Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Р.М. Христинич, Е.В. Христинич

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Курс лекций
Часть 1

Электронное издание

Красноярск 2019

Рецензент
А.В. Заплетина, кандидат технических наук, доцент кафедры системоэнергетики

Христинич, Р.М.
Электротехника и электроника [Электронный ресурс]: курс лекций. Ч. 1 / Р.М. Христинич, Е.В. Христинич; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2019. – 64 с.

Издание содержит базовые темы, отражающие электротехнический подход к анализу электромагнитных устройств, применяемых в различных областях науки и техники. Составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины «Электротехника и электроника».

Предназначено для студентов направлений подготовки 19.03.02 «Продукты питания из растительного сырья», профиль «Технология хлеба, кондитерских и макаронных изделий»; 19.03.03 «Продукты питания животного происхождения», профиль «Технология мяса и мясных продуктов» всех форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Красноярского государственного аграрного университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Электротехника – отрасль науки и техники, связанная с применением электрических и магнитных явлений для преобразования энергии, получения и изменения химического состава веществ, производства и обработки материалов, передачи информации. Она охватывает вопросы получения, преобразования и использования электрической энергии в практической деятельности человека.

Электроникой называют область науки, техники и производства, в которой разрабатываются принципы производства и совершенствования электронных устройств, методы их инженерного расчета и технологического обеспечения, способы создания электронных систем.

Именно развитием электрической техники и электронных технологий обусловлен современный прогресс. Повсеместное использование электроэнергии, развитие электротехники и электроники требуют расширенных знаний не только специалистов в этой области, но и тех, чья профессиональная деятельность напрямую с нею не связана. Знания в области электротехники и электроники являются технологическими, так как имеют практическое применение, связаны с формами, методами и средствами преобразования энергии и оказывают влияние на различные уровни технологической грамотности и культуры.

Понимание процессов, происходящих в электротехнических устройствах, требует знания определенных разделов курсов математики и физики. Из курса математики студенты должны знать алгебру комплексных чисел, решение простейших дифференциальных уравнений, операции с векторами, свободно пользоваться соответствующим математическим аппаратом. Из курса физики студенты должны знать основные понятия и законы механики и электричества.

Тема 1 ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1 Основные понятия и определения

Электрической цепью называют совокупность устройств, предназначенных для получения, передачи, преобразования и использования электрической энергии.

Электрическую цепь называют *линейной*, если ни один параметр цепи не зависит от величины или направления тока или напряжения. Электрическая цепь является нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент. Параметры нелинейных элементов зависят от величины или направления тока, или напряжения.

Постоянный электрический ток – вид тока, величина и направление которого не изменяются с течением времени. За направление постоянного тока в замкнутой электрической цепи принимается направление от положительного полюса источника к его отрицательному полюсу по внешнему участку цепи, т.е. от «+» к «-».

Электрическая цепь состоит из отдельных устройств-элементов электрической цепи. Элементом электрической цепи называют идеализированное устройство, отображающее какое-либо из свойств реальной электрической цепи. Простейшая электрическая цепь состоит из источника, приемника и проводников. *Источниками* электрической энергии являются электрические генераторы, в которых механическая энергия преобразуется в электрическую, а также первичные элементы и аккумуляторы, в которых происходит преобразование химической, тепловой, световой и других видов энергии в электрическую.

К потребителям электрической энергии относятся электродвигатели, различные нагревательные приборы, световые приборы и другие устройства, в которых электрическая энергия преобразуется в световую, тепловую, механическую и другие виды энергии.

Передающие элементы цепи связывают источники и приемники. Кроме электрических проводов в это звено могут входить аппараты для включения и отключения цепи, приборы для измерения электрических параметров (амперметры, вольтметры), устройства защиты (предохранители), преобразующие устройства (трансформаторы) и др.

Электрической схемой называют изображение электрической цепи с помощью условных знаков. Схема замещения – схема, в которой реальные объекты и устройства замещаются идеализированными моделями, характеризующимися только одним параметром.

Простыми электрическими цепями называют цепи, содержащие один источник энергии.

Цепь, содержащая два и более источника, называется *сложной*. *Активным* участком цепи называется участок, содержащий источник электрической энергии, а участок, не содержащий источника, – *пассивным*. Простейшими пассивными элементами схемы замещения являются сопротивление, индуктивность и емкость. В реальной цепи электрическим сопротивлением обладают не только реостат или резистор, но и проводники, катушки, конденсаторы и т.д. Общим свойством всех устройств, обладающих сопротивлением, является необратимое преобразование электрической энергии в тепловую. Тепловая энергия, выделяемая в сопротивлении, полезно используется или рассеивается в пространстве. В схеме замещения во всех случаях, когда надо учесть необратимое преобразование энергии, включается сопротивление. На принципиальных схемах резистор рисуется в виде прямоугольника с двумя выводами и обозначается буквой R, поскольку основной параметр резистора – его сопротивление. Сопротивление измеряется в омах (Ом).

Ветвью называется участок электрической цепи, по которому проходит ток одного и того же значения и направления. *Узлом* называется место соединения трех и более ветвей. *Контуром* называют замкнутую электрическую цепь, образуемую одной или несколькими ветвями.

Источник ЭДС – источник электрической энергии, характеризирующийся электродвижущей силой E и внутренним электрическим сопротивлением $R_{вт}$. Идеальный источник ЭДС характеризуется нулевым внутренним сопротивлением $R_{вт}$=0 (рис. 1.1, а). Напряжение между выводами идеального источника ЭДС не зависит от тока, а его внешняя характеристика определяется выражением:

$$\boldsymbol{U=E=const.}$$

Внешней характеристикой источника питания называется зависимость напряжения на его выходе от тока, выдаваемого в цепь. Реальный источник ЭДС обладает небольшим сопротивлением. Внутреннее сопротивление $R_{вт}$ показывает, что часть энергии, вырабатываемой источником, остается внутри источника. Поэтому напряжение на выходах источника равно разности между ЭДС источника и падением напряжения на внутреннем сопротивлении и определяется по формуле

$$U=E-U_{вт}.$$

При напряжении $U=0$ ток источника равен току короткого замыкания (R=0). Единицей ЭДС является вольт (В). Стрелка источника показывает направление увеличения потенциала. *Источником тока* называется источник энергии, характеризующийся величиной тока и внутренней проводимостью. Идеальным называется источник тока, внутренняя проводимость которого равна нулю (рис. 1.1, б), т.е. большое внутреннее сопротивление. В идеальном случае, когда $R_{вн} >> R$, источник создает ток, не зависящий от сопротивления нагрузки, к которой он присоединен. Реальный источник тока – устройство, которое лишь старается поддерживать в цепи, к которой он подключен, ток заданного уровня, пока это позволяют его возможности (максимальный выходной ток и напряжение). У реальных источников внутреннее сопротивление имеет конечное значение.

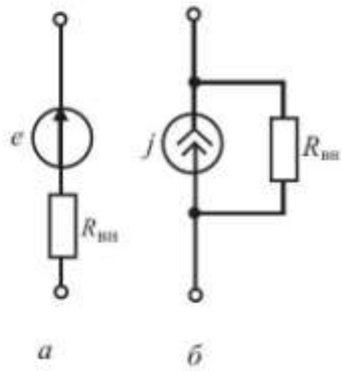


Рисунок 1.1 – Источники тока: а – идеальный источник ЭДС; б – идеальный источник тока

1.2 Закон Ома

1.2.1 Закон Ома для участка цепи

Соотношение между током I, напряжением U и сопротивлением $R_Н$ участка ab электрической цепи выражается законом Ома: *сила тока на участке цепи прямо пропорциональна напряжению, приложенному к этому участку, и обратно пропорциональна его сопротивлению* (рис. 1.2):

$$I=\frac{U_{ab}}{R},$$

где U_{ab} – напряжение или падение напряжения на резисторе R.

$$U_{ab} = R_H I \text{ , В.}$$

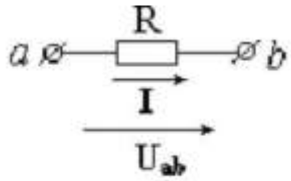


Рисунок 1.2 – Участок цепи

При расчете электрических цепей иногда удобнее пользоваться не сопротивлением R, а величиной, обратной сопротивлению, т.е. электрической проводимостью $G = \frac{1}{R}$. Проводимость выражают в сименсах (См).

1.2.2 Закон Ома для полной цепи

Закон Ома для всей цепи: сила тока в цепи прямо пропорциональна ЭДС источника:

$$I = \frac{E}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вн}})},$$

где E – электродвижущая сила источника электрической энергии, B; R – сопротивление внешней цепи, Ом; $R_{\text{вн}}$ – внутреннее сопротивление источника, Ом.

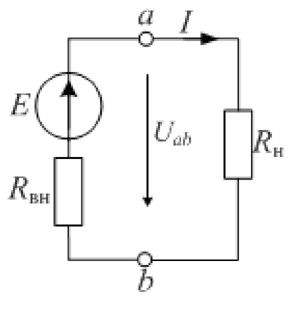


Рисунок 1.3 – Полная цепь

1.3 Эквивалентные преобразования. Методы расчета цепей постоянного тока

В зависимости от назначения электрической цепи ее элементы (источники, приемники, вспомогательные элементы) могут соединяться различным образом. Существует четыре основных вида соединений элементов: последовательное, параллельное, «треугольник», «звезда», смешанное. Расчет сложных схем упрощается заменой нескольких элементов одним эквивалентным. Участок цепи эквивалентен участку цепи, если напряжение на зажимах одинаковое (рис. 1.4, 1.5).

1.3.1 Последовательное соединение резистивных элементов

Последовательным называют такое соединение, при котором все элементы находятся в одной ветви. Заменим последовательно соединенные элементы одним эквивалентным элементом с сопротивлением $R_э$ (рис. 1.4).

Эквивалентное сопротивление электрической цепи, состоящей из *n* последовательно включенных элементов, равно сумме сопротивлений этих элементов. Через последовательно соединенные элементы протекает только один ток:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$
$$R_э = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$
$$I = U / R_э$$

Общий ток цепи определяем по закону Ома (рис. 1.4, 2).

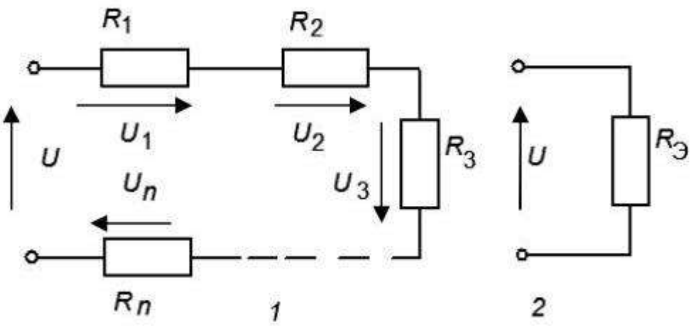


Рисунок 1.4 – Схема замещения цепи: 1 – с последовательным соединением пассивных элементов; 2 – эквивалентная схема

Недостаток последовательного включения элементов заключается в том, что при выходе из строя хотя бы одного элемента, прекращается работа всех остальных элементов цепи.

1.3.2 Параллельное соединение резистивных элементов

Параллельным называется соединение, при котором все участки цепи присоединяются к одной паре узлов, т.е. находятся под воздействием одного и того же напряжения.

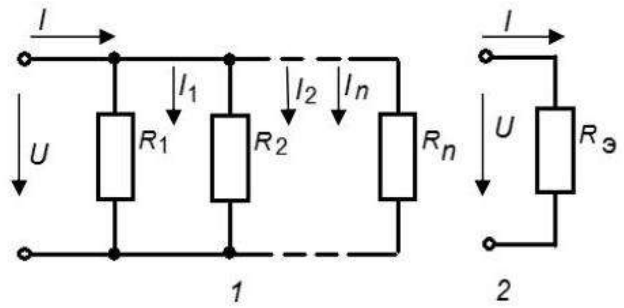


Рисунок 1.5 – Схема замещения цепи: 1 – с параллельным соединением пассивных элементов; 2 – эквивалентная схема

Ток в каждой ветви определяется напряжением и сопротивлением:

$$I_1 = \frac{U}{R_1};\ I_2 = \frac{U}{R_2};\ \ldots;\ I_n = \frac{U}{R_n}.$$

Условия эквивалентности будут соблюдены, если ток эквивалентной схемы будет равен току I в неразветвленной части цепи, т.е. $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.

В результате получаем:

$$\frac{U}{R_э} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n},$$

откуда получаем формулу для эквивалентного сопротивления:

$$\frac{1}{R_э} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

или для эквивалентной проводимости:

$$G_э = G_1 + G_2 + \ldots + G_n = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Эквивалентное сопротивление параллельно соединенных элементов обратно пропорционально эквивалентной проводимости:

$$R_{экв} = \frac{1}{G_{экв}},$$

поэтому оно всегда меньше наименьшего сопротивления цепи.

1.3.3 Смешанное соединение резистивных элементов

Смешанным называется такое соединение, при котором в цепи имеются группы параллельно и последовательно включенных сопротивлений. При наличии в цепи одного источника внешнюю по отношению к нему часть схемы можно в большинстве случаев рассматривать как смешанное (последовательно-параллельное) соединение резистивных элементов.

Для расчета такой цепи удобно преобразовать ее схему замещения в эквивалентную схему с последовательным соединением резистивных элементов (рис. 1.6).

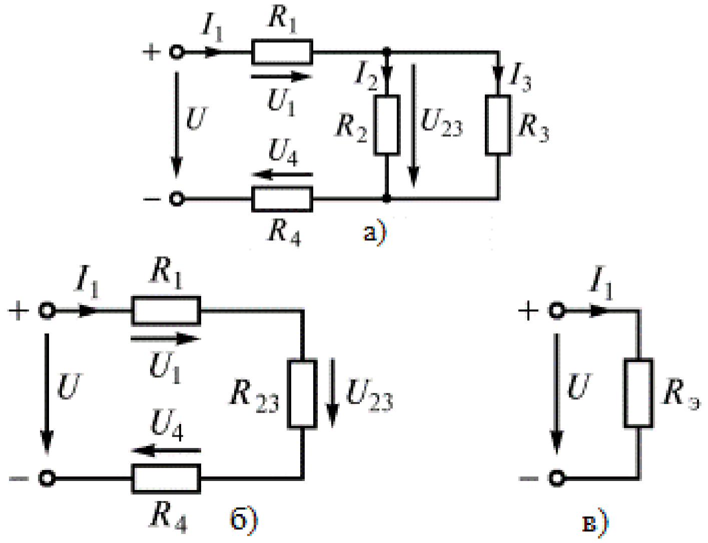


Рисунок 1.6 – Схема замещения цепи со смешанным соединением пассивных элементов

После замены параллельного соединения резистивных элементов эквивалентным резистивным элементом с сопротивлением:

$$\boldsymbol{R_{23} = \frac{1}{G_{23}}},$$

$$\boldsymbol{G_{23} = G_2 + G_3 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} += \frac{R_3 + R_2}{R_2 R_3}}$$

получается эквивалентная схема с последовательным соединением трех резистивным элементов, R_1, R_4 и R_{23} (рис. 1.6, б).

$$R_э = R_1 + R_{23} + R_4.$$

Ток в неразветвленной части:

$$I_1 = \frac{U}{R_э}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_1}, \qquad I_3 = \frac{U_{23}}{R_3},$$

где

$$U_{23} = R_{23} I_1.$$

1.3.4 Соединение резистивных элементов по схемам «треугольник» и «звезда»

В некоторых сложных электрических цепях встречаются соединения элементов, которые нельзя отнести к перечисленным выше. Типичным примером подобной сложной цепи является мостовая цепь (рис. 1.7, а), в которой резистивные элементы R_1, R_2, R_5 и R_4, R_3, R_5 образуют соединение, называемое треугольником.

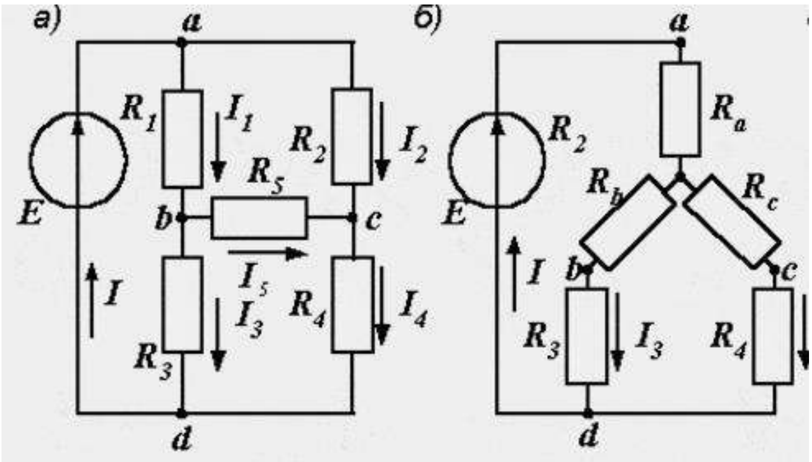
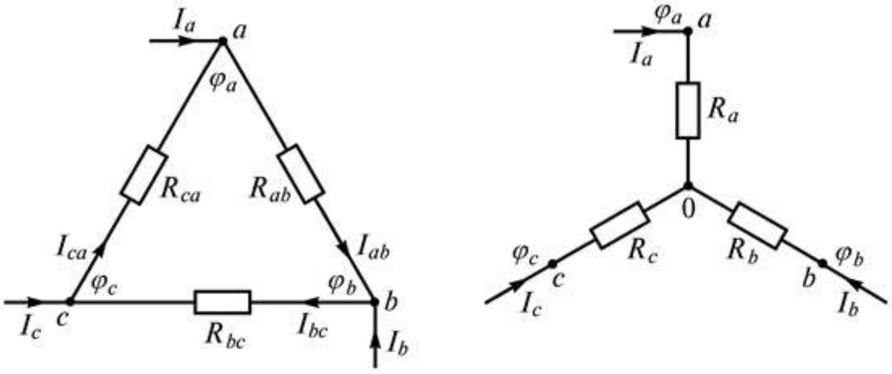


Рисунок 1.7 – Схема четырехплечевого моста: а – схема замещения мостовой цепи; б – эквивалентная схема замещения

Треугольник *abc* (R_1, R_2, R_5) преобразуют в вид, представленный на рисунке 1.8, а, заменяя цифровые индексы сопротивлений на буквенные (*ab, bc, ca*), отвечающие обозначениям соответствующих узлов. В этом случае часть цепи образует «треугольник», вершинами которого являются три узла (*a, b, c*), а сторонами – три ветви с сопротивлениями R_{ab}, R_{bc}, R_{ca}, включенных между этими узлами.



а б

Рисунок 1.8 – Соединение резистивных элементов: а – треугольником; б – звездой

Расчет такой цепи удобно проводить, используя эквивалентную замену трех ветвей, соединенных «треугольником», тремя ветвями, соединенными трехлучевой «звездой» (рис. 1.8, б). При замене соединения «треугольником» ветвей с сопротивлениями R_{ab}, R_{bc}, R_{ca} ветвями с сопротивлениями R_a, R_b, R_c, соединенных «звездой», мостовая цепь преобразовывается в цепь с последовательным и параллельным соединением элементов (рис. 1.8, б):

$$\boldsymbol{R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}},$$

$$\boldsymbol{R_b = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}},$$

$$\boldsymbol{R_c = \frac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}}.$$

В ряде случаев схему соединения ветвей «звездой» целесообразно преобразовывать в схему соединения ветвей «треугольником»:

$$\boldsymbol{R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_aR_b}{R_c}},$$

$$\boldsymbol{R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_bR_c}{R_a}},$$

$$\boldsymbol{R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_cR_a}{R_b}}.$$

1.4 Законы Кирхгофа

1.4.1 Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \pm I_k = 0,$$

где n – число ветвей, сходящихся в узле.

Первый закон Кирхгофа говорит о том, что в любой момент времени количество электрических зарядов, направленных к узлу, равно количеству зарядов, направленных от узла, откуда следует, что электрический заряд в узле не накапливается. До написания уравнения по первому закону Кирхгофа необходимо задать условные положительные направления токов в ветвях, обозначив эти направления на схеме стрелками. Токи, направленные к узлу, записывают с одним знаком (например, с плюсом), а токи, направленные от узла, – с противоположным знаком (минусом).

1.4.2 Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжений на всех элементах любого контура электрической цепи равна 0:

$$\sum_{k=1}^{m} \pm U_k = 0$$

При записи уравнения задаемся направлением обхода контура. Если направление обхода контура совпадает с положительным направлением напряжения, ЭДС или тока, то оно учитывается в уравнении со знаком «плюс», а если не совпадает – со знаком «минус». В частности, для контура, содержащего только источники ЭДС и резистивные элементы, алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС:

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \pm \mathbf{U_k} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \pm \mathbf{E_k},$$

где n – число ЭДС в контуре; m – число элементов с сопротивлением R_k в контуре. Например, для замкнутого контура схемы (рис. 1.9):

$$E_1 - E_2 + E_3 = I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 - I_4R_4$$

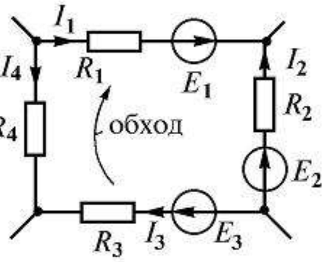


Рисунок 1.9 – Замкнутый контур схемы

1.5 Расчет сложных электрических цепей

По номинальным значениям напряжений и токов элементов цепи осуществляется выбор проводов, элементов защиты и других элементов электрической цепи. При анализе цепей с несколькими источниками используют различные методы: контурных токов, суперпозиции, наложения, узлового напряжения, эквивалентного генератора и метод непосредственного применения законов Кирхгофа.

1.5.1 Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

Алгоритм решения

1. Произвольно выбрать условные положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме указательными стрелками.

2. Выбрать направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа (удобнее, если все – по часовой стрелке).

3. Определить число узлов (k) и ветвей (m).

4. Общее число уравнений должно быть равно числу неизвестных токов или числу ветвей m. Из них по первому закону Кирхгофа составить $k - 1$ уравнений, где k − число узлов схемы. Токи, направленные к узлу, принимают как «условно положительные», перед ними ставят знак «+», направленные от узла, считают «условно отрицательными» − знак «−».

5. Определить число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа по формуле $m - (k - 1)$ независимых уравнений. Уравнения по второму закону Кирхгофа необходимо составить для контуров так чтобы в каждый следующий контур входила хотя бы одна ветвь, не вошедшая в другие контуры, для которых уже записаны

уравнения. При обходе контура в выбранном направлении электродвижущая сила записывается со знаком «+», если ее направление совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «–» – в противоположном случае. Падение напряжений *RI* записывают со знаком «+», если направление обхода ветви совпадает с положительным направлением тока, и со знаком «–» – в противоположном случае.

6. Составить систему уравнений, решив которые при заданных сопротивлениях и электродвижущих силах, можно найти необходимые токи. Если численное значение какого-либо тока получается отрицательным, то это означает, что его действительное направление противоположно выбранному положительному.

7. Проверить правильность решения, составив баланс мощности. Если положительное направление тока совпадает с направлением электродвижущей силы, то источник вырабатывает электрическую энергию. Если получено отрицательное значение тока, то произведение *EI* отрицательное, т.е. источник работает в режиме потребителя и является приемником электрической энергии.

1.5.2 Метод контурных токов

Метод контурных токов позволяет уменьшить число совместно-решаемых уравнений до $K=m\text{-}k+1$ и основан на применении второго закона Кирхгофа.

Алгоритм решения

1. Выбрать $K=m–k+1$ независимых контуров и положительных направлений так называемых контурных токов, каждый из которых протекает по всем элементам соответствующего контура. Для планарных схем, т.е. допускающих изображение на плоскости без пересечения ветвей, достаточным условием выделения K-независимых контуров является наличие в каждом из них хотя бы одной ветви, принадлежащей только этому контуру.

2. Для K-независимых контуров составить уравнения по второму закону Кирхгофа, совместное решение которых определяет все контурные токи.

3. Ток каждой внешней ветви определить по первому закону Кирхгофа как алгебраическую сумму контурных токов в соответствующей ветви. Токи во внешних ветвях равны контурным.

Контрольные вопросы

1. Назвать основные элементы цепи и объяснить их назначение.

2. Что называют электрической схемой электрической цепи? Объяснить физический смысл элементов схем замещения.

3. Какие виды энергии преобразуют источники электрической энергии? Назвать и объяснить основные характеристики источника.

4. В чем отличие активного и пассивного участков цепи?

5. Что называют ветвью, узлом, контуром в электрической цепи?

6. Какие идеальные источники энергии вы знаете?

7. Какой ток называют постоянным?

8. Какую электрическую цепь называют линейной?

9. Назвать пассивные элементы электрической цепи.

10. Перечислить и объяснить основные свойства последовательного и параллельного соединений элементов электрической цепи.

11. Если пять резисторов соединить последовательно, каким будет ток в пятом резисторе?

12. Если пять резисторов соединить параллельно, каким будет напряжение во втором резисторе?

13. Закон Ома.

14. Начертить электрическую схему с одним источником напряжения и тремя резисторами, соединенными параллельно. Каково будет эквивалентное сопротивление приемника?

15. Какое явление приводит к увеличению сопротивления металлического проводника?

16. В чем суть метода эквивалентных преобразований при смешанном соединении элементов?

17. Как определить эквивалентное сопротивление цепи при параллельном и последовательном соединении резисторов?

18. Сформулировать первый закон Кирхгофа.

19. Объяснить второй закон Кирхгофа на примере.

20. Почему при расчете цепи, содержащей n узлов, можно составить по первому закону Кирхгофа только n -1 уравнений?

21. В чем преимущество метода контурных токов по сравнению с методом непосредственного применения законов Кирхгофа?

22. От чего зависит число уравнений, составляемых при расчете цепи методом контурных токов?

23. По каким соображениям выбираются направления токов в ветвях исходной цепи? Как уточняются эти направления?

24. Может ли направление тока в ветви с ЭДС быть противоположным направлению этой ЭДС?

25. Назвать алгоритм расчета методом непосредственного применения законов Кирхгофа.

26. В чем состоит метод контурных токов?

Тема 2 ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ ПЕРМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2.1 Способы представления гармонических функций

Под переменными токами понимают любые токи, величина которых меняется с течением времени. Если кривая изменения периодического тока описывается синусоидой, то ток называют синусоидальным (рис. 2.1).

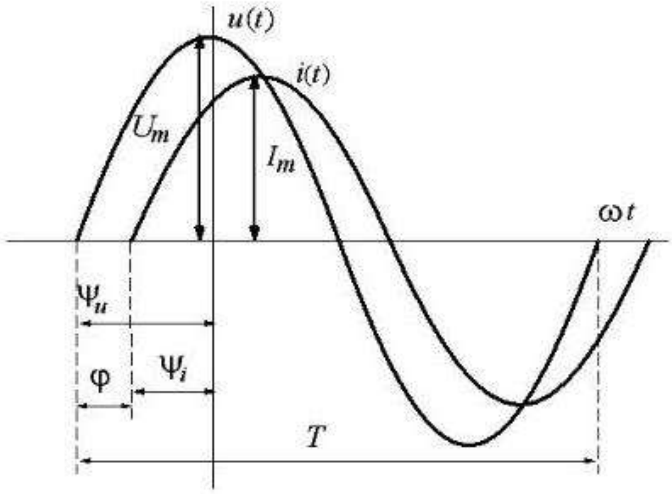


Рисунок 2.1 – Временная диаграмма тока и напряжения

Периодически изменяющаяся величина характеризуется периодом T – минимальным интервалом времени, по истечении которого значение данной величины повторяется. Измеряется период в секундах. Число периодов изменения электрической величины в секунду характеризует ее частоту: $f = {}^{1}/_{T}$. Частота выражается в герцах (Гц).

Промышленная сеть в России имеет частоту 50 Гц. Среди периодических величин наибольшее распространение получили синусоидальные ЭДС, напряжения и токи, которые можно представить в аналитическом виде:

$$\boldsymbol{i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)},\ \text{e}= \boldsymbol{E_m \sin(\omega t + \psi_e)},\ \boldsymbol{u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)},$$

где $\boldsymbol{i(e,u)}$ – мгновенное значение синусоидального тока (ЭДС, напряжения), т.е. значение в рассматриваемый момент времени; $\boldsymbol{I_m}$ $(\boldsymbol{E_m}, \boldsymbol{U_m})$ – амплитуда синусоидального тока (ЭДС, напряжения)- наибольшее из мгновенных значений; $(\boldsymbol{\omega t + \psi})$ – аргумент синусоидального тока (ЭДС, напряжения), называемый фазовым углом или фазой и отсчитываемый от точки перехода синусоидальной функции через нуль к положительному значению:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi t = {}^{2\pi}/_{T}},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая частота, характеризующая скорость изменения фазы синусоидального тока (ЭДС, напряжения) и выражается в радианах в секунду (рад/с или 1/с); $\boldsymbol{\psi_i}$ ($\boldsymbol{\psi_e, \psi_u}$) – начальная фаза синусоидального тока (ЭДС, напряжения)(фаза в начальный момент времени t=0), которая является алгебраической величиной и может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Начальную фазу синусоиды отсчитывают от начала синусоиды до начала отсчета времени (t=0). При таком порядке отсчета положительная начальная фаза направлена в положительную сторону оси абсцисс, а отрицательная – в обратную сторону.

Алгебраическая величина, равная разности начальных фаз двух синусоидальных функций, называется сдвигом фаз – $\boldsymbol{\varphi}$. На рисунке 2.1 изображен сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\boldsymbol{\varphi = \psi_u - \psi_i}.$$

В зависимости от значений начальных фаз и их знаков сдвиг фаз может быть как положительным, так и отрицательным. Положительное значение $\boldsymbol{\varphi}$ указывает на то, что напряжение опережает по фазе ток; отрицательное значение – напряжение отстает по фазе от тока.

Все измерительные приборы переменного тока показывают действующие значения. Технические данные электротехнических устройств указываются в действующих значениях. В записи для действующих значений по соглашению используют прописные буквы без индекса, подчеркивая тем самым сходство этих понятий с аналогами на постоянном токе. Для любой из синусоидальных величин действующее значение можно получить, зная амплитуду:

$$\boldsymbol{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}.$$

Представление синусоидальных функций при помощи вращающихся векторов наглядно показывают количественные и фазовые соотношения в цепях синусоидального тока. При вращении векторов с общей угловой скоростью их взаимное положение зависит не от начальных фаз, а от углов сдвига фаз. Масштабы векторов выбирают так чтобы длина вектора соответствовала действующему значению или амплитуде. Углы наклона от оси абсцисс против часовой стрелки равны начальным фазам. Если $\psi_u > \psi_i$, то $\varphi > 0$ и напряжение опережает ток по фазе на угол сдвига фаз. В противном случае $\varphi < 0$, и напряжение отстает по фазе от тока.

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные величины (ток, напряжение, ЭДС) одной и той же частоты, называют векторной диаграммой (рис. 2.2). Вращающиеся векторы обозначают заглавной буквой с точкой над ней.

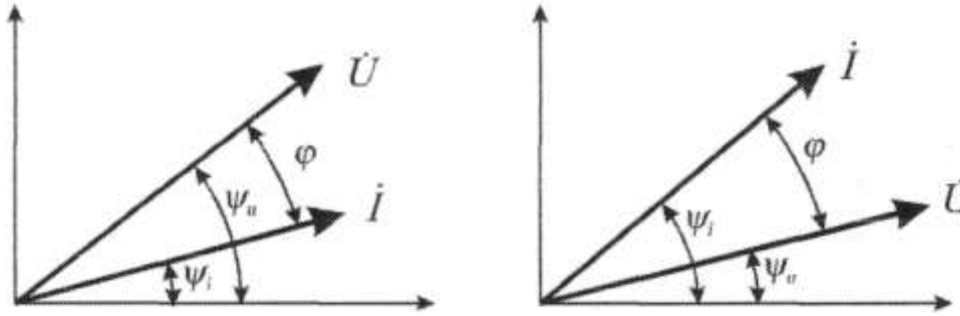


Рисунок 2.2 – Векторная диаграмма тока и напряжения

Но векторные диаграммы дают только графическое решение задачи.

Синусоидальные функции можно представить в виде комплексного числа и на комплексной плоскости, с осями координат +1 − ось действительных чисел и $+j$ − ось мнимых чисел; $\boldsymbol{j = \sqrt{-1}}$ – мнимая единица (рис. 2.3).

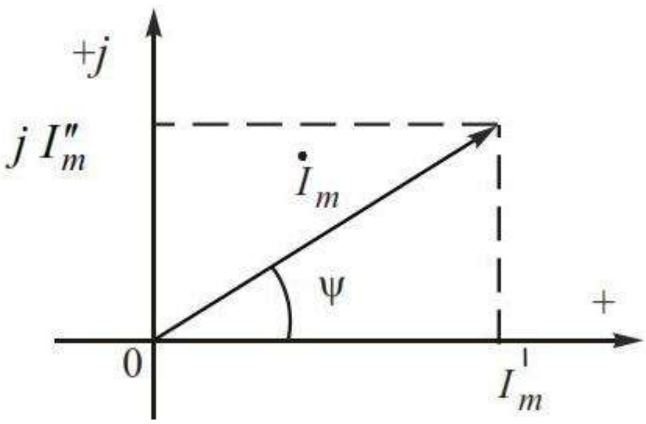


Рисунок 2.3 – Вектор тока на комплексной плоскости

Вектору на комплексной плоскости можно сопоставить комплексное число: $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$. Величину характеризуют модулем комплекса I_m, положение на комплексной плоскости – аргументом комплекса ψ, e – основание натурального логарифма. Множитель вида $e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$ играет исключительно важную роль в анализе цепей переменного тока. Он называется *оператором поворота* и представляет собой единичный вектор, развернутый относительно вещественной оси на угол ψ. Название оператора связано с тем, что умножение на него любого вектора приводит к развороту последнего на угол ψ. Такую форму записи комплексного числа в математике называют показательной. Ее можно использовать для умножения и деления комплексных чисел. Складывать и вычитать в такой форме записи нельзя, переходят к так называемой алгебраической форме. Для этого раскладывают вектор на проекции по осям координат: действительную $I_m^{'}$ и мнимую $jI_m^{''}$: $\dot{I}_m = I_m^{'} + jI_m^{''}$.

Переход от одной формы записи к другой делают по формулам, полученным из решения треугольника (рис. 2.3):

$$\boldsymbol{I_m = \sqrt{I_m{}^{'2} + I_m{}^{''2}}; \quad \psi = arctg\,\frac{I_m^{''}}{I_m^{'}};}$$
$$\boldsymbol{I_m^{'} = I_m \cos\psi; I_m^{''} = I_m \sin\psi.}$$

Применение законов Ома и Кирхгофа предполагает использование понятия «направление»: направление протекания тока, направление действия ЭДС, направление по отношению к узлу и др. Но в цепях переменного тока все величины (ЭДС, напряжения и токи) дважды за период меняют свои направления. Поэтому для них используют понятие «положительное направление», т.е. направление, соответствующее положительным мгновенным значениям определяемой величины. При изменении выбора направления начальная фаза синусоидальной величины изменяется на π. Следовательно, комплексные значения величин могут быть определены только с учетом выбора положительного направления. Для пассивного элемента положительное направление можно выбрать произвольно только для одной из величин – тока или напряжения. Направление второй величины должно совпадать с направлением первой, иначе будут нарушены фазовые соотношения между ними, вытекающие из физических процессов преобразования энергии. Положительное направление действия ЭДС считается заданным. Оно указывается стрелкой в условном обозначении и относительно этого направления определяется ее начальная фаза. Для анализа количественных и фазовых соотношений величин на переменном токе на комплексной плоскости строят векторы, соответствующие режиму работы электрической цепи. Такая совокупность векторов называется *векторной диаграммой*.

Метод расчета цепей синусоидального тока при помощи комплексных чисел называют символическим. В цепях переменного тока с несколькими ветвями и элементами практически невозможно выполнить анализ режима работы, если основные величины будут представлены синусоидальными функциями, так как при этом получаются сложные тригонометрические уравнения. В случае представления функций и параметров цепи комплексными числами математическое описание сводится к линейным алгебраическим уравнениям, решение которых не вызывает затруднений. Метод расчета цепей переменного тока, основанный на таком способе алгебраизации, называется *комплексным (символическим) методом*.

Алгоритм применения метода

1. Представление всех величин и параметров цепи комплексными числами. Здесь для облегчения задачи целесообразно составление расчетной схемы электрической цепи, на которой все данные указаны в комплексной форме.

2. Определение искомых величин любым методом, известным из теории цепей постоянного тока.

3. Преобразование (если требуется) полученных величин в форму представления их синусоидальными функциями времени.

2.2 Приемники в схемах замещения цепей синусоидального тока

2.2.1 Идеализированный резистивный элемент в цепи переменного тока

В цепях переменного тока выделяют три вида сопротивлений: активное, реактивное и полное. Активным называют сопротивление резистивного элемента, которое не зависит от частоты.

Резистивный элемент (рис. 2.4) обладает сопротивлением *r*, которое измеряют в омах (Ом).

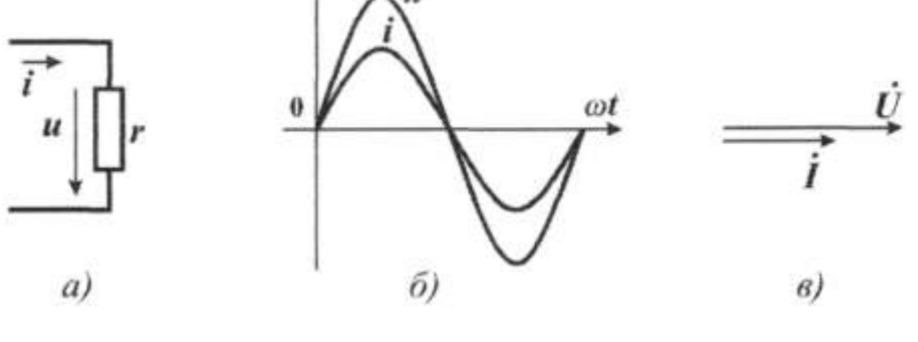


Рисунок 2.4 – Схема замещения: а – временная; б – векторная; в – диаграммы

Если ток, текущий по сопротивлению на рисунке 2.4,а, задан выражением

$$i = I_m \sin\omega t,$$

то напряжение на этом сопротивлении изменяется по закону:

$$u = U_m \sin\omega t.$$

Ток и напряжение резистивного элемента совпадают по фазе.

Ток в цепи определяется по закону Ома:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{Um \sin\omega t}{R}.$$

Мгновенная мощность – произведение мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = ui = U_m I_m \sin^2\omega t = \frac{U_m I_m (1 - \cos 2\omega t)}{2} = UI(1 - \cos 2\omega t).$$

Круговой косинус не может быть больше единицы, т.е. выражение в квадратной скобке не может быть меньше нуля. Мгновенная мощность резистивного элемента всегда положительная и меняется с удвоенной частотой.

Среднее значение мощности за период называют активной мощностью P. Для резистивного элемента:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = \frac{1}{T}\int_0^T UI\,(1 - \cos 2\omega t) dt = UI.$$

Активная мощность в цепи, содержащей только R-элемент, равна произведению действующих значений напряжения и тока. Измеряют активную мощность в ваттах (Вт).

2.2.2 Идеализированный индуктивный элемент (катушка индуктивности) в цепи переменного тока

В цепи с идеальной катушкой происходит непрерывное колебание (обмен) энергии между источником и магнитным полем катушки без затраты энергии источника. Индуктивная катушка обладает индуктивностью. Индуктивность L – коэффициент, характеризующий способность тока создавать магнитный поток:

$$\boldsymbol{L = \frac{d\psi}{di}},$$

где ψ – потокосцепление, равное произведению числа витков катушки на магнитный поток.

Индуктивность измеряют в генри (Гн).

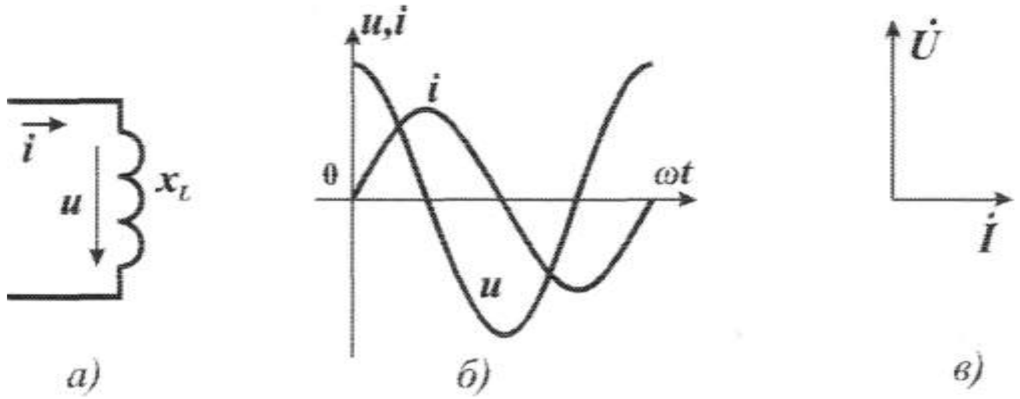


Рисунок 2.5 – Схема замещения цепи: а – с индуктивным элементом; б – временная; в – векторная

Индуктивные катушки и конденсаторы оказывают сопротивление протекающим по ним переменным токам. В этих сопротивлениях не происходит превращения электрической энергии в тепловую. Поэтому в отличие от активных сопротивлений их называют реактивными. Реактивное сопротивление индуктивной катушки называется индуктивным сопротивлением, обозначается X_L, и вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{X_L = \omega L,\ Ом},$$

где L – индуктивность катушки.

Закон Ома для действующих значений:

$$\boldsymbol{I = \frac{U_L}{X_L}}.$$

Согласно закону Фарадея магнитный поток, создаваемый током в катушке, наводит ЭДС самоиндукции, которая в соответствии с законом Ленца препятствует движению тока. Поэтому, чтобы через проводники все время тек ток, необходимо к проводникам прикладывать компенсирующее напряжение $u_L = -e_L$. Индуктивный элемент учитывает ЭДС самоиндукции, которая пропорциональна скорости изменения потокосцепления и мешает этому изменению:

$$\boldsymbol{e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -W\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})},$$

где W – число витков катушки; Φ – магнитный поток (в СИ единицей магнитного потока является вебер (Вб).

Вектор напряжения идеальной катушки опережает по фазе вектор тока на угол сдвига фаз $\frac{\pi}{2}$. В цепи с идеальной катушкой происходит непрерывное колебание (обмен) энергии между источником и магнитным полем катушки без затраты энергии источника.

Мгновенная мощность индуктивного элемента:

$$\boldsymbol{p = ui = U_m I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) sin\omega t = \frac{U_m I_m}{2} sin2\omega t = UIsin2\omega t}.$$

Мощность меняется с удвоенной частотой и является знакопеременной. При p>0 энергия от источника поступает в индуктивную катушку и запасается в ее магнитном поле. При p<0 энергия возвращается в сеть.

Для оценки мощности реактивных элементов вводят понятие реактивной мощности, которая в среднем за период равна нулю, но в течение четверти периода меняет свой знак на противоположный, т.е. имеет место процесс колебания энергии, но необратимых преобразований энергии нет. Мощность колеблющейся энергии называют реактивной и обозначают Q:

$$\boldsymbol{Q = UIsin\varphi}.$$

Амплитудное значение мгновенной мощности в цепи с идеальной катушкой называют реактивной индуктивной мощностью, ее математическая модель имеет вид:

$$\boldsymbol{Q_L = U_L I = X_L I^2}.$$

Реактивная мощность измеряется в варах (вольт-ампер реактивный).

2.2.3 Идеализированный емкостной элемент в цепи переменного тока

Емкостный элемент (колебательный контур, фильтр, конденсатор) вводится в схему замещения реальной цепи переменного тока, если необходимо учесть влияние переменного электрического поля элементов цепи. Синусоиды тока и напряжения, а также их векторная диаграмма приведены на рисунке 2.6.

Идеализированный конденсатор обладает только емкостью C (рис. 2.6), единица измерения фарад (Ф).

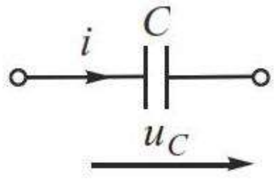


Рисунок 2.6 – Синусоиды тока и напряжения и векторная диаграмма

В конденсаторе накапливается энергия электрического поля. Этот параметр является коэффициентом пропорциональности между зарядом q и прикладываемым напряжением u: $q = Cu.$ При изменении напряжения на конденсаторе изменяется заряд и возникает электрический ток:

$$\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}}.$$

Это закон Ома для мгновенных значений.

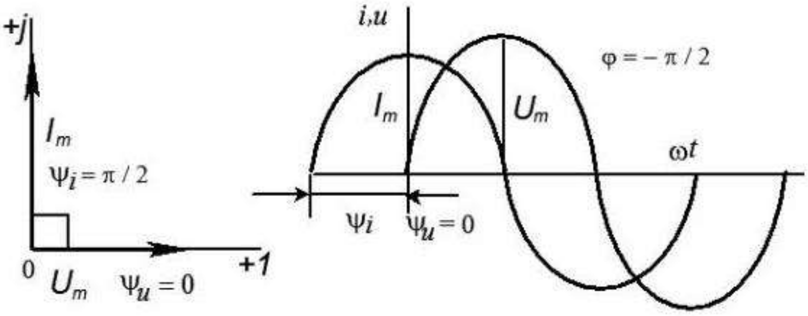
Пусть напряжение источника изменяется по закону:

$$\boldsymbol{u = U_m sin\omega t.}$$

В цепи возникает ток:

$$\boldsymbol{i = C\frac{du}{dt} = \omega C U_m cos\omega t = I_m \sin(\omega t + {}^{\pi}/_{2}}).$$

На идеальной емкости (активное сопротивление отсутствует) вектор тока опережает напряжение на 90° (рис. 2.7, б).



а б

Рисунок 2.7 – Диаграммы: а – временная; б – векторная

Амплитуда тока: $I_m = \omega C U_m$, действующее значение:

$$\boldsymbol{I = \omega C U = \frac{U}{1/\omega C}}.$$

Это выражение представляет закон Ома. Величину $1/_{\omega C}$ называют емкостным сопротивлением конденсатора и измеряют в Ом.

Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте источника питания и емкости конденсатора:

$$\boldsymbol{X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}}.$$

Емкостное сопротивление имеет место только в том случае, когда происходит изменение напряжения на обкладках конденсатора. При постоянном напряжении емкостное сопротивление равно бесконечности, т.е. в цепи будет разрыв.

Мгновенная мощность емкостного элемента:

$$\boldsymbol{p = ui = U_m I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) sin\omega t = \frac{U_m I_m}{2} sin2\omega t = UIsin2\omega t}.$$

Амплитудное значение мгновенной мощности называют реактивной емкостной мощностью Q, Вар:

$$\boldsymbol{Q_C = UI = X_C I^2}.$$

На идеальной емкости активная мощность не выделяется. Конденсатор заряжается (накопление энергии в электрическом поле конденсатора) за счет энергии, поступающей от источника питания. Конденсатор разряжается, мощность при этом становится отрицательной, энергия возвращается обратно в цепь.

2.3 Анализ цепи с последовательным соединением активного, индуктивного и емкостного элементов

2.3.1 Основные законы

Анализ и расчет цепей переменного синусоидального тока осуществляются с помощью уравнений электрического состояния, составленных по законам Кирхгофа в векторной или комплексной форме. Соответственно можно говорить либо о геометрической сумме токов, напряжений и мощностей, либо об алгебраической сумме их комплексов. В цепях переменного тока закон Ома выполняется для всех значений, а законы Кирхгофа – только для мгновенных и комплексных, которые учитывают фазные соотношения.

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

либо алгебраическая сумма комплексных значений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на приемниках в контуре равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС, действующих в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{l} e_j$$

либо алгебраическая сумма комплексных значений напряжений на приемниках в контуре равна алгебраической сумме комплексных значений ЭДС в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^{m} \dot{U}_i = \sum_{j=1}^{l} \dot{E}_j .$$

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, содержащей катушку индуктивности с параметрами L, R и конденсатор с параметром C (рис. 2.8).

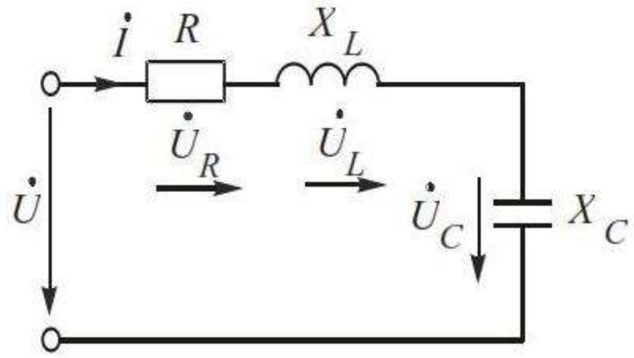


Рисунок 2.8 – Схема замещения последовательной цепи R, L, C

Напряжение на входе цепи определяется по второму закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot{\boldsymbol{U}}=\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{L}}+\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{C}}.$$

Подставим в это уравнение значения напряжений, выраженные по закону Ома:

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L}}\dot{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{I}} = [\boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{C}})]\dot{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{I}},$$

где $\underline{\boldsymbol{Z}}$ – комплексное сопротивление цепи:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}((\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{C}}) = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{X},$$

где $\boldsymbol{R}$ – активное сопротивление, X – реактивное сопротивление.

Закон Ома в комплексной форме для цепи с последовательным соединением приемников:

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{I}}.$$

Реактивное сопротивление X может быть положительным и отрицательным. $X>0$, если $X_L > X_C$. В этом случае цепь имеет индуктивный характер. Реактивное сопротивление $X<0$, если $X_L < X_C$. Тогда цепь имеет емкостный характер.

2.3.2 Построение векторной диаграммы. Треугольники сопротивлений и мощностей

На рисунке 2.9 все сопротивления соединены последовательно, поэтому за основу для построения векторной диаграммы можно принять ток, являющийся общим элементом для сопротивлений. В произвольном направлении в определенном масштабе откладывают вектор тока I (рис. 2.9). Известно, что вектор напряжения на активном сопротивлении совпадает с током по фазе, поэтому откладывают в выбранном масштабе вектор $\dot{U}_R$ с совпадающим по направлению с током. Напряжение на резисторе совпадает с током по фазе. Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на 90°, на емкостном – отстает на 90°.

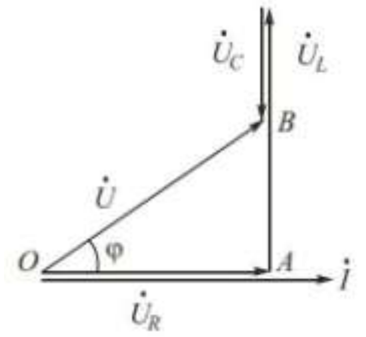


Рисунок 2.9 – Векторная диаграмма для нагрузки индуктивного характера

Если разделить все стороны треугольника напряжений на ток I, получим подобный ему треугольник сопротивлений (рис. 2.10), где Z – полное сопротивление цепи, R – активное сопротивление, X – реактивное сопротивление, $\boldsymbol{X_L}$ – индуктивное сопротивление; $\boldsymbol{X_C}$ – емкостное сопротивление. Закон Ома для действующих значений: $U=ZI$.

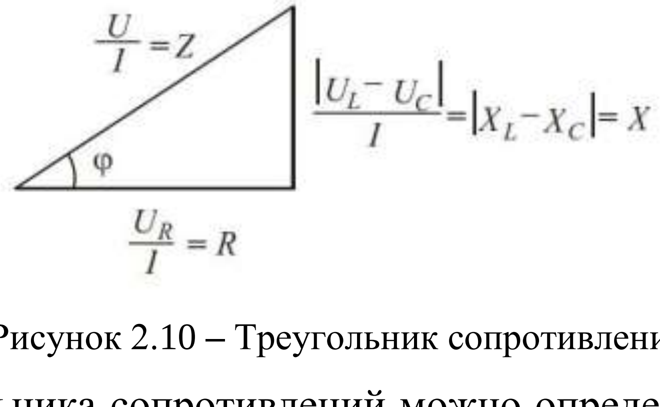


Рисунок 2.10 – Треугольник сопротивлений

Из треугольника сопротивлений можно определить модуль полного сопротивления и угол $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{R^2+X^2}}\ ;\quad \boldsymbol{\varphi=arctg\frac{X}{R}};$$

$$\boldsymbol{R=Zcos\varphi};\quad \boldsymbol{X=Zsin\varphi}.$$

Знак угла $\boldsymbol{\varphi}$ зависит от характера нагрузки: плюс соответствует индуктивной нагрузке, минус – емкостной.

Умножением всех сторон треугольника напряжений на ток получаем треугольник мощностей (рис. 2.11). Активная мощность характеризует энергию, которая передается в одном направлении от генератора к приемнику. Она связана с резистивными элементами:

$$\boldsymbol{P = U_R I = RI^2 = UIcos\varphi}.$$

Реактивная мощность определяется выражением:

$$\boldsymbol{Q = |U_L - U_C| I = UIsin\varphi = XI^2}.$$

Она характеризует интенсивность колебательного обмена энергией между источником и реактивными элементами приемника без ее преобразования.

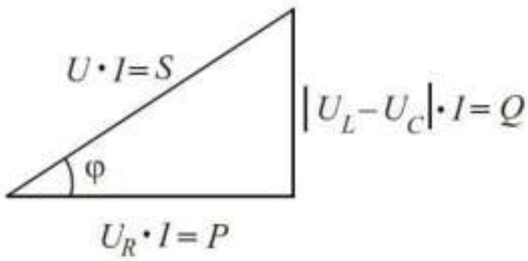


Рисунок 2.11 – Треугольник мощностей

Полная мощность определяется выражением

$$\boldsymbol{S = UI = ZI^2}.$$

Она характеризует амплитуду колебания мощности в цепи, измеряют полную мощность в вольт-амперах (ВА). Полная мощность не имеет физического смысла, но ее можно определить как максимально возможную активную мощность, т.е. активную мощность при $\boldsymbol{\cos\varphi = 1}$. Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности:

$$\boldsymbol{\frac{P}{S} = \cos\varphi}.$$

Для лучшего использования оборудование должно работать с возможно более высоким коэффициентом мощности. Разработчики электроустановок стремятся обеспечить его максимальное значение. Но коэффициент мощности многих устройств, таких как трансформаторы, электродвигатели и др., сильно зависит от величины нагрузки. При снижении нагрузки он снижается, поэтому при эксплуатации оборудования нужно обеспечивать нагрузку близкую к номинальной. Кроме того, коэффициент мощности потребителей электрической энергии можно улучшить установкой конденсаторов и компенсаторов реактивной мощности. Высокий коэффициент мощности нагрузки нужен также для снижения потерь при передаче энергии.

2.3.3 Резонанс напряжений

Резонанс – явление в электрической цепи, содержащей участки, имеющие индуктивный и емкостной характер, при котором разность фаз напряжения и тока на входе цепи равна нулю, следовательно, $cos\varphi = 1$. Резонанс напряжений возникает в электрической цепи с последовательным соединением индуктивного и емкостного элементов. Условие резонанса напряжений: входное реактивное сопротивление X равно нулю.

Рассмотрим режим резонанса для цепи, схема замещения которой представлена на рисунке 2.8:

$$\boldsymbol{X = X_L - X_C = 0},$$

тогда $\boldsymbol{X_L = X_C}$.

При резонансе

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{рез}}\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\omega_0 C}},$$

тогда $\boldsymbol{LC\omega^2 = 1}$.

Угловая резонансная частота равна

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{рез}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{LC}}}.$$

Частота равна:

$$\boldsymbol{f}_{\text{рез}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}\sqrt{\boldsymbol{LC}}}.$$

При резонансе цепь имеет чисто активный характер:

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{\boldsymbol{R^2} + (\boldsymbol{X_L - X_C})^2} = \boldsymbol{R = Z_{min}}.$$

$$\boldsymbol{I = \frac{U}{R} = I_{max}}.$$

При $\boldsymbol{X_L = X_C \gg R}$ из-за резкого возрастания тока в цепи при резонансе напряжений может возникнуть аварийная ситуация. Падения напряжения на реактивных элементах при резонансе напряжений становятся равными и могут во много раз превышать напряжение питания. Векторная диаграмма цепи при резонансе напряжений приведена на рисунке 2.12.

Для достижения резонанса напряжений изменяют либо частоту собственных колебаний контура, доводя ее до частоты питающего напряжения, либо частоту питающего напряжения, доводя ее до частоты собственных колебаний контура. При резонансе

$$\boldsymbol{X_L = \omega_{\text{рез}} L = \left({}^{1}\!/_{\sqrt{LC}}\right) L = \sqrt{LC},\ X_C = {}^{1}\!/_{(\omega_{\text{рез}} C)} = {}^{\sqrt{LC}}\!/_{C} = \sqrt{{}^{L}\!/_{C}}}.$$

Величина $\boldsymbol{\sqrt{{}^{L}\!/_{C}}. = \rho}$ имеет размерность сопротивления и называется характеристическим сопротивлением контура. Если активное сопротивление меньше характеристического, то падение напряжения на реактивных элементах цепи превышает напряжение питания цепи. Если продолжать уменьшать сопротивление *R*, то ток будет возрастать, и одновременно будет увеличиваться напряжение на элементах *L* и *C*. Подобное явление чрезвычайно опасно в электротехнических системах, так как приводит к чрезмерному повышению напряжений (перенапряжениям) в электротехнических устройствах.

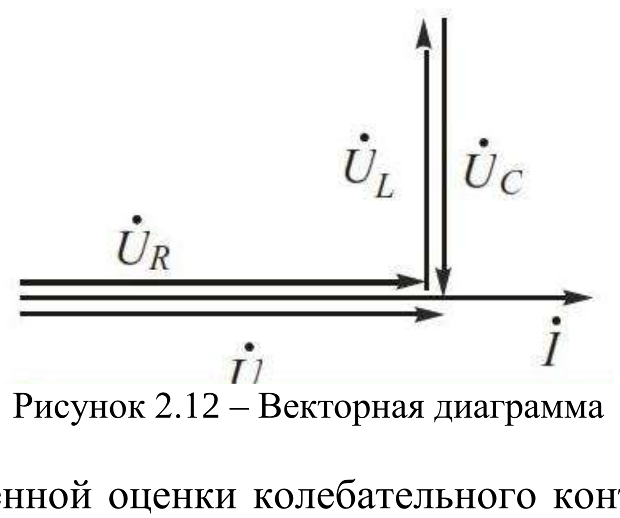


Рисунок 2.12 – Векторная диаграмма

Для качественной оценки колебательного контура вводится понятие добротности контура:

$$D = {}^{U_{L\text{рез}}}/_{U} = {}^{\omega_{\text{рез}} L I_{\text{рез}}}/_{(RUI_{\text{рез}})} = {}^{\omega_{\text{рез}} L}/_{R} = {}^{\rho}/_{R}.$$

Добротность показывает, во сколько раз напряжение U_L превышает напряжение сети.

2.4 Параллельное соединение активного, индуктивного и емкостного элементов

2.4.1 Основные законы

Рассмотрим электрическую цепь, схема замещения которой показана на рисунке 2.13.

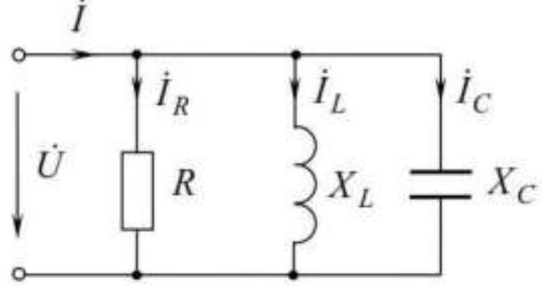


Рисунок 2.13 – Схема замещения параллельно цепи

Общий ток согласно первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

Подставим в это уравнение значения токов, выраженные по закону Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} - \frac{\dot{U}}{jX_C} = \dot{U}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j}\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right] = (G - jB_L + jB_C)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U},$$

где $G = \frac{1}{R}$, $B_L = \frac{1}{\omega L}$, $B_C = \omega C$ – проводимости активного, индуктивного и емкостного элементов; $\underline{Y}$ – суммарная комплексная проводимость цепи, которая является обратной величиной комплексного сопротивления, так как

$$j(-j) = +1;\ {}^{1}/_{j} = -j;\ {}^{1}/_{(-j)} = +j.$$

$$\underline{Y} = G - jB_L + jB_C = G + j(B_C - B_L).$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}.$$

Ток в цепи будет равен

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}.$$

2.4.2 Векторная диаграмма

Построение векторной диаграммы начинаем с вектора напряжения, которое является одинаковым для всех элементов схемы. Векторная диаграмма для случая, когда $X_L < X_C$, приведена на рисунке 2.14. Ток в неразветвленной части схемы складывается из токов трех параллельных ветвей при учете сдвига фаз. Ток через резистор совпадает с напряжением по фазе, ток через индуктивный элемент отстает от напряжения на 90°, ток через конденсатор опережает его на 90°.

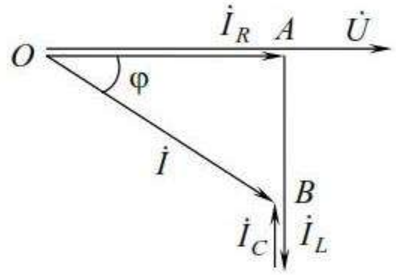


Рисунок 2.14 – Векторная диаграмма

В построенной диаграмме можно выделить треугольник OAB, называемый треугольником токов. Сторона OA называется активной составляющей тока, сторона AB – реактивной составляющей. Из треугольника токов получаем модуль полного тока, выражения для угла φ и составляющих токов:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}; \quad \varphi = arctg\frac{|I_L - I_C|}{R}; \quad I_R = Icos\varphi; \quad |I_L - I_C| = Isin\varphi.$$

Разделив все стороны треугольника токов на напряжение, получим подобный ему треугольник проводимостей на рисунке 2.15, а, где Y – полная проводимость.

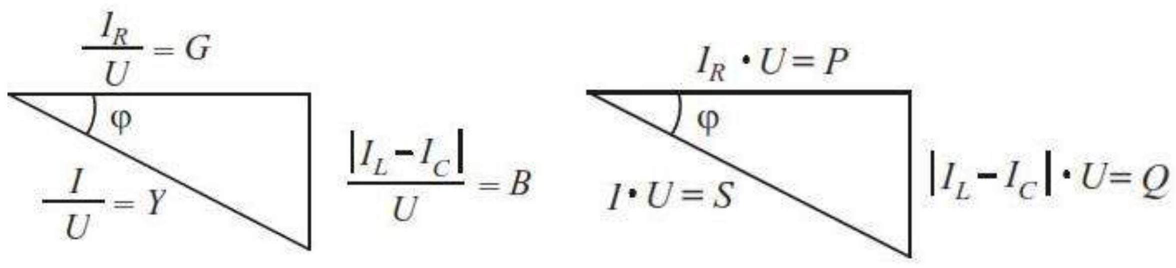


Рисунок 2.15 – Треугольники: а – треугольник проводимостей; б – треугольник мощностей

Закон Ома для действующих значений при параллельном соединении примет вид:$I=YI$. Из свойств треугольника проводимостей получим:

$$\boldsymbol{Y = \sqrt{G^2 + B^2};\ G = Y cos\varphi;\ \ B = Y sin\varphi;\ \ \varphi = arctg\frac{B}{G}}.$$

Умножив все стороны треугольника токов на напряжение, получим треугольник мощностей (рис. 2.15, б).

2.4.3 Резонанс токов

Резонанс токов возникает в электрической цепи, если в ней имеются параллельные ветви, одна из которых содержит индуктивный элемент, а другая – емкостный. Резонансом токов в цепи с параллельно соединенными индуктивностью и емкостью называется режим, при котором ток в неразветвленном участке цепи и напряжение, приложенное к этой цепи, совпадают по фазе. Условие резонанса токов: входная реактивная проводимость B = 0. Рассмотрим резонансный режим для цепи, схема замещения которой изображена на рисунке 2.16.

$$\boldsymbol{B = B_L - B_C = 0};\quad \boldsymbol{B_L = B_C}.$$

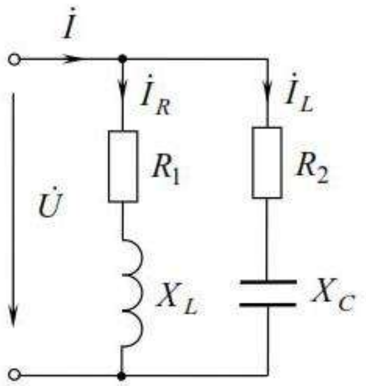


Рисунок 2.16 – Схема замещения цепи

В этом случае цепь будет вести себя так, будто она содержит только активное сопротивление. В неразветвленной части цепи ток I будет совпадать по фазе с приложенным к контуру напряжением, $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$. Резонансная частота контура определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2};\ B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}}.$$

Полная проводимость равна:

$$\boldsymbol{Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G = Y_{min}}.$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{рез}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

В параллельных ветвях, содержащих L и C элементы, энергия магнитного поля передается от индуктивного элемента конденсатору, где она переходит в энергию электрического поля; затем энергия электрического поля конденсатора передается индуктивному элементу, где переходит в энергию магнитного поля, и процесс повторяется. Обмен энергией между реактивными элементами происходит непосредственно между параллельными ветвями, минуя источник, в то время как при резонансе напряжений обмен энергией осуществляется через источник. Как и при резонансе напряжений, вся энергия, получаемая от источника, выделяется в виде тепла на резисторах, так как при резонансе токов

$$\boldsymbol{Q_L = U^2 B_L == U^2 B_C},$$

где $\boldsymbol{Q_L}$ и $\boldsymbol{Q_C}$ – реактивные мощности индуктивного и емкостного элементов. Поэтому реактивная мощность цепи: $\boldsymbol{Q = Q_L - Q_C = 0}$.

Полная мощность цепи равна:

$$\boldsymbol{S = \sqrt{P^{2+}Q^2} = P}.$$

При резонансе токов ток в неразветвленной части цепи имеет наименьшее значение, в то время как при резонансе напряжений ток в цепи достигает наибольшего значения. Однако токи в параллельных ветвях при резонансе токов могут значительно превышать ток в неразветвленной части цепи, чем и объясняется название данного резонанса.

Повышения напряжения на участках цепи при резонансе токов не происходит, поэтому в отличие от резонанса напряжений не возникает опасности для электротехнического оборудования.

Явления резонанса напряжений и токов широко используются в технике связи, автоматике и телемеханике, для улучшения $cos\varphi$ в промышленных установках. Путем настройки колебательного контура в резонанс с частотой передаваемого сигнала можно выделить полезный сигнал.

Контрольные вопросы

1. В какую сторону от начала координат смещена синусоида при положительной начальной фазе?
2. Какой физический смысл имеет угловая циклическая частота?
3. Какой буквой обозначают угол сдвига фаз напряжения и тока?
4. Какие формулы записи комплексных чисел вы знаете?
5. Что характеризуют модуль и аргумент комплекса?
6. Что понимают под действующим значением переменного тока?
7. Как связаны максимальное и действующее значения синусоидальных электрических величин?
8. Какие явления учитывает идеальный резистор?
9. Каковы фазные соотношения тока и напряжения резистора?
10. Что вы знаете о мгновенной мощности резистивного элемента?
11. Что назвали активной мощностью?
12. Каковы фазные соотношения тока и напряжения идеальной индуктивной катушки?
13. Что вы знаете о мгновенной мощности индуктивного элемента?
14. Каковы фазные соотношения тока и напряжения идеального конденсатора?
15. Что вам известно о мгновенной мощности емкостного элемента?
16. Для каких значений электрических величин выполняются законы Кирхгофа?
17. Что является модулем и аргументом комплексного сопротивления?
18. Как связаны между собой активное, реактивное и комплексное сопротивления?
19. Как вычислить полное сопротивление схемы?
20. От чего зависит угол между напряжением и током?

21. Какую энергию характеризует активная мощность?

22. Какую энергию характеризует реактивная мощность?

23. В каких единицах измеряют активную, реактивную и полную мощности?

24. Каково условие резонанса напряжений?

25. Каково значение резонанса напряжений?

26. Что является модулем комплексной проводимости?

27. Как связаны между собой активная, реактивная и комплексная проводимости?

28. Как вычислить полную проводимость схемы?

29. Каков порядок построения векторной диаграммы при резонансе токов?

30. Каково условие резонанса токов?

Тема 3 ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

3.1 Основные понятия и определения

Трехфазные цепи являются частным случаем многофазных систем электрических цепей. Многофазной системой называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, отличающиеся одна от другой по фазе и индуктируемые в одном источнике энергии. Каждую из цепей, входящих в многофазную систему, называют фазой (фазы А, В, С). В промышленности и быту для электроснабжения потребителей используются преимущественно трехфазные цепи.

Широкое распространение трехфазных систем объясняется следующими основными причинами:

1) передача энергии на дальние расстояния трехфазным током экономически более выгодна, чем переменным током с иным числом фаз;

2) возможность сравнительно простого получения кругового вращающегося магнитного поля;

3) в одной электроустановке существует два различных эксплуатационных напряжения – фазного и линейного;

4) уравновешенность системы. Это свойство является одним из важнейших, так как в неуравновешенной системе возникает неравномерная механическая нагрузка на энергогенерирующую установку, что значительно снижает срок ее службы.

Трехфазная симметричная система ЭДС − совокупность трех ЭДС, имеющих одинаковую частоту и амплитуду и сдвинутых по фазе относительно друг друга на 120° (рис. 3.1).

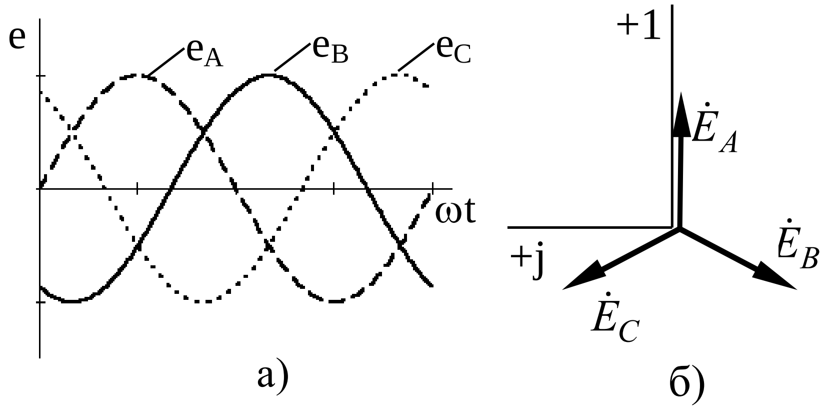


Рисунок 3.1 – Графическое представление трехфазной ЭДС:
а – временная характеристика; б – векторная диаграмма

Мгновенные значения ЭДС трехфазного источника:

$$e_A = E_m sin\omega t, e_B = E_m \sin(\omega t - 120°),$$
$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120°),$$

где начальные фазы соответственно равны

$$\psi_{eA} = 0, \psi_{eB} = -120°, \qquad \psi_{eC} = 120°.$$

Отсюда следует, что сумма электродвижущих сил симметричной трехфазной системы в любой момент времени равна нулю. Векторы ЭДС вращаются против часовой стрелки.

Трехфазная цепь состоит из трехфазного генератора, соединительных проводов и приемников или нагрузки, которые могут быть однофазными или трехфазными. Если концы трех обмоток (X, Y, Z) соединяются в один узел (N), называемый нейтралью или нейтральной точкой, а начала обмоток (A, B, C) служат для подключения нагрузки, то такой вид соединения называют соединением обмоток генератора звездой (рис. 3.2).

Провода, соединяющие начала A, B, C обмоток источника с началом фаз приемника (a, b, c), называют линейными проводами.

Провод, соединяющий нейтральные точки источника и приемника, называют нейтральным (нулевым). Может быть создана как четырехпроводная система питания, так и трехпроводная (при отсутствии нейтрального провода).

Разность потенциалов между каждой парой линейных проводов или началами двух фаз называют линейным напряжением и обозначают следующим образом: $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$.

Напряжение между каждой фазой и нулевым проводом называют фазным напряжением и обозначают $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$.

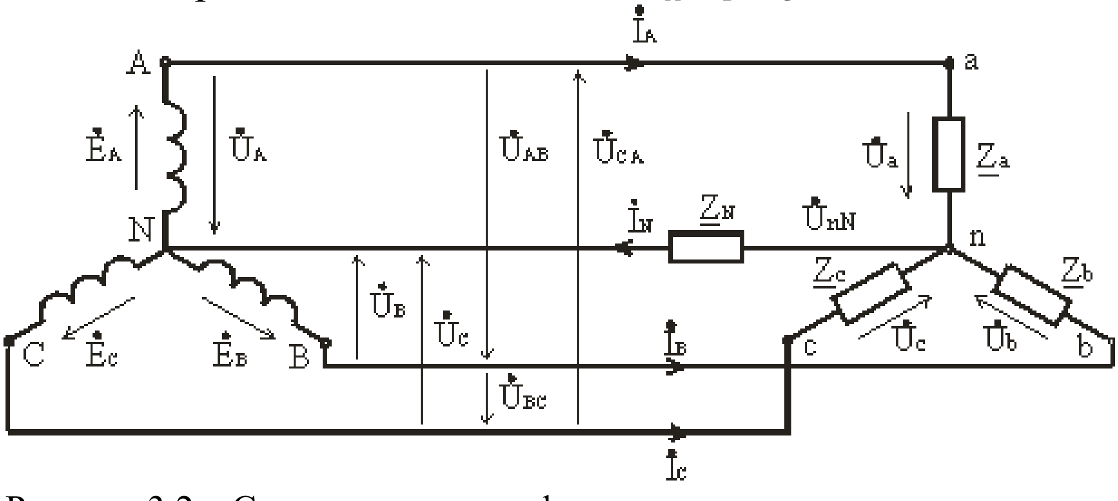


Рисунок 3.2 – Схема соединения фаз источника и приемника в звезду

Токи в линейных проводах называются линейными токами: $\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{A}}, \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{B}}, \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{C}}$. Фазные токи равны линейным.

Соотношение между напряжениями имеет следующую формулу

$$\boldsymbol{U}_{\text{ф}} = \frac{\boldsymbol{U}_{\text{л}}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}.$$

Независимо от схемы соединения фаз источника за условное положительное направление токов в линейных проводах принято направление в сторону потребителей, а в нейтральном проводе – в сторону источника.

При соединении источника питания треугольником конец фазы «*А*» – *X* соединяется с началом фазы «*В*», конец фазы «*В*» – *У* с началом фазы «*С*», конец фазы «*С*» –*Z* – с началом фазы «А». Начала фаз *А, В* и *С* подключаются с помощью линейных проводов к приемникам (рис. 3.3).

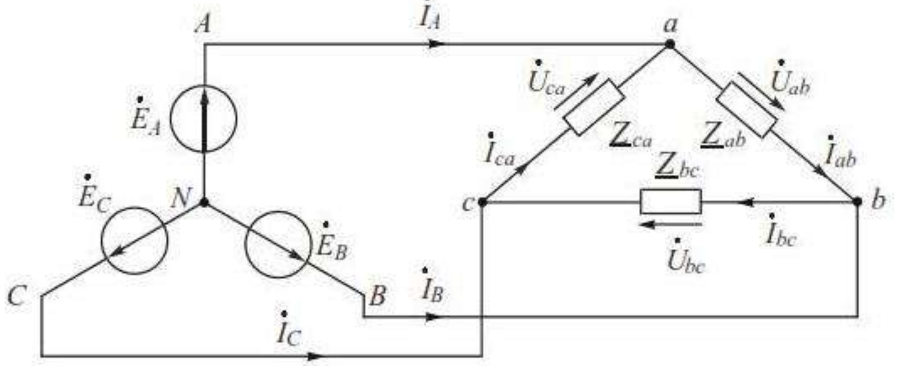


Рисунок 3.3 – Схема соединения фаз источника и приемника в треугольник

При таком соединении линейное напряжение равно фазному напряжению генератора, а фазные токи меньше линейных в $\sqrt{3}$ раз:

$$\boldsymbol{U}_{\text{ф}} = \boldsymbol{U}_{\text{л}}, \;\; \boldsymbol{I}_{\text{ф}} = \frac{\boldsymbol{I}_{\text{л}}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}.$$

3.2 Расчет трехфазных цепей

3.2.1 Соединение элементов трехфазной цепи звездой

Трехфазная цепь называется симметричной, если комплексы сопротивлений всех ее фаз одинаковы:

$$Z_A e^{j\varphi} = Z_B e^{j\varphi} = Z_C e^{j\varphi}.$$

Если это условие не выполняется, то приемники называют несимметричными. При соединении звездой (см. рис. 3.2) в точках перехода из источника в линию и из линии в приемник нет разветвлений, поэтому фазные токи $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ и линейные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ одинаковы. $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_в$, $\underline{Z}_c$ – комплексные сопротивления фазных нагрузок, N и n-нейтральные (нулевые) точки генераторов и нагрузки.

Определяем фазные напряжения:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\text{а}} = \boldsymbol{U}_{\text{ф}};\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{U}_{\text{ф}} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\mathbf{120}°};\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{U}_{\text{ф}} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\mathbf{120}°},$$

где $U_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$.

Определяем токи в фазах согласно закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{\text{а}}}{\underline{Z}_a};\ \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_a};\ \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c}.$$

Линейные напряжения определяют через фазные напряжения:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{AB}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{A}} - \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{B}};\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{BC}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{B}} - \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{C}};\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{CA}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{C}} - \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{A}}.$$

Ток в нейтральном проводе $\dot{I}_N$ по закону Кирхгофа равен сумме трех фазных токов:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Построим векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости (рис. 3.4). При построении векторных диаграмм напряжений удобно принимать потенциалы нейтральных точек N и n равными нулю, т.е. совпадающими с началом координатных осей комплексной плоскости. На векторной диаграмме удобно направить векторы фазных напряжений от точки N к точкам A, B и C, т.е. противоположно условному положительному направлению напряжений на схемах. Векторы фазных напряжений откладываем с учетом их начальных фаз и получаем звезду фазных напряжений. Для нахождения вектора линейного напряжения $\dot{U}_{AB}$ необходимо к вектору напряжения $\dot{U}_A$ прибавить вектор напряжения $\dot{U}_B$ с противоположным знаком.

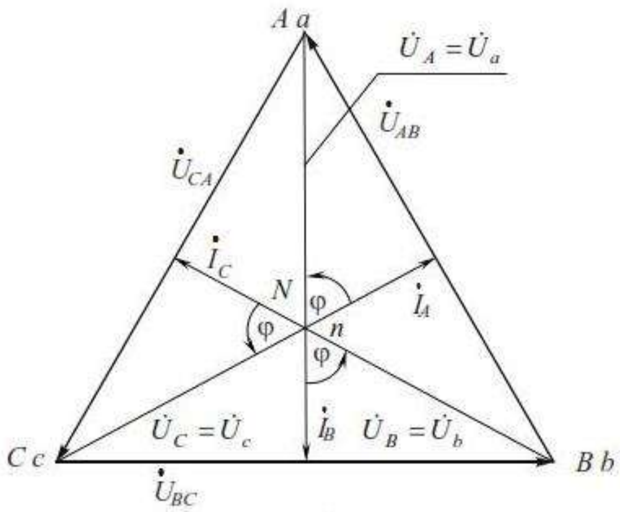


Рисунок 3.4 – Векторная диаграмма токов и напряжений

После переноса вектора $\dot{U}_{AB}$ параллельно самому себе он соединит точки A и B на векторной диаграмме. Аналогично строят векторы линейных напряжений $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$, которые образуют замкнутый равносторонний треугольник. Поэтому сумма комплексных линейных напряжений всегда равна нулю.

Если приемники симметричные, то токи в фазах будут численно равны и сдвинуты по фазе по отношению к соответствующим фазным напряжениям на один и тот же угол. В масштабе откладываем вычисленные значения токов в фазах. Геометрическим сложением фазных токов находят вектор тока $\dot{I}_N$. Получим в случае симметричного приемника ток в нейтральном проводе, равный нулю, поэтому необходимость в нейтральном проводе отпадает.

Трехфазные цепи при соединении фаз приемника звездой без нейтрального провода называют трехпроводными (рис. 3.5).

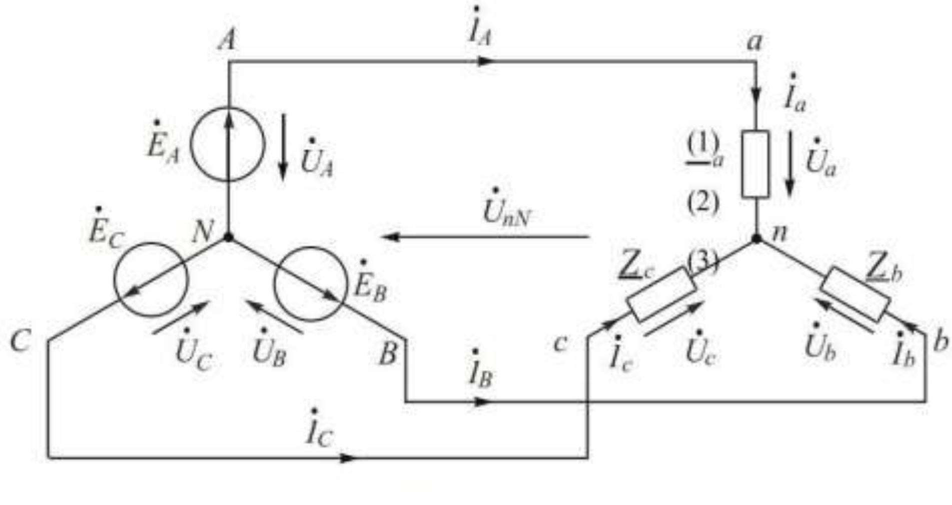


Рисунок 3.5 – Схема соединения приемника и источника звездой без нейтрального провода

В такую трехпроводную цепь можно включать только симметричные приемники, например, трехфазные электродвигатели, электрические печи.

Если по каким-либо причинам несимметричные приемники окажутся включенными в трехпроводную сеть, то между нейтральными точками приемника и источника электроэнергии возникнет напряжение $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{Nn}}$, называемое напряжением смещения нейтрали. Определение междуузлового напряжения можно выполнить по формуле

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{nN}} = \frac{\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{b}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{B}} + \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{c}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{C}}}{\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{c}}},$$

где $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{c}}$ – комплексные проводимости фаз приемника. Напряжения на фазах приемника будут отличаться друг от друга. Из второго закона Кирхгофа следует:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{A}} - \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{nN}}, \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{b}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{B}} - \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{nN}}, \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{c}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{C}} - \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{nN}}.$$

Зная $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{nN}}$ и фазные напряжение генератора, можно определить фазные напряжения приемника, а по ним фазные найти фазные токи. Векторы фазных напряжений можно определить графически, построив топографическую диаграмму фазных напряжений источника питания и $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{nN}}$ (рис. 3.6).

Векторная диаграмма напряжений цепи, построенная на комплексной плоскости так, что комплексному потенциалу каждой точки схемы соответствует определенная точка комплексной плоскости, называется топографической. Такая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, дает наглядное представление о соотношении величин напряжений, токов, фазовых соотношениях между ними на различных участках цепи.

Рисунок 3.6 – Топографическая диаграмма напряжений при учете напряжения между нейтралями

При изменении величины (или характера) фазных сопротивлений напряжение смещения нейтрали может изменяться в широких пределах. При этом нейтральная точка приемника n на диаграмме может занимать разные положения, а фазные напряжения приемника $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{a}},, \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{b}},\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{c}}$ могут отличаться друг от друга весьма существенно.

В четырехпроводные цепи обычно включают однофазные несимметричные приемники между зажимами одной из фаз и нейтральным проводом. Поэтому благодаря нейтральному проводу напряжения на каждой фазе приемника будут равны соответствующим напряжениям генератора. Нейтральный провод обеспечивает сохранение симметрии фазных напряжений несимметричного приемника. Токи в фазах будут разными, так как комплексные сопротивления фаз не равны между собой:

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{A}} = \frac{\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{a}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{a}}};\ \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{b}} = \frac{\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{b}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{b}}};\ \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{c}} = \frac{\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{c}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{c}}}.$$

Векторная диаграмма при несимметричной нагрузке приведена на рисунке 3.7.

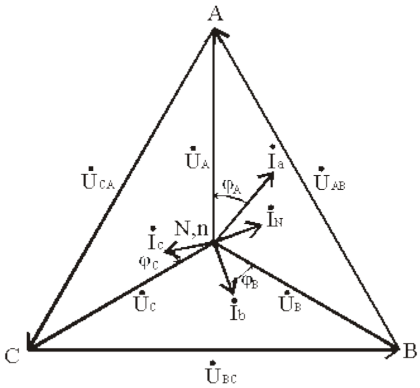


Рисунок 3.7 – Векторная диаграмма при несимметричной нагрузке

Важным преимуществом четырехпроводной цепи является то, что при изменении режима работы одной из фаз режимы других фаз не изменяются, так как постоянство напряжений на фазах обеспечивается нейтральным проводом. Но для несимметричного приемника векторы токов уже не представляют собой симметричную систему, и поэтому ток в нейтральном проводе не будет равен нулю.

3.2.2 Соединение элементов трехфазной цепи треугольником

Значительная часть приемников, включаемых в трехфазные цепи, бывает несимметричными. Поэтому очень важно обеспечить независимость режима работы отдельных фаз. Кроме четырехпроводной цепи подобными свойствами обладают трехпроводные цепи при соединении фаз приемника треугольником. Схема включения приемников в трехфазную сеть приведена на рисунке 3.3. При этом фазные напряжения приемника равны соответствующим линейным напряжениям источника питания, т.е. $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{ab}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{AB}}$; $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{bc}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{BC}}$; $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{ca}} = \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{CA}}$. Напряжения в комплексной форме:

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{U}_{\text{л}};\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{bc}} = \boldsymbol{U}_{\text{л}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\mathbf{120}^\circ};\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{ca}} = \boldsymbol{U}_{\text{л}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\mathbf{120}^\circ},$$

где $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{л}}$ – действующее значение линейного напряжения сети.

Токи в фазах приемника равны:

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ab}} = \frac{\dot{\boldsymbol{U}}_{\text{ab}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ab}}};\ \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{bc}} = \frac{\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{bc}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{bc}}};\ \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ca}} = \frac{\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{ca}}}{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ca}}}.$$

Рассчитаем линейные токи согласно первому закону Кирхгофа для узлов a, b, c:

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ab}} - \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ca}}, \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{B}} = \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{bc}} - \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ab}}, \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{C}} = \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ca}} - \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{bc}}\ .$$

Из этих уравнений следует, что геометрическая сумма векторов линейных токов равна нулю. С помощью этих уравнений можно определить линейные токи графически, воспользовавшись векторной диаграммой фазных токов (рис. 3.8).

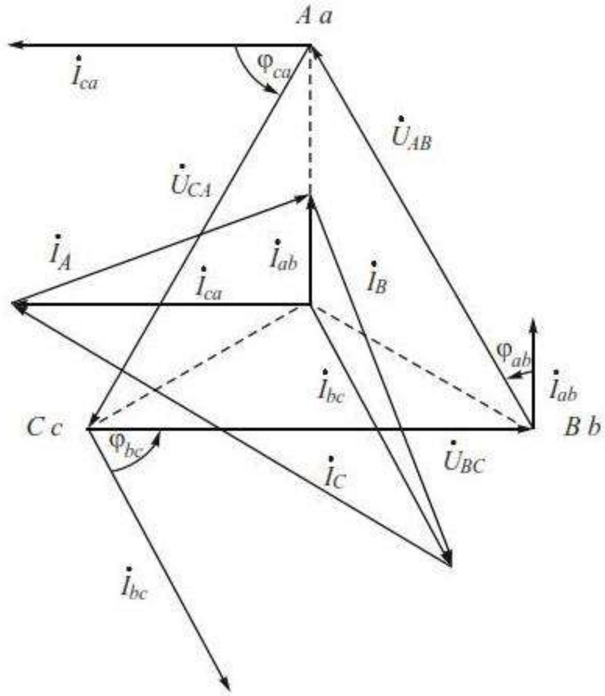


Рисунок 3.8 – Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов

Вид векторной диаграммы токов зависит от характера нагрузки фаз приемника. Самой распространенной на практике является нагрузка активно-индуктивная. На векторно-топографической диаграмме (рис. 3.9) фазные токи отстают от фазных напряжений на угол φ $(90^\circ > \varphi > 0^\circ)$. Построение начинают с топографической диаграммы напряжений генератора. Далее строят топографическую диаграмму напряжений приемника. Если пренебречь сопротивлением линии, то потенциалы точек A и a, B и b, C и c одинаковы. Поэтому топографическая диаграмма приемника совпадает с топографической диаграммой генератора. Затем проводят векторы фазных токов под соответствующими углами к векторам фазных напряжений. После этого проводят векторы фазных токов под соответствующими углами к векторам фазных напряжений. Векторы фазных токов переносят в центр треугольника напряжений. Векторы линейных токов получают как геометрические разности соответствующих фазных токов.

Если приемник симметричный, то векторы фазных токов образуют симметричную систему: значения фазных токов и сдвиги фаз между токами и соответствующими фазными напряжениями будут одинаковы. Из векторно-топографической диаграммы (рис. 3.9) следует, что в случае симметричных приемников $I_л = \sqrt{3} I_ф$.

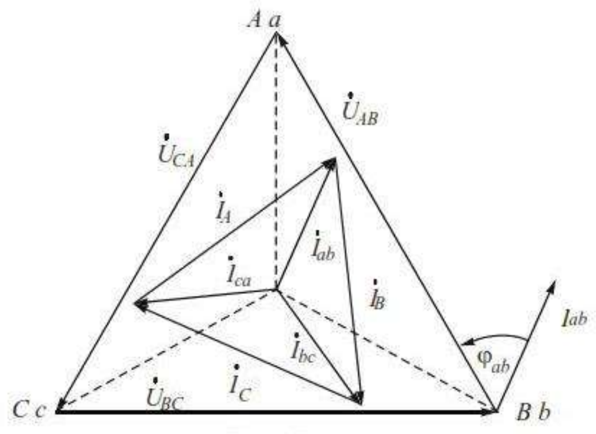


Рисунок 3.9 – Векторно-топографическая диаграмма

При равномерной нагрузке фаз расчет трехфазной цепи, соединенной треугольником, можно свести к расчету одной фазы и найти линейный ток по формуле: $I_л = \sqrt{3} I_ф$. Абсолютные значения фазных токов равны, а сдвиги по фазе относительно друг друга составляют 120°.

Контрольные вопросы

1. Перечислить преимущества трехфазных цепей.

2. Какие способы изображения симметричной системы ЭДС вы знаете?

3. Как получают соединение фаз обмоток генератора звездой и треугольником?

4. Какие напряжения называют фазными, какие – линейными?

5. Каково соотношение фазных и линейных напряжений при соединении фаз звездой и треугольником?

6. Какие трехфазные приемники называют симметричными?

7. Как обозначаются (маркируются) начала и концы фаз трехфазных источников и потребителей? Как осуществить их соединение звездой и треугольником?

8. Дать определение фазных и линейных токов. Каково соотношение между этими токами при соединении приемника по схеме звезда?

9. По каким законам вычисляют токи при соединении фаз приемника треугольником?

10. Чему равно напряжение на фазе приемника при соединении его треугольником?

11. Как вычислить фазные токи приемника, соединенного звездой, если известны линейные напряжения источника и сопротивления фаз приемника?

12. В каких случаях применяется четырехпроводная система электроснабжения? Каково значение нейтрального провода?

13. Какая нагрузка называется симметричной?

14. Как вычислить ток в нейтральном проводе?

15. Каков порядок построения векторно-топографической диаграммы при соединении фаз приемника треугольником?

16. Каково соотношение фазного и линейного токов при симметричном приемнике, соединенном треугольником?

17. Каким методом рассчитывают токи при соединении звездой трехпроводной?

18. Что назвали напряжением смещения нейтрали?

19. Каков порядок построения векторно-топографической диаграммы при несимметричном приемнике?

20. Чему равно напряжение на фазе симметричного приемника при соединении звездой трехпроводной?

21. Чему равно напряжение на фазе приемника при соединении звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления?

22. Каков алгоритм построения векторно-топографической диаграммы при соединении звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления?

Тема 4 ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Электромагнитные процессы, возникающие в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называют переходными.

При всех изменениях в электрической цепи – включении, выключении, коротком замыкании, колебаниях величины какого-либо параметра – в ней возникают переходные процессы.

При переходных процессах могут возникать большие перенапряжения, сверхтоки, электромагнитные колебания, которые могут нарушить работу устройства вплоть до выхода его из строя.

4.1 Законы коммутации

В электрических цепях могут происходить включения и отключения пассивных или активных ветвей, короткие замыкания отдельных участков, переключения и т.д. Такие изменения параметров называют коммутационными (происходят мгновенно), а процессы называют переходными. Переходные процессы заканчиваются спустя некоторое время (теоретически бесконечно большое) после коммутации.

Начало отсчета времени переходного процесса при $t = 0$ начинается с момента коммутации.

Момент времени непосредственно перед коммутацией обозначается $0-$, а после коммутации – $0+$.

Существует два закона коммутации.

Первый закон коммутации:

В индуктивном элементе ток и магнитный поток непосредственно после коммутации в момент, который называется моментом коммутации $t = 0+$ или $t = 0$ сохраняет значение, которое он имел непосредственно перед коммутацией, т.е. при $t = 0-$ и дальше начинает изменяться с этого значения:

$$\boldsymbol{i_L(0+) = i_L(0) = i_L(0-)}.$$

Если допустить, что в момент коммутации ток на катушке изменится скачком, то напряжение на индуктивном элементе:

$u_L = {^{Ldi_L}}/_{dt}$ будет бесконечно большим, а в цепи не будет выполняться второй закон Кирхгофа.

Второй закон коммутации. На емкостном элементе напряжение (заряд) сохраняет в момент коммутации то значение, которое оно имело непосредственно перед коммутацией и в дальнейшем изменяется, начиная именно с этого значения:

$$\boldsymbol{u_C(0+) = u_C(0) = u_C(0-)}$$

Если допустить, что в момент коммутации напряжение на емкостном элементе изменяется скачком, то ток $i_C = {^{Cdu_C}}/_{dt}$ будет бесконечно большим, и в цепи не будет выполняться второй закон Кирхгофа.

С энергетической точки зрения, невозможность мгновенного изменения тока i_L и напряжения u_C объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в индуктивном и емкостном элементах энергии (энергии магнитного поля $-Li_L^2/2$ и энергии электрического поля $Cu_C^2/2$), так как скачкообразное изменение энергии требует бесконечно больших мощностей, что не имеет физического смысла, поскольку реальные источники питания не обладают бесконечно большой мощностью и не могут ее обеспечить.

4.2 Анализ переходных процессов в неразветвленной цепи с резистором и конденсатором

4.2.1 Включение RC-цепи на постоянное напряжение

Рассмотрим переходный процесс при включении RC-цепи на постоянное напряжение (рис. 4.1).

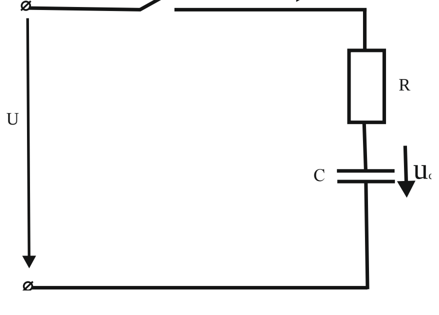


Рисунок 4.1 – Схема зарядки конденсатора от источника постоянного тока

Полагаем, что до коммутации конденсатор не заряжен, напряжение на нем $u_c(0\text{-}) = 0$. В результате коммутации рубильник замыкается, и конденсатор полностью заряжается.

Расчет проводят в следующей последовательности:

1. Задаются условно положительным направлением токов и напряжений.

2. Составляют для данной цепи уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\boldsymbol{Ri + u_C = U}$$

или с учетом $\boldsymbol{i = C\,du_c/dt}$:

$$\boldsymbol{\frac{RCdu_C}{dt} + u_C = U}.$$

Полученное уравнение представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

3. Решение уравнения будет мгновенное значение напряжения на конденсаторе в процессе его зарядки, которое в общем виде можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}}}.$$

Установившуюся составляющую u_{Cy} переходного напряжения на конденсаторе найдем при установившемся режиме работы цепи, когда конденсатор зарядится. Конденсатор будет заряжаться до тех пор, пока напряжение на нем достигнет напряжения U источника. При этом ток в цепи прекратится, и падение напряжения на резисторе станет равным нулю. Следовательно, установившаяся составляющая емкостного напряжения равна напряжению источника: $u_{Cy} = U$. Для определения свободной составляющей емкостного напряжения приравнивают правую часть уравнения нулю:

$$\boldsymbol{\frac{RCdu_{C\text{св}}}{dt} + u_{C\text{св}} = 0}.$$

В общем виде решением полученного однородного уравнения будет

$$\boldsymbol{u_{C\text{св}} = A \cdot e^{kt}},$$

где A – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий; k – корень характеристического уравнения, получаемый из однородного уравнения.

Для однородного уравнения характеристическое уравнение имеет вид:

$$\boldsymbol{RCk+1=0}.$$

Величину $RC=\tau$ называют постоянной времени – цепи. Постоянная времени характеризует скорость протекания переходного процесса:

$$\boldsymbol{\tau k+1=0}.$$

Получим значение корня характеристического уравнения:

$$\boldsymbol{k=-1/\tau}.$$

Найдем свободную составляющую емкостного напряжения:

$$\boldsymbol{u_{C\text{св}}=A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}.$$

Переходное напряжение на емкости:

$$\boldsymbol{u_C=u_{C\text{у}}+u_{C\text{св}}=U+Ae^{-\frac{t}{\tau}}}.$$

4. Так как конденсатор не был заряжен, т.е. при $t=0$ напряжение $u_C(0\_)=0$, то $A=-U$. Искомое переходное напряжение на конденсаторе после коммутации цепи равно

$$\boldsymbol{u_C=U\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}.$$

Для тока получим:

$$\boldsymbol{i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}.$$

Начальное значение тока $i(0+)$ может быть получено и непосредственно, так как $u_C(0)=0$, то все напряжение источника при $t=0$ равно напряжению $u_R=Ri=Ue^{-\frac{t}{\tau}}$.

Кривые напряжений и тока, изображенные на рисунке 4.2, показывают, что напряжение на емкости и ток в цепи не устанавливаются мгновенно. Напряжение возрастает, а ток спадает тем медленнее, чем больше постоянная времени цепи τ, т.е. чем медленнее затухает свободное напряжение $u_{Cсв}$.

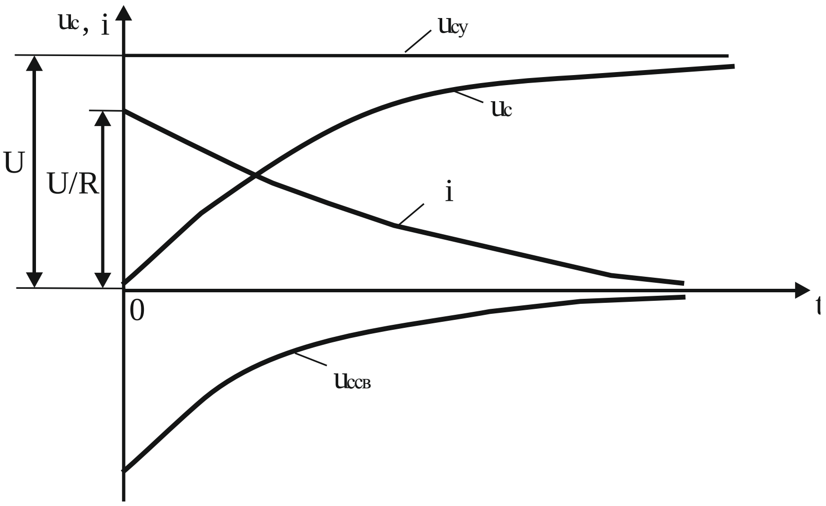


Рисунок 4.2 – Кривые напряжений и тока

4.2.2 Разрядка конденсатора на резистивный элемент

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке 4.3. При разомкнутом ключе K_2 и замкнутом K_1 происходит заряд конденсатора до напряжения U источника. Затем ключ K_1 размыкается и замыкается ключ $K_{2.}$

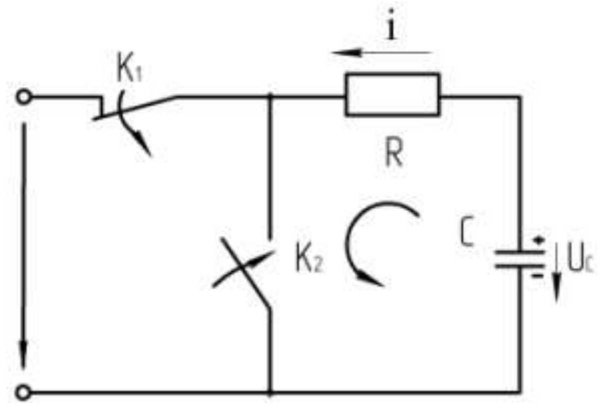


Рисунок 4.3 – Схема разрядки конденсатора на резистор

С этого момента начинается разрядка конденсатора на резистивный элемент с сопротивлением R, возникает переходный процесс. Состояние рассматриваемой цепи описывается уравнением:

$$\boldsymbol{RC\, du_C/dt + u_C = 0}.$$

Решением уравнения будет: $u_C = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

В процессе разрядки конденсатора имеет место только свободная составляющая емкостного напряжения. Полагая t=0, чим: $u_{C(t=0)} = A = U$. Постоянная интегрирования численно равна такому напряжению на конденсаторе, которое он имел до замыкания контакта K_2:

$$\boldsymbol{u_C = Ue^{-\frac{t}{\tau}}.}$$

И ток переходного процесса при разрядке конденсатора равен

$$\boldsymbol{i = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.}$$

Напряжение на резистивном элементе

$$\boldsymbol{u_R = Ri = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}.}$$

Графики изменения u_C и i_C приведены на рисунках 4.4 и 4.5.

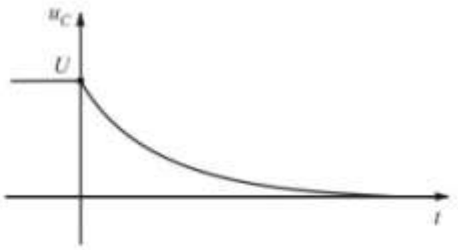


Рисунок 4.4 – График изменения u_C

Рисунок 4.5 – График изменения i_C

4.3 Анализ переходных процессов в неразветвленной цепи с резистором и индуктивной катушкой

4.3.1 Включение RL-цепи на постоянное напряжение

В электротехнической практике часто приходится иметь дело с переходными процессами в цепях, состоящих из элементов, обладающих параметрами R и L. Эти процессы происходят, например, при подключении к источнику постоянного напряжения электромагнитов, реле, электрических машин постоянного тока и других электромагнитных устройств.

При замыкании ключа в цепи с резистивным и индуктивным элементами (рис. 4.6) возникает переходный процесс. Требуется определить ток i переходного процесса и напряжения на резистивном u_R и индуктивном u_L элементах.

Расчет проводят в следующей последовательности:

1. Задаются условно положительным направлением токов и напряжений, как показано на рисунке 4.6.

2. Составляют для данной цепи уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\boldsymbol{u_R + u_L = U}.$$

С учетом того, что $u_R = iR$ и $u_L = L\,{di}/{dt}$, получим:

$$\boldsymbol{L\frac{di}{dt} + Ri = U} \text{ или } \boldsymbol{\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{U}{R}}.$$

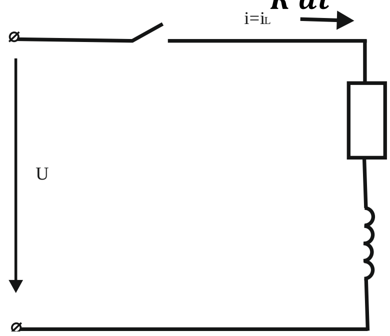


Рисунок 4.6 – Схема подключения к сети неразветвленной цепи с R- и L- элементами

3. Решением этого уравнения будет мгновенное значение тока переходного процесса электрической цепи после ее коммутации, которое в общем виде можно представить как $i = i_{св} + i_y$.

Для определения свободной составляющей тока i переходного процесса приравнивают правую часть уравнения нулю:

$$\boldsymbol{\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = 0}.$$

В общем виде решением полученного однородного уравнения будет:

$$\boldsymbol{i}_{св} = \mathrm{A} \cdot \boldsymbol{e^{kt}}.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению, имеет вид:

$$(L/R)k + 1 = 0,$$

где $\frac{L}{R} = \tau$ – постоянная времени переходного процесса, измеряется в секундах. Постоянная времени τ – интервал времени, за который переходный ток уменьшается в e раз по сравнению со своим начальным значением.

Тогда $\tau k + 1 = 0$, отсюда

$$k = -1/\tau.$$

Подставляя k в решение однородного уравнения, получаем

$$i_{\text{св}} = \mathrm{A} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot$$

Так как индуктивное сопротивление для постоянного тока равно нулю, ток установившегося состояния $i_{\text{у}} = U/R$. Следовательно, ток переходного процесса (переходный ток) равен

$$i = i_{\text{св}} + i_{\text{у}} = U/R + \mathrm{A} \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

4. Для определения постоянной интегрирования A рассматривают цепь в момент включения ключа, что соответствует началу переходного процесса (t=0). В этом случае:

$$i_{t=0} = U/R + \mathrm{A}.$$

Учитывая, что до замыкания ключа ток в цепи был равен нулю, согласно закону коммутации ток $i(0_+) = i(0_-) = 0$.

Следовательно, постоянная интегрирования $A = -U/R$, и уравнение для переходного тока записывают в виде:

$$i = \frac{U}{R} - \left(U/R\right) \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} = \left(\frac{U}{R}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Ток в цепи нарастает до установившегося значения U/R по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau = \frac{L}{R}$. На рисунке 4.7 изображены кривые переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивности. Свободный ток и напряжение на индуктивности плавно уменьшаются до нуля. В момент коммутации свободный и принужденный токи одинаковы по абсолютной величине. Переходный ток начинается при включении с нуля, затем возрастает, приближаясь к установившемуся постоянному значению.

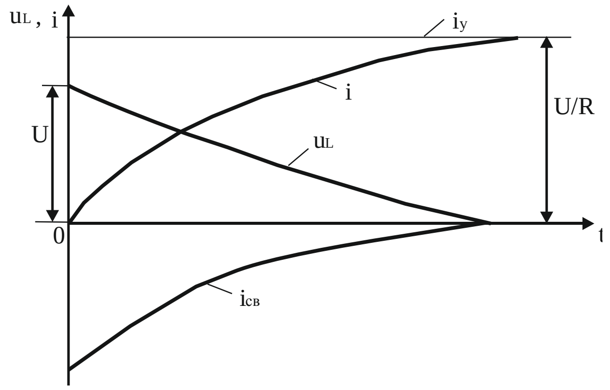


Рисунок 4.7 – Кривые переходного, принужденного, свободного токов и переходного напряжения на индуктивности

Напряжение на индуктивном элементе

$$\boldsymbol{u_L = L\frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{t}{\tau}}}.$$

Напряжение на резистивном элементе

$$\boldsymbol{u_R = Ri = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}.$$

В первый момент времени после подключения источника напряжение на индуктивном элементе скачком возрастает до значения $u_L = U$ (рис. 4.7), после чего уменьшается до нуля по экспоненциальному закону.

4.3.2 Отключение RL-цепи от источника постоянного напряжения

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке 4.8. При замкнутом контакте K_1 цепь находится в установившемся состоянии и при постоянном напряжении в ветвях возникают токи:

$$\boldsymbol{I_1 = U/R_1,\quad I_2 = U/R_2,\ I_0 = I_1 + I_2}.$$

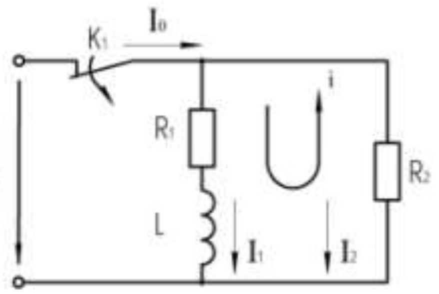


Рисунок 4.8 – Схема отключения цепи с R- и L-элементами от источника постоянного напряжения

В момент размыкания ключа начинается переходный процесс. Допустим, что ток I_0 мгновенно прекратился, но ток I_1 мгновенно измениться не может (так как ветвь содержит индуктивность) и устремляется в ветвь с резистивным элементом R_2. Такое состояние цепи описывается уравнением:

$$L\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = 0,$$

где i – ток переходного процесса в контуре.

Решая данное уравнение, получают:

$$i = A \cdot e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для определения постоянной интегрирования А рассматривают цепь в момент времени t=0. С учетом законов коммутации $i_{t=0} = A = I_1$. Ток переходного процесса можно представить выражением:

$$i = I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжения на резистивных элементах

$$u_{R1} = R_1 i = Ue^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad u_{R2} = R_2 i = \frac{R_2}{R_1}Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{L}{\tau}\frac{U}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1}Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Контрольные вопросы

1. Что понимают под переходным процессом в электрических цепях?
2. Какие факторы вызывают переходные процессы?
3. Что понимают под установившимися и свободными составляющими токами и напряжениями?
4. Сформулировать законы (правила) коммутации.
5. Как необходимо учитывать первый закон коммутации на практике?
6. Какими уравнениями описывается переходный процесс в неразветвленной цепи с R- и C-элементами?
7. Что такое постоянная времени, как ее определяют?
8. Какими уравнениями описывается переходный процесс в неразветвленной цепи с R- и L-элементами?
9. Какие условия определяют постоянные интегрирования?

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаворонков, М.А. Электротехника и электроника / М.А. Жаворонков. – М.: Академия, 2005. – 400 с.

2. Касаткин, А.С. Электротехника: учеб. для вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – М., 2005. – 544 с.

3. Мурзин, Ю.М. Электротехника: учеб. пособие для вузов / Ю.М. Мурзин, Ю.И. Волков. – СПб.: Питер, 2007. – 442 с.

4. Немцов, М.В. Электротехника и электроника / М.В. Немцов. М.: Высш. шк., 2007. – 560 с.

5. Синдеев, Ю.Г. Электротехника с основами электроники: учеб. пособие / Ю.Г. Синдеев. – Ростов н/Д.: Феникс, 2013. – 407 с.

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА
Курс лекций
Часть 1

Христинич Роман Мирославович
Христинич Елена Витальевна

Электронное издание

Редактор Л.Э. Трибис

Подписано в свет 15.10.2019. Регистрационный номер 191
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru