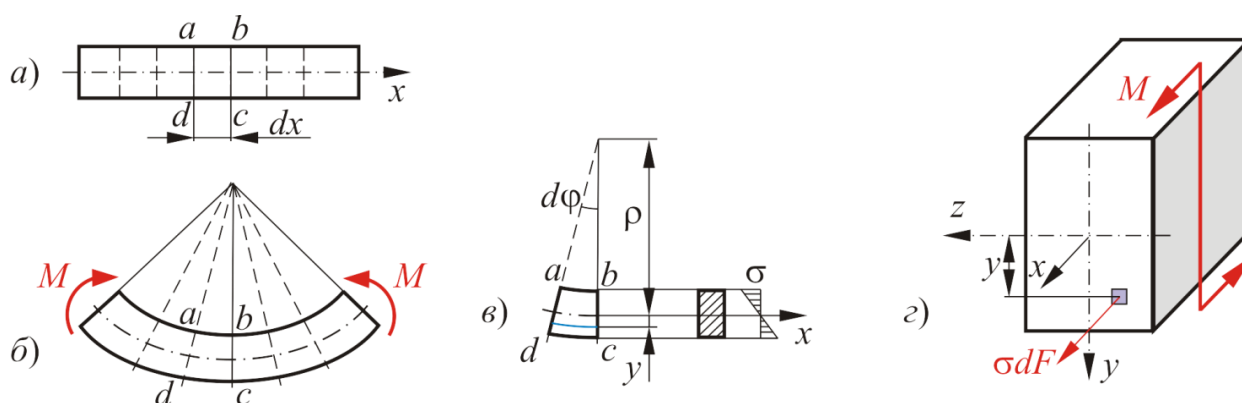


Рисунок 116 – Определение напряжений при чистом изгибе

Длина отрезка нейтрального слоя $dx = \rho \cdot d\varphi$. Волокно нейтрального слоя не деформируется, значит $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$. Любое другое волокно, находящееся на расстоянии y , изменит свою длину и станет равным $(\rho + y)d\varphi$. Его относительное удлинение будет определяться:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (9.4)$$

Деформация волокон пропорциональна их расстоянию до нейтрального слоя.

Физическая сторона задачи

В общем случае нагружения продольная деформация по закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

однако в силу гипотезы отсутствия боковых давлений $\sigma_z = 0$ и $\sigma_y = 0$, т. е. волокна бруса испытывают только деформацию растяжения. Имеет место линейное напряженное состояние

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (9.5)$$

Статическая сторона задачи

Из рисунка 116, г видно, что элементарное усилие на элементарной площадке равно $\sigma_x dF$, а элементарный момент равен $y(\sigma_x dF)$. Тогда полный момент в сечении будет равен

$$M_z = \int \sigma_x y dF. \quad (9.6)$$

Приравняем правые части выражений (9.4) и (9.5):

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma_x}{E},$$

откуда

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} y. \quad (9.7)$$

Зависимость (9.7) подставим в (9.6):

$$M_z = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} I_z,$$

где I_z – момент инерции поперечного сечения.

Из последнего равенства найдем отношение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (9.8)$$

и подставим его в (9.7). Опуская индекс при σ , получим *уравнение Навье*:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (9.9)$$

Это и есть искомая формула, дающая возможность вычислять нормальные напряжения при чистом изгибе балки в любой точке ее сечения. Таким образом, *нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию точки от нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.*

Формула (9.8) имеет самостоятельное значение. Ее можно трактовать как *закон Гука при изгибе*, поскольку она связывает деформацию (кривизну нейтрального слоя $1/\rho$) с действующим в сечении моментом. Произведение EI называется *жесткостью сечения при изгибе*. Из формулы (9.8) видно, что если балка изготовлена из однородного

материала ($E = \text{const}$) и имеет постоянное сечение ($I = \text{const}$), то при чистом изгибе ($M = \text{const}$) ее ось искривляется по дуге окружности $1/\rho = \text{const}$, и, значит, $\rho = \text{const}$.

Таким образом, при чистом изгибе стержня моментами M_z , действующими в главной плоскости инерции Oxy , нормальные напряжения σ в поперечном сечении стержня изменяются по линейному закону. В точках нейтральной оси напряжения σ равны нулю, а наибольшее и наименьшее значения принимают в нижних ($y = h_n$) и в верхних ($y = -h_\sigma$) волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 117):

$$\sigma_n = \frac{M_z}{I_z} h_n, \quad \sigma_\sigma = -\frac{M_z}{I_z} h_\sigma. \quad (9.10)$$

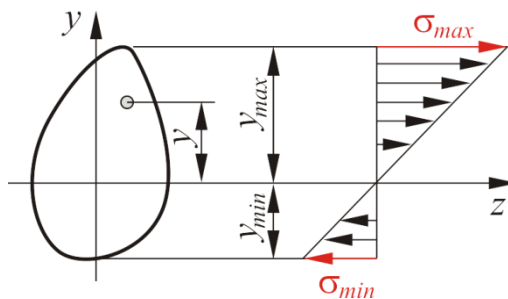


Рисунок 117 – Распределение нормальных напряжений при чистом изгибе

Эти формулы удобно представить в виде

$$\sigma_n = \frac{M_z}{W_{zn}}, \quad \sigma_\sigma = -\frac{M_z}{W_{z\sigma}}, \quad (9.11)$$

где

$$W_{zn} = \frac{I_z}{h_n}, \quad W_{z\sigma} = \frac{I_z}{h_\sigma}. \quad (9.12)$$

Величины W_{zn} и $W_{z\sigma}$ называются моментами сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz для нижних и верхних волокон. Эти величины всегда положительны.

Отметим, что знак напряжения в формуле (9.9) определяется знаками изгибающего момента M_z и ординаты y , а в формулах (9.11) – по физическому смыслу задачи в зависимости от того, растянуты или сжаты рассматриваемые волокна балки.

Из рисунка 117 видно, что в балках с несимметричным сечением наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси и могут быть определены по формуле

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_{zmin}}, \quad (9.13)$$

где W_{zmin} – наименьший из моментов сопротивления W_{zh} и W_{zg} .

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, $h_n = h_g = h/2$, момент сопротивления определяется по формуле

$$W_z = \frac{I_z}{0,5h}. \quad (9.14)$$

Напряжения в крайних волокнах в этом случае равны по величине и отличаются знаками:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad \sigma_{min} = -\frac{M_z}{W_z}. \quad (9.15)$$

На рисунке 118 показан характер эпюры σ для симметричных сечений: прямоугольного, круглого, двутаврового при $M_z > 0$.

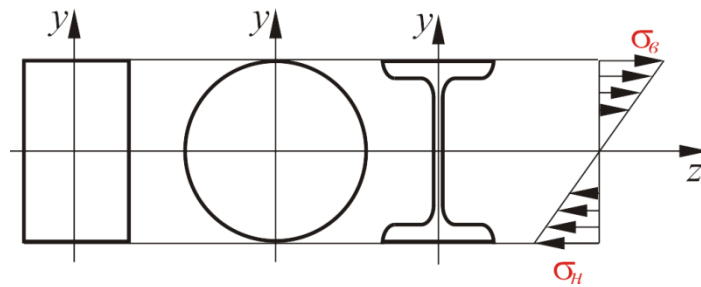


Рисунок 118 – Распределение напряжения при чистом изгибе в балках с симметричным сечением

Приведем формулы для вычисления моментов инерции и моментов сопротивления для некоторых форм поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad W_z = \frac{I_z}{0,5h} = \frac{bh^2}{6}. \quad (9.16)$$

Для сплошного круглого сечения:

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}; \quad W_z = \frac{I_z}{R} = \frac{\pi R^3}{4}. \quad (9.17)$$

Для трубчатого сечения с внутренним и внешними радиусами R и r :

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4}; \quad W_z = \frac{I_z}{R} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4R}. \quad (9.18)$$

Для прокатных профилей (двутавровых, швеллерных, уголковых и т. д.) величины моментов инерции и моментов сопротивления приведены в справочниках.

Следствия из формулы Навье:

- центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений и приведения внешних сил;
- напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки;
- напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой;
- наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя (рис. 117).

Полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы о рациональной форме сечения при чистом изгибе. В отличие от простого растяжения – сжатия при изгибе, как и при кручении, напряжения в сечении распределяются неравномерно. Материал, расположенный у нейтрального слоя, нагружен очень мало. Поэтому в целях его экономии и снижения веса конструкции для деталей, работающих на изгиб, следует выбирать такие формы сечения, чтобы большая часть материала была удалена от нейтральной линии. Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному – двутавровое сечение.

9.7. Напряжения при поперечном изгибе

Рассмотрим балку, находящуюся в условиях плоского изгиба под действием произвольных поперечных нагрузок в главной плоскости Oxy (рис. 119, а). Рассечем балку на расстоянии x от ее левого края и рассмотрим равновесие левой части. Влияние правой части в этом случае нужно заменить внутренними усилиями: изгибающим моментом M_z и поперечной силой Q_y (рис. 119, б). Изгибающий момент M_z в этом случае не является постоянным по величине, как это имело место в случае чистого изгиба, а изменяется по длине балки. Так как нормальное напряжение зависит от величины изгибающего момента, то нормальные напряжения в продольных волокнах также будут изменяться по длине балки. Следовательно, в случае плоского изгиба нормальные напряжения являются функциями переменных x и y : $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$.

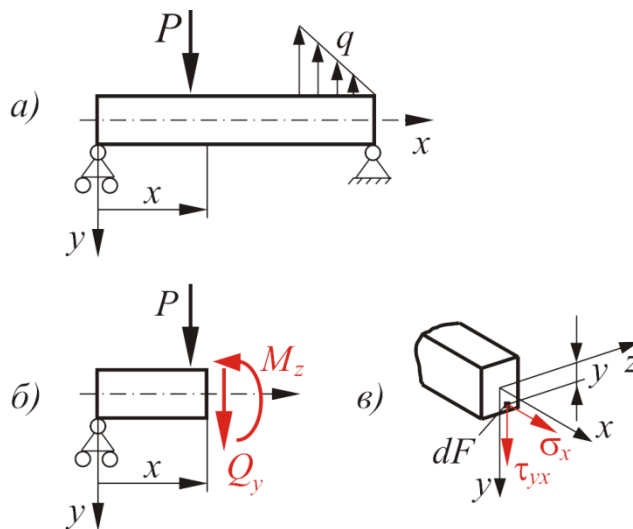


Рисунок 119 – Напряжения в случае плоского изгиба балки

При поперечном изгибе в сечении балки действуют не только нормальные, но и касательные напряжения τ_{xy} (рис. 119, в), равнодействующей которых является поперечная сила Q_y :

$$Q_y = \iint_F \tau_{xy} dF. \quad (9.19)$$

Наличие касательных напряжений τ_{xy} сопровождается появлением угловых деформаций γ_{xy} . Касательные напряжения, как и нормальные, распределены по сечению неравномерно. Следовательно, неравномерно будут распределены и угловые деформации, связанные с ними законом Гука при сдвиге. Это означает, что при поперечном из-

гибе в отличие от чистого изгиба сечения балки не остаются плоскими (рис. 120).

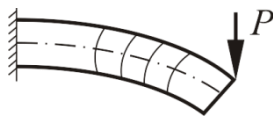


Рисунок 120 – Деформация балки в случае плоского изгиба

9.7.1. Нормальные напряжения при плоском изгибе

Как показывает практика, на величине нормальных напряжений искажение плоскости поперечных сечений заметным образом не сказывается. В частности, если поперечная сила Q_y не меняется по длине бруса, формулы (9.9) и (9.13), выведенные для случая чистого изгиба, будут давать точные результаты и в случае плоского изгиба. Действительно, при $Q_y = \text{const}$ искривление всех сечений происходит одинаково. Поэтому при взаимном повороте двух смежных сечений удлинение продольного волокна будет одним и тем же, независимо от того, осталось сечение плоским или нет.

При изменяющейся вдоль оси балки поперечной силы формулы для чистого изгиба дают для нормальных напряжений некоторую погрешность. Путем несложного анализа можно показать, что величина этой погрешности имеет по сравнению с единицей порядок h/l , где h – размер поперечного сечения в плоскости изгиба, а l – длина балки. Как уже отмечалось, характерной особенностью балки является то, что размеры ее поперечного сечения намного меньше длины. Следовательно, величина h/l весьма мала и соответственно малой оказывается указанная погрешность.

Все сказанное дает основание принять гипотезу плоских сечений. Будем в дальнейшем считать, что совокупность точек, образующих плоскость поперечных сечений до изгиба, образует и после изгиба плоскость, повернутую в пространстве. Это предположение приемлемо в той мере, в какой угловые деформации γ в сечении можно считать существенно меньшими, чем угловые перемещения, обусловленные изменением кривизны бруса.

Второй особенностью плоского изгиба является наличие нормальных напряжений, возникающих в продольных сечениях бруса, т. е. напряжений «надавливания» между волокнами. Эти напряжения возникают только при переменной поперечной силе Q_y и имеют весьма малую величину.

Таким образом, формулы (9.9) и (9.13), выведенные для определения нормальных напряжений при чистом изгибе, применимы и в случае плоского изгиба. В такой же мере применима формула (9.8), дающая зависимость кривизны бруса от изгибающего момента.

Стоит отметить, что формула (9.9) применима лишь в том случае, когда сечения балки имеют ось симметрии и внешние силы расположены в этой плоскости симметрии. Нейтральная ось в каждом сечении, от которой отсчитывается y , проходит через центр тяжести перпендикулярно к оси симметрии.

Во всех точках, одинаково удаленных от нейтральной оси, нормальные напряжения одинаковы. По одну сторону от нейтральной оси мы получаем сжимающие, а по другую сторону – растягивающие напряжения. Наибольшее напряжение получается в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 118). При выбранных условиях относительно знаков для момента M_z и расстояния y формула (9.9) автоматически дает правильный знак для нормального напряжения: плюс – для растягивающих и минус – для сжимающих напряжений.

При положительном изгибающем моменте балка гнется выпуклостью вниз, верхние волокна сжимаются ($y < 0$), нижние растягиваются. При отрицательном изгибающем моменте получается обратная картина. Поэтому при решении практических задач для выбора знака нормальных напряжений можно руководствоваться правилом: *если точка рассматриваемого сечения находится в растянутой зоне, то σ следует брать со знаком плюс, а если в сжатой – со знаком минус.*

Для проверки прочности балки по нормальным напряжениям необходимо найти наиболее напряженные на растяжение и сжатие площадки. Для этого необходимо применить формулу (9.9) к опасному сечению, т. е. подставить в нее вместо M_z его наибольшее значение M_{max} , а вместо y подставить y_{max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных от нее точек. Тогда для наибольшего нормального напряжения получаем выражение

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z\ max}}{I_z} y_{max}. \quad (9.20)$$

Или через момент сопротивления сечения формула (9.20) примет следующий вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z max}}{W_z}. \quad (9.21)$$

Тогда условие прочности по нормальным напряжениям при плоском изгибе запишется следующим образом:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (9.22)$$

Отсюда находим, что

$$W_z \leq \frac{M_{z max}}{[\sigma]}, \quad (9.23)$$

т. е. необходимый по условию прочности момент сопротивления сечения балки должен быть больше или равен наибольшему изгибающему моменту, деленному на допускаемое напряжение.

9.7.2. Касательные напряжения при плоском изгибе

Теперь определим приближенно величину касательных напряжений при плоском изгибе. Вычислить эти напряжения проще всего через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях бруса. Выделим в балке элемент длиной dx (рис. 121, а). При плоском изгибе моменты, возникающие в левом и правом сечениях элемента, не одинаковы и отличаются на величину dM . Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 121, б), разделим элемент на две части и рассмотрим равновесие верхней части.

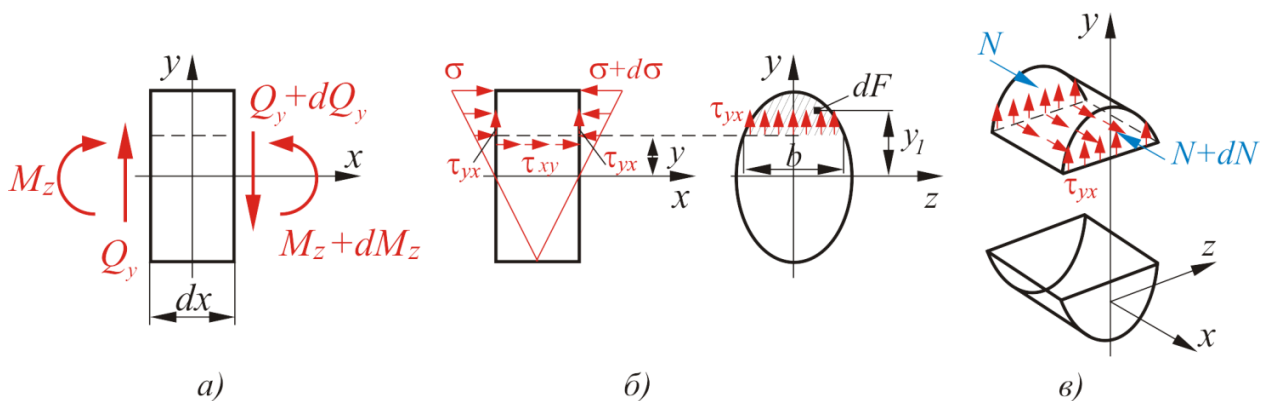


Рисунок 121 – Распределение напряжений при плоском изгибе

Равнодействующая нормальных сил σdF в левом сечении в пределах заштрихованной площади равна

$$N = \int_F \sigma dF.$$

Или, согласно формуле (9.9),

$$N = \frac{M_z}{I_z} \int_F y_1 dF, \quad (9.24)$$

где y_1 – текущая ордината площадки dF (рис. 121, б).

Полученный интеграл представляет собой статический момент $S_z(y)$ относительно оси z части площадки, расположенной выше продольного сечения, который является функцией от y . Тогда выражение (9.24) примет вид

$$N = \frac{M_z S_z(y)}{I_z}. \quad (9.25)$$

В правом сечении нормальная сила будет равна

$$N + dN = \frac{(M_z + dM_z) S_z(y)}{I_z}. \quad (9.26)$$

Определим разность выражений (9.25) и (9.26):

$$dN = \frac{dM_z S_z(y)}{I_z}.$$

Приращение нормальной силы должно уравниваться касательными силами, возникающими в продольном сечении элемента (см. рис. 121, б и в).

В качестве первого приближения примем, что касательные напряжения распределены по ширине b равномерно. Тогда

$$\frac{dM_z S_z(y)}{I_z} = \tau_{yx} b dz,$$

откуда

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z(y)}{I_z b(y)}. \quad (9.27)$$

Полученная формула носит название *формула Журавского*, по имени русского ученого, впервые исследовавшего касательные напряжения при поперечном изгибе.

Выражение (9.27) позволяет вычислить величину касательных напряжений, возникающих в продольных сечениях бруса. Из выражения (9.27) следует, что касательные напряжения по высоте сечения зависят от изменения ширины сечения $b(y)$ и статического момента отсеченной части сечения $S_z(y)$. Напряжения в поперечных сечениях равны им, как парные. Зависимость τ_{yx} от y в сечении определяется через статический момент $S_z(y)$. При подходе к верхней кромке сечения площадь заштрихованной части (рис. 122, б) уменьшается до нуля. Следовательно, здесь $S_z(y) = 0$. При подходе к нижней кромке заштрихованная часть охватывает все сечение. Так как ось z – центральная, то здесь $S_z(y) = 0$. Поэтому касательные напряжения, как это следует из формулы (9.27), в верхних и нижних точках сечения равны нулю.

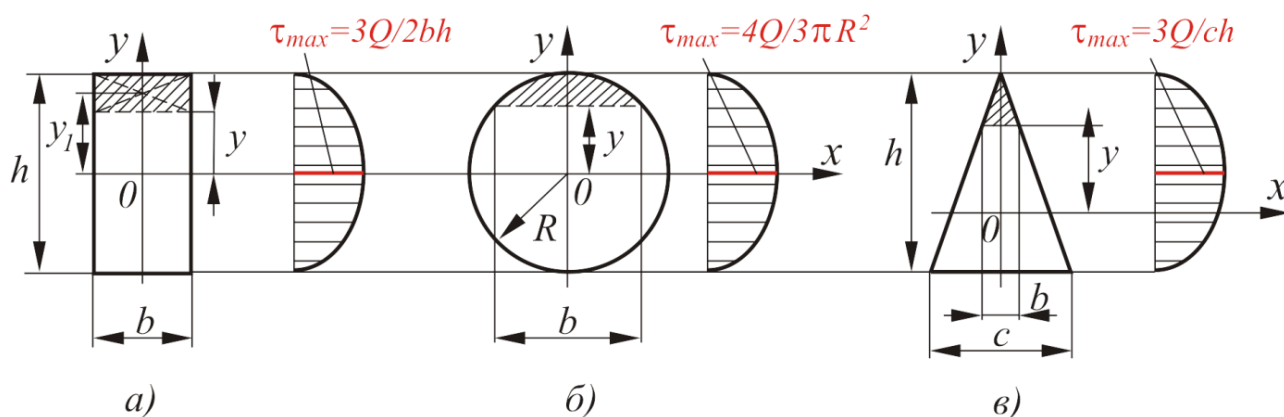


Рисунок 122 – Распределение касательных напряжений по высоте сечения

Определим по формуле (9.27) величины максимальных касательных напряжений для прямоугольника, круга и треугольника.

Выведем формулу для $S_z(y)$ в случае балки *прямоугольного поперечного сечения* высотой h и шириной b (рис. 122, а). Статический момент отсеченной части (заштрихованная часть) относительно оси x будет равен произведению площади отсеченной части F на расстояние y_1 от ее центра тяжести до оси x :

$$S_z(y) = F \cdot y_1;$$

$$F = b\left(\frac{h}{2} - y\right);$$

$$y_1 = \frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2} - y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right).$$

Тогда

$$S_z(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \quad (9.28)$$

Осевой момент прямоугольного сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.29)$$

Подставляя (9.28) и (9.29) в формулу (9.27) и учитывая, что ширина отсеченной части сечения $b = b$, получим выражение для касательного напряжения:

$$\tau_{yx} = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Наибольшее напряжение будет при $y = 0$. Следовательно, максимальное касательное напряжение для прямоугольного поперечного сечения

$$\tau_{max} = \frac{3Q_y}{2bh}. \quad (9.30)$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в балке прямоугольного сечения возникает в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю (на нейтральной оси), и, наоборот, в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю.

Определим *максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения* (рис. 122, б). Опуская операцию интегрирования для определения статического момента отсеченной части круглого поперечного сечения приведем окончательную формулу для $S_z(y)$:

$$S_z(y) = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (9.31)$$

Осевой момент круглого сечения

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (9.32)$$

Подставляя (9.31) и (9.32) в формулу (9.27) и учитывая, что ширина отсеченной части сечения зависит от y и равна следующему:

$$b(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

получим выражение для касательного напряжения:

$$\tau_{yx} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4} (R^2 - y^2).$$

Так как наибольшее напряжение будет при $y = 0$, следовательно, максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2}. \quad (9.33)$$

Определим *максимальное касательное напряжение для треугольного поперечного сечения* (рис. 122, в) с основанием s и высотой h .

Опуская операцию интегрирования для определения статического момента отсеченной части треугольного поперечного сечения, приведем окончательную формулу для $S_z(y)$:

$$S_z(y) = \frac{1}{3}b(y)\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right). \quad (9.34)$$

Осевой момент круглого сечения

$$I_z = \frac{ch^3}{12}. \quad (9.35)$$

Подставляя (9.34) и (9.35) в формулу (9.27) и учитывая, что ширина отсеченной части сечения зависит от y (рис. 9.23, в) и равна следующему

$$b(y) = h \frac{c(h-y)}{2},$$

получим выражение для касательного напряжения:

$$\tau_{yx} = \frac{12Q_y}{ch^3} \left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{1}{3}h + y\right).$$

Максимальное напряжение имеет место на расстоянии $y = h/6$ от нейтральной оси:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\frac{1}{2}ch}. \quad (9.36)$$

Результат, полученный для балки прямоугольного сечения, можно использовать для вычисления касательных напряжений в двутавровой балке. Рассмотрим распределение *касательных напряжений в двутавровом сечении* (рис. 123).

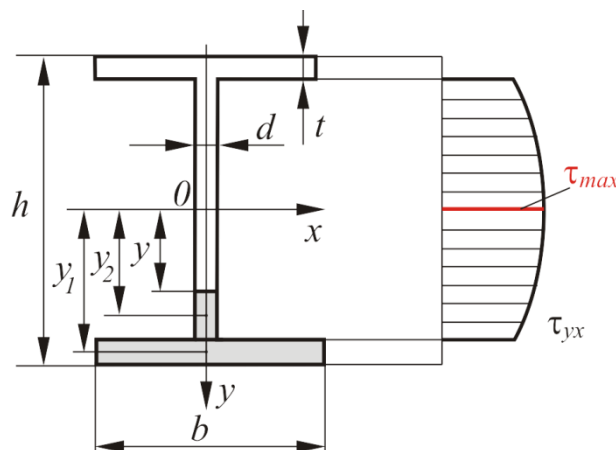


Рисунок 123 – Распределение касательных напряжений в двутавровом сечении

Двутавровое сечение может быть представлено в виде сопряженный трех прямоугольников: двух горизонтальных полок и вертикальной стенки. Поэтому статический момент относительно оси z определяется как сумма статических моментов площади полки F_n и части стенки F_c , заштрихованных на рисунке 123:

$$S_z(y) = F_n y_1 + F_c y_2, \quad (9.37)$$

где y_1, y_2 – расстояние до центров тяжести отсеченной части полки и стенки.

При вычислении τ_{yx} в стенке в формуле (9.27) нужно принять $b(y) = d$. В результате получим

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z(y)}{I_z d}. \quad (9.38)$$

Наибольшее значение касательного напряжения имеет место на уровне нейтральной оси при $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_z^{1/2}}{I_z d}, \quad (9.39)$$

где $S_z^{1/2}$ – статический момент площади половины сечения относительно нейтральной оси.

$$S_z^{1/2} = \left(\frac{h}{2} - t \right) d \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right) + b t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Для прокатных профилей (двутавров и швеллеров) величина статического момента половины сечения приведена в сортаменте.

На уровне примыкания стенки к полкам касательные напряжения τ_{yx} равны

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^n}{I_z d},$$

где S_z^n – статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси.

$$S_z^n = \frac{bt}{2}(h-t).$$

Вертикальные касательные напряжения τ_{yx} в полках двутавра не могут быть найдены по формуле (9.38), так как вследствие того, что $b \gg t$, предположение об их равномерном распределении по ширине полки становится неприемлемым. На верхней и нижней гранях полки эти напряжения должны быть равны нулю. Поэтому τ_{yx} в полках двутавра весьма малы и не представляют практического интереса. Распределение касательного напряжения в двутавровом сечении показано на рисунке 123.

Выражение для проверки прочности балки при плоском изгибе имеет следующий вид:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{ymax} S_{zmax}(y)}{I_z b(y)} \leq [\tau]. \quad (9.40)$$

9.8. Расчет на прочность при плоском изгибе

В предыдущих параграфах этой главы были получены условия прочности по нормальным (9.22) и касательным (9.40) напряжениям при плоском изгибе балок. Эти формулы дают возможность проверки и подбора сечений деталей, работающих на изгиб. Чтобы получить эти условия, выясним, в каком напряженном состоянии находятся элементы стержня, испытывающего плоский изгиб. Для примера рассмотрим балку, изображенную на рисунке 124.

На рисунке 124, *а* показана схема балки и нагрузка, а также построены эпюры поперечной силы Q (рис. 124, *б*) и изгибающего момента M (рис. 124, *в*). На рисунке 124, *г* изображен фасад балки. У ряда точек ее поперечного сечения выделены элементарные кубики, одна из граней которых совпадает с плоскостью поперечного сечения.

Элементы 1, 7, и 8 выделены у крайних точек сечений. Здесь $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_{max}$ и элементы испытывают простое растяжение или сжатие, т. е. находятся в линейном напряженном состоянии.

Элементы 4 и 5 расположены на нейтральной линии, где $\tau = \tau_{max}$, $\sigma = 0$, поэтому на их гранях действуют только касательные напряжения и, следовательно, они испытывают чистый сдвиг.

В вертикальных гранях элементов 2, 3 и 6, выделенных в произвольных точках балки, действуют и нормальные и касательные напряжения, поэтому элементы находятся в плоском напряженном состоянии.

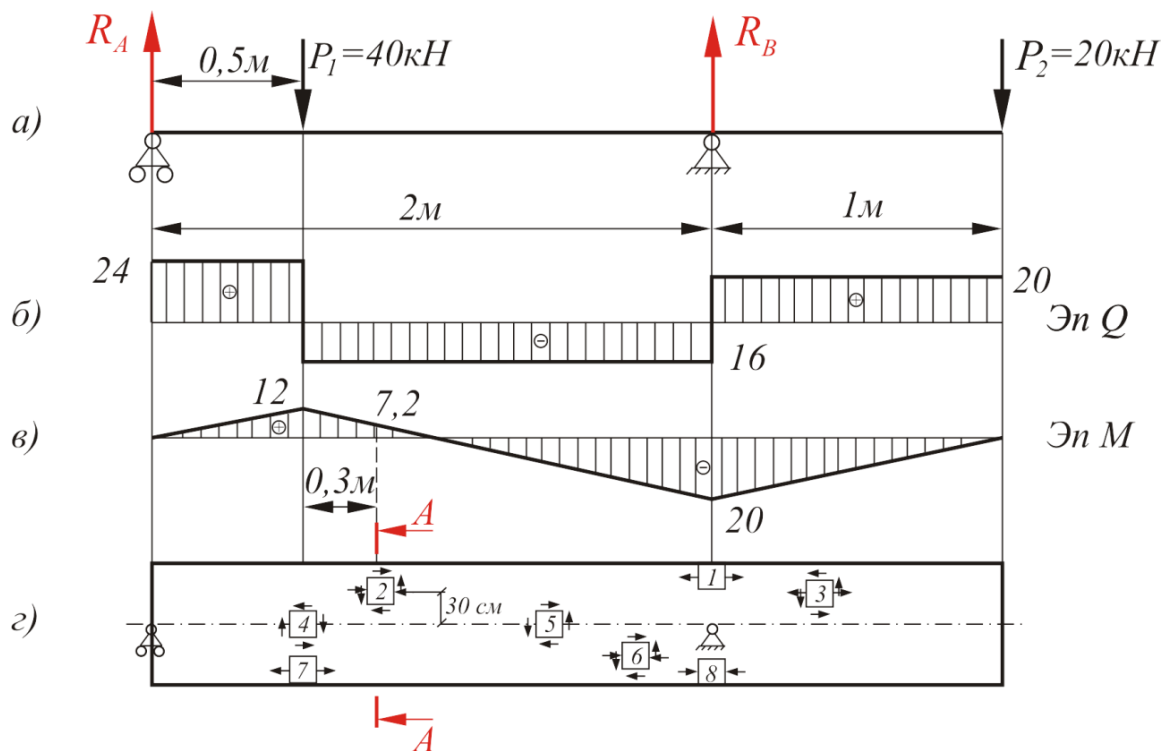


Рисунок 124 – Расчет балки на прочность при плоском изгибе

Величины и направления нормальных и касательных напряжений зависят от величины и направлений поперечной силы Q и изгибающего момента M в рассматриваемом сечении и от положения элемента по высоте сечения. Направления напряжений определяются непосредственно на основании эпюр Q и M . При этом нужно помнить, что эпюры M строят на сжатых волокнах. Поэтому элементы 2 и 6 испытывают сжатие, а элементы 1, 3 и 7 – растяжение.

Чтобы выявить направление τ , обращаем внимание на знаки Q в соответствующих сечениях. Например, в сечении $A-A$ поперечная сила Q отрицательна, а следовательно, стремясь повернуть обе части рассеченной балки против часовой стрелки, Q действует на левую сторону сечения вверх. Так и будут направлены τ в правой грани элемента 3; в остальных гранях направления τ определяются законом парности касательных напряжений.

Величины напряжений могут быть найдены по формулам, полученным в предыдущих параграфах:

1. Для элементов 1, 7 и 8

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}.$$

2. Для элементов 4 и 5

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max} S_{z\max}(y)}{I_z b} = k \frac{Q_{y\max}}{F}.$$

3. Для элементов 2, 3 и 6

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z(y)}{I_z b}.$$

Если балка имеет, например, прямоугольное сечение с размерами, показанными на рисунке 120, в: $b = 5 \text{ см}$; $h = 10 \text{ см}$; $F = 50 \text{ см}^2$, то

$$W_z = \frac{5 \cdot 10^2}{6} = 83,3 \text{ см}^3; \quad I_z = \frac{5 \cdot 10^3}{12} = 417 \text{ см}^4.$$

Тогда для элементов 1 и 8 ($|M| = 20 \text{ кНм}$)

$$\sigma_{\max} = \frac{20 \cdot 10^6}{83,3 \cdot 10^3} = 240 \text{ МПа};$$

для элемента 5 ($|Q| = 16 \text{ кН}$)

$$\tau_{\max} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^2} = 4,8 \text{ МПа};$$

для элемента 2 ($|Q| = 16 \text{ кН}$, $|M| = 7,2 \text{ кНм}$, $y = 3 \text{ см}$)

$$S_z = (5 - 3) \cdot 5 \cdot \left(3 + \frac{5 - 3}{2} \right) = 40 \text{ см}^3;$$

$$\sigma = \frac{7,2 \cdot 10^6 \cdot 30}{417 \cdot 10^4} = 51,7 \text{ МПа}; \quad \tau = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^3}{50 \cdot 417 \cdot 10^4} = 3,1 \text{ МПа}$$

и т. д.

Таким образом, при поперечном изгибе балки ее материал находится в неоднородном плоском напряженном состоянии. Условие прочности должно быть записано для так называемой *опасной точки*

балки, т. е. той точки, где материал находится в наиболее напряженном состоянии. Опасной будет одна из следующих трех точек:

а) точка, где нормальное напряжение достигает наибольшей величины;

б) точка, где касательное напряжение достигает наибольшей величины;

в) точка, где σ и τ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т. е. наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности. При этом таких точек может оказаться несколько.

Точка, где нормальное напряжение достигает наибольшей величины, расположена в крайних волокнах того сечения, где изгибающий момент имеет наибольшее значение (например, точки 1 и 8 на рис. 124). Напряженное состояние в такой точке линейное и условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Точка, где касательное напряжение достигает наибольшей величины, находится на нейтральной линии того сечения, где поперечная сила наибольшая (на рис. 124 это точка 4 и вообще любая точка на участке нейтрального слоя, где $Q_y = Q_{ymax}$). В такой точке наблюдается чистый сдвиг и поэтому условие прочности примет вид

$$\tau_{max} = \frac{Q_{ymax} S_{zmax}(y)}{I_z b(y)} = k \frac{Q_{ymax}}{F} \leq [\tau].$$

Что касается точки, где σ и τ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, то положение ее не столь определено. Но где бы она ни была выбрана, в ней будет плоское напряженное состояние, при котором главные напряжения рассчитывают по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right); \quad (9.41)$$

$$\sigma_2 = 0; \quad (9.42)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right). \quad (9.43)$$

Внося эти величины в выражения для эквивалентных напряжений по различным теориям прочности, получаем условия прочности:

$$\sigma_{\text{эквI}} = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \leq [\sigma]; \quad (9.44)$$

$$\sigma_{\text{эквII}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (9.45)$$

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (9.46)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (9.47)$$

Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям прочности (формулы (9.46) и (9.47)).

Практика применения и расчета балок показала, что в подавляющем большинстве реальных случаев опасной является крайняя точка того сечения, где $M_z = M_{z\max}$. Поэтому практически проверочный расчет балок на прочность состоит в следующем:

- 1) находят опасное сечение, т. е. сечение, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент $M_{z\max}$;
- 2) по таблице или вычислением определяют момент сопротивления W_z сечения относительно нейтральной линии сечения;
- 3) применяют только одно условие прочности (9.22), которое и называется поэтому *основным*.

По этой схеме для большинства профилей (круглого, прямоугольного, двутаврового и других сечений) легко выполним и проектировочный расчет; при этом условие прочности (9.22) записывается в виде (9.23).

9.9. Примеры расчета на прочность балки в случае плоского изгиба

Пример 9.1. Двутавровая балка № 27а (рис. 125), изготовленная из стали Ст3, имеющей предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ и нагруженная распределенной нагрузкой $q = 30 \text{ кН/м}$ и изгибающим моментом

$M = 40 \text{ кНм}$. Проверить прочность балки при заданном коэффициенте запаса прочности $[n_T] = 1,5$.

Решение

Определим внутренние усилия Q_y и M_z и построим их эпюры. Для расчета на прочность Q_y не нужна, но построение ее при действии на балку распределенной нагрузки целесообразно, так как по этой эпюре определяется характер эпюры изгибающего момента и наличие экстремума на параболе.

Составим уравнения равновесия для определения реакций опор:

$$\sum M_A(F) = 0: \quad -4q + M + R_B \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{4q - M}{5} = 16 \text{ кН};$$

$$\sum M_B(F) = 0: \quad 4q \cdot 4 + M - R_A \cdot 5 = 0;$$

$$R_A = \frac{4q \cdot 4 + M}{5} = 104 \text{ кН}.$$

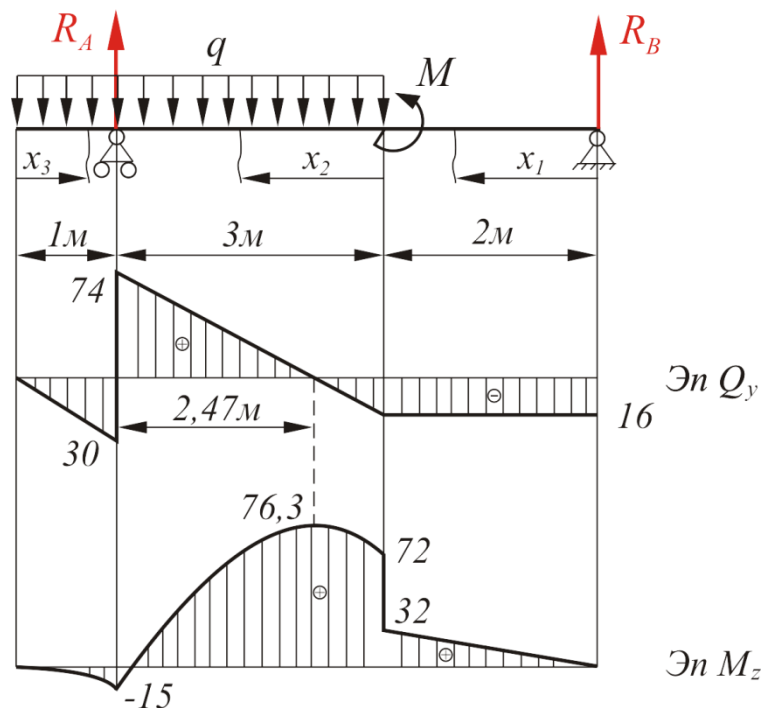


Рисунок 125 – Расчетная схема к примеру 9.1

Составим уравнения равновесия для определения внутренних усилий:

Участок 1

$$Q_1 + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = -R_B = 16 \text{ кН};$$

$$M_1 - R_B x_1 = 0 \Rightarrow M_1 = R_B x_1;$$

$$0 \leq x_1 \leq 2m;$$

$$M_1(x_1 = 0) = 0; \quad M_1(x_1 = 2m) = R_B \cdot 2 = 32 \text{ кНм}.$$

Участок 2

$$Q_2 + R_B - qx_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = -R_B + qx_2;$$

$$0 \leq x_2 \leq 3m;$$

$$Q_2(x_2 = 0) = -R_B = 16 \text{ кН}; \quad Q_2(x_2 = 3m) = -R_B + q \cdot 3 = 74 \text{ кН}.$$

$$M_2 - R_B(2 + x_2) - M + q \frac{x_2^2}{2} = 0 \Rightarrow M_2 = R_B(2 + x_2) + M - q \frac{x_2^2}{2};$$

$$M_2(x_2 = 0) = 2R_B + M = 72 \text{ кНм};$$

$$M_2(x_2 = 3m) = 5R_B + M - q \frac{3^2}{2} = -15 \text{ кНм}.$$

Так как эпюра поперечной силы пересекает нулевую ось, на эпюре момента будет экстремум на параболе. Для определения экстремума определим сначала расстояние до сечения, где поперечная сила равна нулю:

$$Q_2 = -R_B + qx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{R_B}{q} = 0,53m.$$

Подставим полученное расстояние в выражение для момента:

$$M_2(x_0 = 0,53m) = R_B(2 + x_0) + M - q \frac{x_0^2}{2} = 76,3 \text{ кНм}.$$

Участок 3

$$Q_3 = -qx_3;$$

$$0 \leq x_3 \leq 1m;$$

$$Q_3(x_3 = 0) = 0 \text{ кН}; \quad Q_3(x_3 = 1 \text{ м}) = -q \cdot 1 = -30 \text{ кН};$$

$$M_3 + q \frac{x_3^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_3 = -q \frac{x_3^2}{2};$$

$$M_3(x_3 = 0) = 0 \text{ кНм};$$

$$M_3(x_3 = 1 \text{ м}) = -q \frac{1}{2} = -15 \text{ кНм}.$$

Таким образом, максимальный момент равен $M_{\max} = 76,3 \text{ кНм}$.

Определим наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{76,3 \cdot 10^3}{407 \cdot 10^{-6}} = 187,5 \text{ МПа},$$

где W_z – момент сопротивления сечения для двутавра №27а, определяемый в сортаменте.

Определим коэффициент запаса прочности:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{187,5} = 1,28.$$

Определим на сколько процентов полученный запас прочности ниже требуемого:

$$\frac{[n_T] - n_T}{[n_T]} = 14,5\%.$$

Можно сделать вывод, что балка работает со значительной перегрузкой.

Пример 9.2. Определить из расчета на прочность допускаемую нагрузку двутавровой балки № 45, нагруженной, как показано на рисунке 126, распределенной нагрузкой q и сосредоточенной силой $P = 6qa$. Допускаемые напряжения: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $[\tau] = 96 \text{ МПа}$, $a = 1 \text{ м}$.

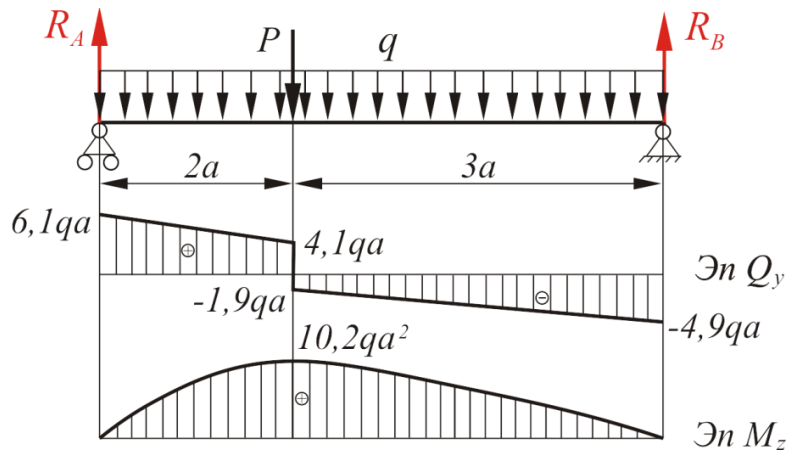


Рисунок 126 – Расчетная схема к примеру 9.2

Решение

Как и в примере 9.1 решение задачи начинается с определения внутренних усилий и построения их эпюр (см. рис. 126).

Выпишем из справочника сортамента геометрические характеристики для двутавра № 45: $W_z = 1231 \text{ см}^3$, $S_z = 708 \text{ см}^3$, $I_z = 27696 \text{ см}^4$, $d = 9 \text{ мм}$.

Из формулы (9.22) определим допускаемое значение максимального изгибающего момента:

$$[M_{z \max}] = W_z [\sigma] = 1231 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6 = 197 \cdot 10^3 \text{ Нм}.$$

Из эпюры внутреннего изгибающего момента определяем, что максимальный момент $M_{z \max} = 10,2qa^2$, следовательно,

$$10,2[q]a^2 = 197 \cdot 10^3,$$

откуда

$$[q] = \frac{197 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{10,2a^2} = 19,3 \text{ кН / м}.$$

Проверим прочность балки по максимальным касательным напряжениям, возникающим в точках нейтральной оси:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_{z \max}(y)}{I_z b(y)},$$

где $Q_{y \max} = 6,1[q]a = 6,1 \cdot 19,3 \cdot 1 = 117,7 \text{ кН}$.

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_{z \max}(y)}{I_z b(y)} = \frac{117,7 \cdot 10^3 \cdot 708 \cdot 10^3}{27696 \cdot 10^4 \cdot 9} = 33 \text{ МПа}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Плоский изгиб»

Задание 8. Расчет балки на прочность при плоском изгибе.

Вариант численного значения (табл. 12) назначается преподавателем, а вариант схемы – номер студента в списке группы.

Для консольной, либо шарнирно опертой балки (схема), нагруженной изгибающими моментами и поперечными нагрузками необходимо:

1. Определить опорные реакции.
 2. Составить аналитические выражения для внутренних силовых факторов (поперечных сил и изгибающих моментов) на всех участках балки.
 3. По полученным зависимостям построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
 4. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры поперечных сечений балки для трех вариантов:
 - а) двутавр;
 - б) круг;
 - в) прямоугольник, с соотношением сторон $h/b = 2$.
- Численные значения приведены в таблице 12.

Таблица 12 – Численные значения к заданию 8

Вариант	$P_1, \text{кН}$	$P_2, \text{кН}$	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$M_1, \text{кНм}$	$M_2, \text{кНм}$
1	10	80	10	70	15	90
2	20	70	15	80	25	80
3	30	60	20	90	35	70
4	40	50	25	60	45	50
5	50	40	30	50	55	40
6	60	30	35	40	65	30
7	70	10	40	30	75	20
8	80	20	45	20	85	50
9	10	50	55	50	95	10
10	20	70	65	20	90	30

Принять для всех балок следующие соотношения: $a = 1 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Схемы к заданию 8

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21

Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
Вариант 25	Вариант 26	Вариант 27
Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Сопротивление материалов» является базовой частью для всех общепрофессиональных дисциплин из цикла дисциплин по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и по специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства». Пособие посвящено методике расчета элементов конструкций в случае простых видов напряженно-деформированного состояния.

При написании учебного пособия автор преследовал цель максимально доступным для студентов языком раскрыть основное содержание указанных разделов дисциплины.

Для успешного освоения дисциплины «Сопротивление материалов» большое значение имеет приобретение практических навыков, заключающихся в умении использовать теоретические знания при решении прикладных задач. Учебное пособие содержит множество примеров решения задач, в том числе имеющих профессионально-направленный характер из области агроинженерии. Для закрепления учебного материала в пособие включены контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы студентов.

Навыки, приобретенные при решении задач сопротивления материалов, закладывают основы для дальнейшего изучения специальных дисциплин и являются первым шагом на пути к инженерной деятельности будущего бакалавра-агроинженера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов: учебник / под общ. ред. Г. С. Писаренко. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов: учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – Москва: Высшая школа, 2004. – 559 с.
3. Водопьянов, В. И. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами: учебное пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев. – Волгоград: Издательство Волжского государственного технического университета, 2012. – 136 с.
4. Ицкович, Г. М. Сопротивление материалов: учебник. – Москва: Высшая школа, 1987. – 352 с.
5. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / под ред. Г. С. Варданяна. – Москва: АСВ, 1995. – 568 с.
6. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов: учебник / В. И. Феодосьев. – Москва: Издательство Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.
7. Зацаринный, В. П. Атланты держат небо / В. П. Зацаринный, А. И. Акопов. – Москва: Знание, 1979. – 176 с.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ: ПРОСТЫЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Носкова Ольга Евгеньевна

Козлов Владимир Александрович

Полюшкин Николай Геннадьевич

Редактор М. М. Ионина

Электронное издание

Подписано в свет 23.05.2025. Регистрационный номер 114
Редакционно-издательская служба Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru