Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

В.И. Иванов

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания

Электронное издание

Красноярск 2024

Рецензент

С.К. Манасян, д-р техн. наук,
профессор кафедры «Физика и математика»

Иванов, В. И.

Основы векторной алгебры [Электронный ресурс]: методические указания / В. И. Иванов; Красноярский государственный аграрный университет. – Красноярск, 2024. – 45 с.

Подготовлены в соответствии с рабочими программами учебной дисциплины «Математика». Содержат краткое изложение основных вопросов теории, примеры применения теории для выполнения практических заданий.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 20.03.01 «Техносферная безопасность», специалитету 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» очной и заочной форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Красноярского государственного аграрного университета

1. Основные понятия и определения

При исследовании процессов и явлений реального мира приходится иметь дело с величинами двух различных типов: скалярными и векторными.

Скалярной величиной называется величина, которая характеризуется одним единственным числом, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Скалярные величины – длина, площадь, объем, плотность, масса тела, сопротивление проводника, электроемкость.

Векторной величиной называется величина, которая характеризуется числом и направлением. Векторные величины – сила, скорость, ускорение, импульс, напряженность электрического поля, магнитная индукция.

Отрезок прямой задается двумя равноправными точками – его концами. Отрезок, у которого ограничивающие его точки берутся в определенном порядке: первая точка – начало, а вторая – конец, называется направленным отрезком.

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок.

Если начало вектора находится в точке A, а конец в точке B, то он обозначается $\overrightarrow{AB}$ (буква A – начало вектора – всегда пишется первой). Векторы можно обозначать и одной буквой: $\vec{a}$.

Любой вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ характеризуется следующими элементами:

1) начальной точкой (точка приложения);
2) направлением;
3) длиной.

Определение. *Длиной* (*модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB или расстояние между точками A и B. Длина вектора обозначается так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Определение. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется ***противоположным*** вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, есть вектор $(-\vec{a})$.

Определение. *Нулевым вектором* называется вектор, начало и конец которого совпадают. *Нуль-вектор* обозначается символом $\vec{0}$. Длина (модуль) нуль-вектора равна 0, то есть $\left|\vec{0}\right| = 0$. Понятие направления для нулевого вектора не имеет смысла, т. е. нулевой вектор определенного направления не имеет.

Определение. *Вектор*, длина которого равна единице, называется *единичным* и обозначается символом $\vec{e}$.

Определение. Единичный вектор, направление которого совпадает с вектором $\vec{a}$, называется *ортом вектора* $\vec{a}$, обозначается символом $\overrightarrow{a^o}$, причем $\overrightarrow{a^o} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Определение. Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. Два коллинеарных вектора называются *одинаково (противоположно) направленными*, если их концы лежат на одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющих их начало, или от общего начала.

Определение. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.

Из определения равенства векторов вытекает следующее **утверждение:** для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки M существует единственный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с началом в точке M), равный $\vec{a}$.

Действительно, так как существует единственная прямая (l), проходящая через точку M и параллельная той прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$, то на прямой (l) существует единственная точка N, такая, что отрезок MN имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и одинаково направлен с вектором $\vec{a}$.

Из рассмотренного утверждения следует, что точку приложения (начало) данного вектора $\vec{a}$ можно выбирать произвольно (неразличимы два равных вектора, имеющие разные точки приложения и полученные параллельным переносом один из другого). Поэтому эти векторы в геометрии называют свободными.

Определение. *Свободными векторами* называются векторы, начальная точка (точка приложения) которых может выбираться свободно.

Определение. *Скользящими векторами* называются такие векторы, которые равны и лежат на одной прямой.

Другими словами, векторы называются скользящими, если начало этих векторов при параллельном переносе можно перенести только по направлению данного вектора.

В качестве примера скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу (так как две силы равные и расположенные на одной прямой оказывают одинаковое механическое воздействие).

Определение. *Связными векторами* называются такие векторы, которые равны и имеют общее начало, то есть действие их зависит от точки приложения.

Примером связного вектора может служить сила, приложенная к некоторой точке упругого тела.

В основу векторной алгебры, занимающейся изучением операций над векторами, положено понятие свободного вектора, так как задание скользящего или связного вектора может быть заменено заданием двух свободных векторов.

Определение. Три вектора, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными.*

Считается, что нулевой вектор и любые два других вектора компланарны.

2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операции сложения векторов и операцию умножения вектора на вещественное число.

Определение. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, определяемый следующим отрезком (рис. 1):

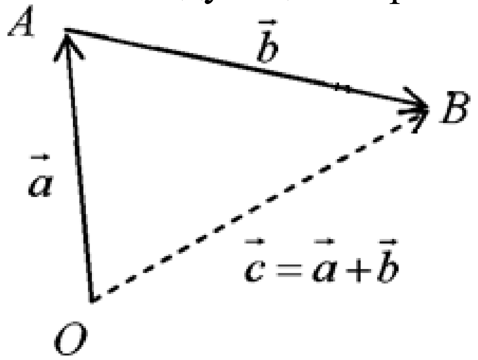

Рис. 1

1) из произвольной точки O откладывается вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$;

2) из конца A**,** вектора $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, откладывается вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$;

3) начало первого вектора $\overrightarrow{OA}$ соединяется с концом второго вектора $\overrightarrow{AB}$;

4) полученный вектор $\overrightarrow{OB}$ есть вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ – сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Правило сложения векторов обладает следующими свойствами.

Теорема 1. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *справедливы соотношения:*

1. Сложение векторов ***коммутативно****, т.е.* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. Сложение векторов ***ассоциативно****, т.е.*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

3. Существует нулевой вектор $\vec{0}$*, такой, что* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ *верно для любого вектора* $\vec{a}$.

4. Для каждого вектора $\vec{a}$ *существует противоположный вектор* $(-\vec{a})$*, такой, что* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Доказательство.

1. Приведем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу O (рис. 2). Пусть $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, тогда $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

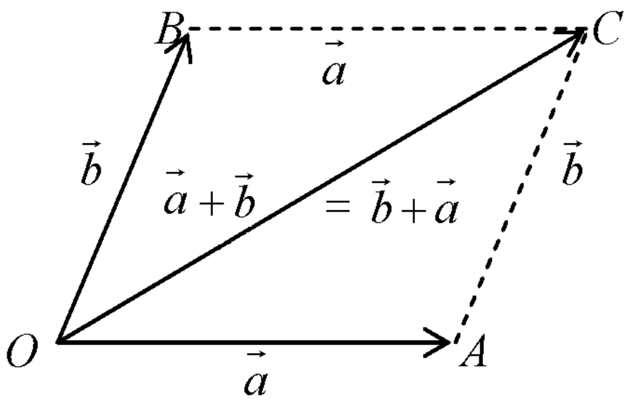

Рис. 2

Из треугольника ΔOBC и определения суммы двух векторов имеем, а из треугольника ΔOAC – $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. Откуда следует справедливость свойства 1.

2. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ три произвольных вектора (рис. 3), а O – произвольная точка. Приведем вектор $\vec{a}$ к точке O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; а вектор $\vec{b}$ к точке A: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; вектор $\vec{c}$ к точке C: $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

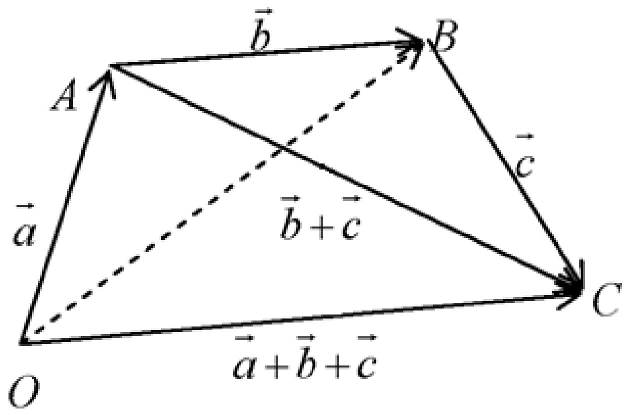

Рис. 3

Тогда $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$, т.е. имеет место свойство 2.

3. Данное свойство следует из определения суммы двух векторов.

4. Данное свойство следует из определения противоположного вектора и определения суммы двух векторов.

Замечание 1. При доказательстве свойства 1 получено правило сложения векторов, называемое «правилом параллелограмма», суть которого состоит в следующем: сумма двух векторов $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, приведенных к общему началу O (см. рис. 2), есть вектор-диагональ $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ параллелограмма $OACB$, построенного на данных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Замечание 2. Сумма трех некомпланарных векторов $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, приведенных к общему началу, есть вектор-диагональ $\overrightarrow{OM}$ параллелепипеда, построенного на данных векторах (рис. 4), так как $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

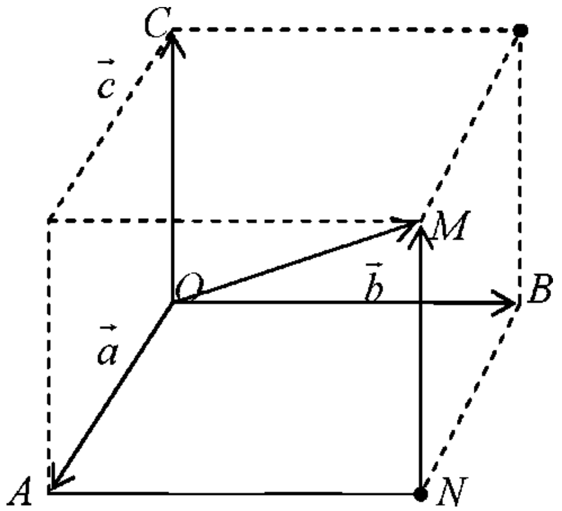

Рис. 4

Замечание 3. Установленные свойства (1-4) дают возможность распространить правило сложения на сумму любого конечного числа векторов: суммой векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ ...,\ \vec{a}_n$ называется вектор $\vec{S}$, который замыкает ломаную линию, построенную из данных векторов так, что начало каждого из последующих векторов суммы совмещается с концом предыдущего. Замыкающий вектор $\vec{S}$ направлен из начала первого вектора $\vec{a}_1$ суммы к концу последнего вектора $\vec{a}_n$.

Сформулированное правило сложения векторов называют «правилом многоугольника» или «правилом ломаной».

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, длина которого равна $|\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot \lambda$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ в случае $\lambda < 0$.

Замечание 4. В случае, когда $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, тогда $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами.

Теорема 2. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любых чисел λ и μ справедливы соотношения:*

1. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ – ***распределительное*** *свойство* ***числового множителя*** *относительно суммы векторов.*

2. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$ – ***распределительное*** *свойство* ***векторного множителя*** *относительно суммы чисел.*

3. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ – ***сочетательное*** *свойство* ***числовых множителей***.

Замечание 1. Из установленных свойств следует, что векторную сумму можно преобразовать по тем же правилам, что и алгебраическую, то есть общий скалярный множитель можно выносить за скобки, раскрывать скобки, приводить подобные члены, переносить члены из одной части равенства в другую с обратным знаком, группировать.

Определение. *Разностью двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который нужно сложить с вектором $\vec{b}$, чтобы получить вектор $\vec{a}$, то есть $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, если $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Разность $(\vec{a} - \vec{b})$ строится следующим образом (рис. 5): векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ приводим к общему началу O**,** тогда разность есть отрезок, соединяющий их концы и направленный из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, т.е. является диагональю параллелограмма.

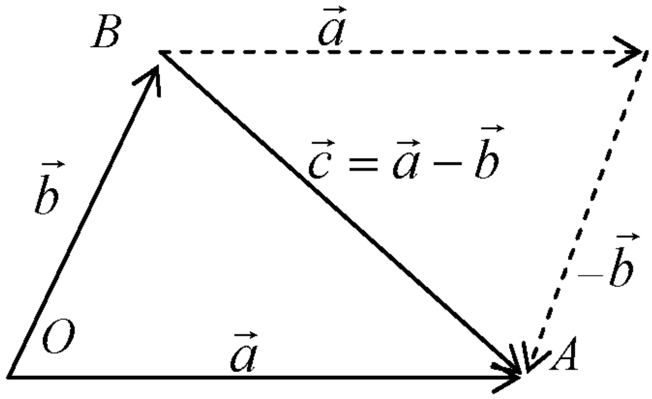

Рис. 5

Разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно определить следующим образом: разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Следовательно, вычитание (разность) векторов есть операция, обратная сложению. Поэтому свойства вычитания векторов следуют из свойств сложения векторов.

Замечание 2. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо неравенство (неравенство треугольника) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены.

Замечание 3. Для любых n векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ справедливо неравенство $\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\ \vec{a}_n\right| \le \left|\vec{a}_1\right| + \left|\vec{a}_2\right| + ... + \left|\vec{a}_n\right|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда направления векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ совпадают.

Замечание 4. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо неравенство $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{b}-\vec{a}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в противоположные стороны.

3. Проекция вектора на ось

Определение. *Осью* называется прямая, на которой указано положительное направление. Ось Ox определяется единичным вектором $\vec{e}$ (рис. 6).

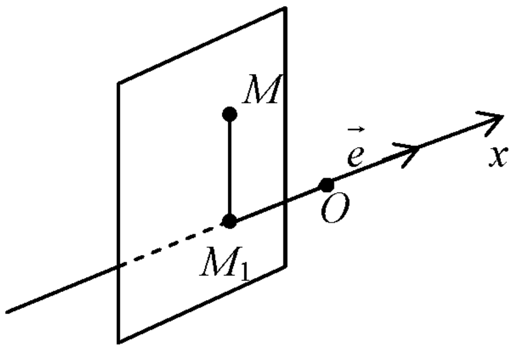

Рис. 6

Определение. *Проекцией точки* M на ось Ox называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из точки M на данную ось.

Определение. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox называется алгебраическая величина отрезка A_1B_1, где A_1 и B_1 проекции точек A и B на ось Ox (рис. 7), т. е. длина отрезка A_1B_1 берется со знаком «+», если направление отрезка A_1B_1 совпадает с направлением Ox, и со знаком «-», если эти направления противоположны.

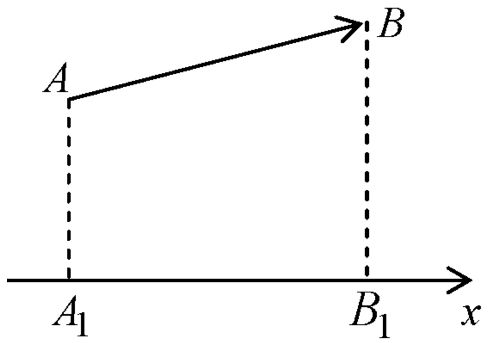

Рис. 7

Проекцию $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox обозначают $A_1B_1 = np_{Ox}\overrightarrow{AB}$.

Определение. За угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью Ox принимается угол α $(0 < \alpha < \pi)$, на который нужно повернуть кратчайшим образом ось Ox около точки A_1 до совмещения ее с вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$.

Теорема 3. *Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.*

Доказательство:

1. Пусть α – острый угол (рис. 8), из ΔA_1CB_1 имеем

$$np_{Ox}\overrightarrow{AB} = |A_1B_1| = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha.$$

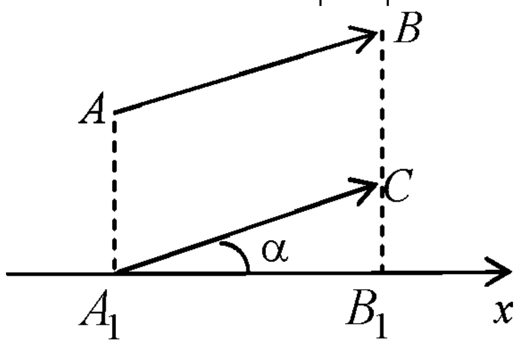

Рис. 8

2. Пусть α – тупой угол (рис. 9), из ΔA_1CB_1 имеем

$$np_{Ox}\overrightarrow{AB} = -|A_1B_1| = -|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\pi - \alpha) = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha.$$

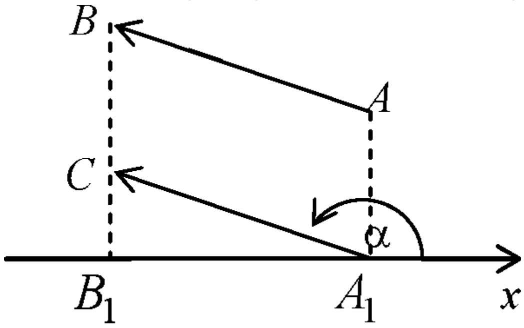

Рис. 9

3. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ – единичный вектор, тогда

$$np_{Ox}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha.$$

Теорема 4. *При умножении вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на число* λ *его проекция на ось умножается на то же число.*

Доказательство. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ составляет с осью Ox угол α и $\lambda > 0$, тогда вектор $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ составляет с осью Ox также угол α, а вектор $(-\lambda \cdot \overrightarrow{AB})$ составляет с осью Ox угол $(\pi - \alpha)$. Тогда, используя по теореме 1, имеем:

1. $np_{Ox}(\lambda \cdot \overrightarrow{AB}) = |\lambda \cdot \overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha = \lambda \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha = \lambda \cdot np_{Ox}\overrightarrow{AB}.$

2. $np_{Ox}(-\lambda \cdot \overrightarrow{AB}) = |-\lambda \cdot \overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\pi - \alpha) = \lambda \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\pi - \alpha) =$

$= -\lambda \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha = -\lambda \cdot np_{Ox}\overrightarrow{AB}.$

Для случая, когда $\lambda < 0$, доказательство проводится аналогично.

Теорема 5. *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций данных векторов на ту же ось.*

Замечание 1. Методом математической индукции теорема 4 доказывается для любого числа слагаемых (векторов).

Замечание 2. Основные линейные свойства проекции вектора на ось (теоремы 4 и 5) заключаются в том, что линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов на произвольную ось.

4. Линейная комбинация векторов. Координаты вектора

Определение. Линейной комбинацией n векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ называется выражение вида

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n, \tag{1}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$ – любые действительные числа.

Определение. Векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов (1) обращается в нуль, т.е. имеет место равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}, \tag{2}$$

где хотя бы одно из чисел $\lambda_i \neq 0,\quad i = \overline{1,n}$.

Другими словами, векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ линейно зависимы, если хотя бы один из векторов данной системы можно выразить через остальные.

Определение. Векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ называются ***линейно независимыми***, если равенство (2) возможно лишь в случае, когда все $\lambda_i = 0,\quad i = \overline{1,n}$.

Другими словами, векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ линейно независимы, если никакой вектор $\vec{a}_k$ нельзя выразить через остальные.

Теорема 6. *Если среди векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ хотя бы один является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.*

Следствие: Один вектор $\vec{a}$ образует систему векторов линейно независимую, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, и линейно зависимую, если $\vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 7. *Если среди n векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ какие-либо $(n-1)$ векторов линейно зависимы, тогда и все и векторов линейно зависимы.*

Замечание 1. Теорема 7 справедлива, если среди n векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ зависимыми являются $(n-k)$ векторов, (где $k<n-1$).

Замечание 2. Если система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ линейно независима, то любая часть этой системы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ $(k<n)$ тоже линейно независима.

Из рассмотренного выше следует, что если система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_k$ линейно зависима, то любая пополненная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}, \ldots, \vec{a}_n$ тоже линейно зависима.

Теорема 8. *Два ненулевых вектора на прямой* (R)*, на плоскости* (R^2) *и в пространстве* (R^3) *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство (***необходимость***): Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Докажем, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то существуют числа λ_1 и λ_2, одновременно не равные нулю, так что справедливо равенство

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\vec{0}. \tag{3}$$

Для определенности, пусть $\lambda_1\neq 0$, тогда из (3) имеем $\vec{a}=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}$, т.е. вектор $\vec{a}$ равен произведению вектора $\vec{b}$ на число $\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$. В силу определения произведения вектора на число имеем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то есть необходимость доказана.

Доказательство (***достаточность***): Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Докажем, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Отметим, что если хотя бы один из векторов нулевой, то эти векторы линейно зависимы в силу теоремы 6. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и умножения вектора на число вытекает коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\lambda\vec{b}$, причем число λ такое, что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, или, что то же самое, что

$$1\cdot\vec{a}+(-\lambda)\vec{b}=0. \tag{4}$$

Так как из двух чисел 1 и $(-\lambda)$ одно заведомо отлично от нуля, то равенство (4) означает линейную зависимость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. достаточность доказана.

Следствие 1. Любой вектор $\vec{a} \neq 0$ на прямой (R) линейно независим.

Следствие 2. Любые два неколлинеарных вектора $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$ линейно независимы на плоскости (R^2) и пространстве (R^3).

Следствие 3. Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора (так как в противном случае векторы линейно зависимы).

Теорема 9. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство (*необходимость*): Пусть три вектора $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ линейно зависимы. Докажем, что $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – компланарны.

Поскольку векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2$ и λ_3, одновременно не равные нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}. \qquad (5)$$

Для определенности, пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда из (5) имеем

$$\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{c}. \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует, что вектор $\vec{a}$ есть сумма векторов $\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{b}$ и $\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\vec{c}$, т.е. вектор $\vec{a}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на данных двух векторах (рис. 10). А это означает, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ лежат в одной плоскости, то есть они компланарны. Необходимость доказана.

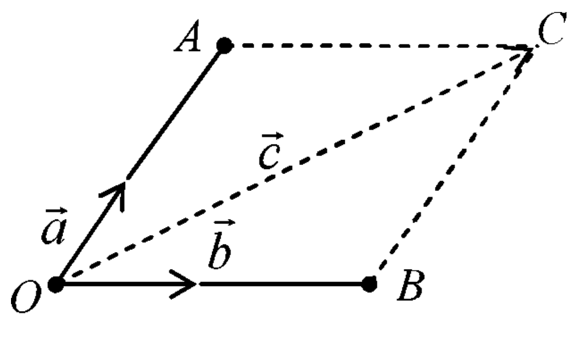

Рис. 10

Доказательство (*достаточность*): Пусть векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Докажем, что эти векторы линейно зависимы.

Отметим, что если среди векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ любая пара из этих векторов коллинеарна, тогда в силу теоремы 8 эта пара векторов линейно зависима, а в силу теоремы 7 три вектора $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ линейно зависимы.

Пусть в тройке векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ни одна пара векторов не коллинеарна (в частности нет нулевых векторов; см. следствие 3 теоремы 8, так как в паре не коллинеарных векторов не могут быть нулевые векторы). Перенесем векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ в одну плоскость и приведем к общему началу O.

Тогда вектор $\vec{c}$ (или вектор $\vec{a}$, или вектор $\vec{b}$) находим по правилу параллелограмма $\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, то существуют числа $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ такие, что $\overrightarrow{OA}=\lambda_1\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\lambda_2\vec{b}$. А значит, $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$, или

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+(-1)\vec{c}=\vec{0}. \qquad (7)$$

Так как одно из трех чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ (-1)$ заведомо отлично от нуля, то равенство (7) является условием линейной зависимости векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, т. е. достаточность доказана.

Следствие 1. Для любых двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого третьего вектора $\vec{c}$, лежащего в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, существуют числа λ_1 и λ_2, такие, что справедливо равенство $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$.

Следствие 2. Любые три некомпланарных вектора $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве (R^3) линейно независимы.

Следствие 3. Среди трех некомпланарных векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ не может быть ни одного нулевого вектора и не может быть двух коллинеарных векторов.

Теорема 10. *Любые четыре вектора в пространстве* (R^3) *линейно зависимы.*

Следствие. Для любых трех некомпланарных векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ и любого вектора $\vec{d}$ существуют три числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, такие, что справедливо равенство $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$.

Определение. Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ образует базис пространства, если:

1) система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ линейно независима;

2) любой вектор пространства $\vec{d}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$, то есть $\vec{d} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, причем это представление единственно.

Определение. Если система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ – базис некоторого пространства и вектор

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n, \qquad (8)$$

то числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ ...,\ \lambda_n$ называются координатами вектора $\vec{d}$ в данном базисе, а равенство (8) – разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$.

Теорема 11. *Любой ненулевой вектор $\vec{a}$ на прямой (R) образует базис R.*

Теорема 12.

1. *Любые два лежащих в данной плоскости неколлинеарных вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ образуют базис на этой плоскости (R^2).*

2. *Любые три некомпланарных вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, и $\vec{c} \neq \vec{0}$ образуют базис в пространстве (R^3).*

Теорема 13. *При сложении двух векторов $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ их координаты (относительно любого базиса) складываются, а при умножении вектора $\vec{d}_1$ на любое число k все его координаты умножаются на это число.*

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что основное значение базиса состоит в следующем: линейные операции над векторами в данном базисе становятся линейными операциями над числами – координатами этих векторов в данном базисе.

5. Системы координат

Рассмотрим на прямой (R) некоторую точку O и вектор $\vec{e} \neq \vec{0}$, на плоскости (R^2) некоторую точку O и два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, в пространстве (R^3) некоторую точку O и три некомпланарных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Определение. *Афинной*, или *общей декартовой*, системой координат в некотором пространстве называется совокупность, состоящая из некоторой точки O и базиса этого пространства. Точка O называется началом системы координат.

На прямой (R) афинная система координат – это совокупность $(O, \vec{e})$ – O начало координат, $\vec{e}$ – любой ненулевой вектор (базис R).

На плоскости (R^2) афинная система координат – это совокупность $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – O начало координат, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – два неколлинеарных вектора (базис R^2).

В пространстве (R^3) афинная система координат – это совокупность $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – O начало координат, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ – три некомпланарных вектора (базис R^3).

Определение. Прямые, проходящие через начало координат O в направлении базисных векторов, называются осями координат. Прямая Ox называется осью абсцисс, прямая Oy – ось ординат и прямая Oz – ось аппликат.

Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Определение. Пусть M произвольная точка, O – начало координат. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M.

Определение. Координаты радиус-вектора точки M по отношению к началу координат называются координатами точки M в рассматриваемой системе координат.

Первая координата называется абсциссой, вторая – ординатой, третья – аппликатой точки M в пространстве (R^3). На плоскости (R^2) точка M имеет две координаты – абсциссу и ординату; на прямой (R) точка M имеет одну координату – абсциссу.

Отметим, что при заданной системе координат на прямой (R), плоскости (R^2) и в пространстве (R^3) координаты каждой точки определены однозначно. С другой стороны, каждому числу найдется одна единственная точка прямой (R), для которой это число является координатой; для каждой упорядоченной пары чисел найдется одна единственная точка плоскости (R^2), для которой эти числа являются координатами; для каждой упорядоченной тройки чисел найдется одна единственная точка пространства (R^3), для которой эти числа являются координатами.

Таким образом, система координат на прямой (R), плоскости (R^2) и в пространстве (R^3) определяет соответствие между точками соответствующих пространств и соответствующими упорядоченными наборами чисел.

Определение. Базис некоторого пространства называется ортонормированным, если базисные векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и имеют длину, равную единице.

Систему векторов ортонормированного базиса на прямой (R) обозначают $\vec{i}$, на плоскости (R^2) – $(\vec{i}, \vec{j})$, в пространстве (R^3) – $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Определение. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется прямоугольной декартовой системой координат.

Определение. Декартовыми прямоугольными координатами точки M называют координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, относительно прямоугольной декартовой системы координат.

Так, в пространстве (R^3) относительно прямоугольной декартовой системы координат для радиус-вектора точки $M(x, y, z)$ справедлива формула $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$, на плоскости (R^2) для радиус-вектора точки $M(x, y)$ имеет место формула $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$, на прямой (R) $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i}$.

Отметим, что в заданной системе координат (фиксированном начале координат и ортонормированном базисе) координаты любой точки определены однозначно.

6. Геометрический смысл декартовых координат точки

Рассмотрим случай прямой (R). Пусть $M(x)$ – произвольная точка прямой, O – начало координат. Тогда с одной стороны $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i}$, а с другой стороны точка M на прямой (R) имеет координату (x), при этом $x = \pm\left|\overrightarrow{OM}\right|$ (плюс выбираем в случае, когда векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{i}$ одинаково направлены, и знак минус – если эти векторы имеют противоположные направления).

Итак, имеем:

1. Точки, лежащие на прямой (R) – ось x, имеют координаты (x).

2. Для любой точки M на прямой её абсцисса (x) совпадает с абсциссой проекции точки M на ось x (она равна x).

3. Если M_o – проекция точки M на ось x, то $x_o = \pm\left|\overrightarrow{OM}\right|$, где знак «+» («-») соответствует одинаковому (противоположному) направлению вектора $\overrightarrow{OM}$ с ортом координатной оси (Ox).

Рассмотрим случай плоскости (R^2) (рис. 11). Ось Ox (абсцисс) обозначают обычно горизонтальной, ось Oy (ординат) – вертикальной прямой. Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x, y)$. Через точку M проведем прямые l_1 и l_2 перпендикулярно осям x и y соответственно. Тогда точка M_1 – основание перпендикуляра l_1, проходящего через точку M, а M_2 – основание перпендикуляра l_2, проходящего через точку M.

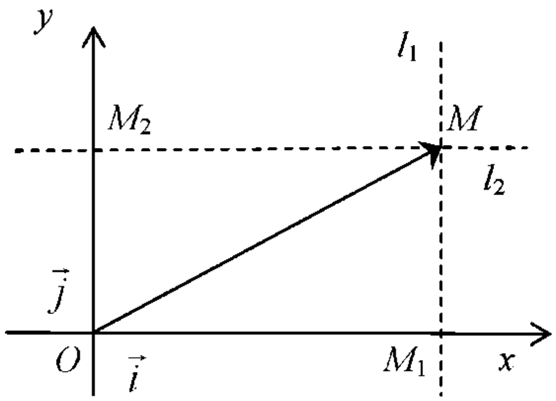

Рис. 11

Тогда, с одной стороны - $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$, а с другой – $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

Так как $\overrightarrow{OM_1} = x\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\cdot\vec{j}$, то во-первых, точка M_1 имеет координаты $(x, 0)$, а точка M_2 – $(0, y)$; во-вторых, $x = \pm\left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $y = \pm\left|\overrightarrow{OM_2}\right|$ (плюс выбирается в случае одинаковой направленности векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$, или $\overrightarrow{OM_2}$ и $\vec{j}$, а знак минус – если эти векторы имеют противоположные направления).

Итак, имеем:

1. Точки, лежащие на оси Ox (абсцисс), имеют координаты $(x, 0)$, а точки, лежащие на оси Oy (ординат) – $(0, y)$.

2. Для любой точки $M(x, y)$ на плоскости ее абсцисса является

абсциссой проекции точки M на ось Ox, а ордината – ординатой проекции точки M на ось Oy.

3. Если M_1 и M_2 - проекции точки $M_o(x_o, y_o)$ на оси x и y, то $x_o = \pm\left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $y_o = \pm\left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, где знаку «+» («-») соответствует одинаковая (противоположная) направленность векторов $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ с ортом соответствующей координатной оси.

Определение. Множество точек, у которых одна из координат постоянная, называются координатными линиями. Координатная линия, для точек (x, y) которой $x = x_o = const$, будет прямой l_{x_o}, перпендикулярной оси x и проходит через точку $(x_o, 0)$ этой оси. Координатная линия $y = y_o = const$ будет прямой l_{y_o}, перпендикулярной оси y и проходящей через точку $(0, y)$ этой оси. Следовательно, $M_o(x_o, y_o)$ есть точка пересечения перпендикулярных прямых l_{x_o} и l_{y_o}, а, следовательно, по теореме Пифагора $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = x_o^2 + y_o^2$.

Рассмотрим случай пространства (R^3):

Теорема 14. *Декартовы прямоугольные координаты вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{d}$ в пространстве (R^3) равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy и Oz соответственно.*

Определение. Множество точек пространства (R^3), у которых одна из координат постоянна, называется координатными поверхностями.

Так, координатная поверхность P_{x_o} : $x = x_o = const$ есть плоскость, перпендикулярная оси x и проходящая через точку $(x_o, 0, 0)$ оси; координатная поверхность P_{y_o} : $y = y_o = const$ есть плоскость, перпендикулярная оси y и проходящая через точку $(0, y_o, 0)$ оси; координатная поверхность P_{z_o} : $z = z_o = const$ есть плоскость, перпендикулярная оси z и проходящая через точку $(0, 0, z_o)$ оси. Плоскости P_{x_o}, P_{y_o}, P_{z_o} при $x_o = y_o = z_o = 0$ называют координатными плоскостями и обозначают соответственно yOz, xOz, xOy - указывая координатные оси, через которые проходят данные плоскости (рис. 12).

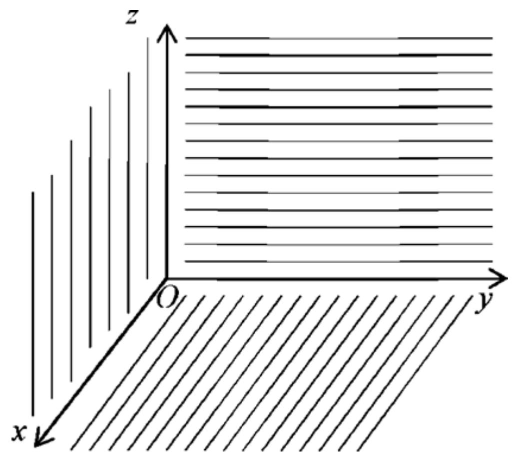

Рис. 12

Таким образом, всякую точку пространства $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ можно рассматривать как точку пересечения трех взаимно перпендикулярных плоскостей P_{x_o}, P_{y_o}, и P_{z_o}, а, следовательно, на основании теоремы Пифагора имеем $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$.

Теорема 15. *Пусть* $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ *и* $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2$ *– координаты начала и конца вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$, *то координатами вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *будут* $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

Замечание 1. Если $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ – произвольные точки плоскости (R^2), то координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ будут $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$.

Замечание 2. Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ – произвольные точки прямой (R), тогда координатой вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ будет $(x_2 - x_1)$.

Замечание 3. Применяя теорему Пифагора к параллелепипеду с диагональю $\overrightarrow{M_1M_2}$, стороны которого параллельны координатным осям, получим $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

А так как $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ – расстояние $d(M_1M_2)$ между точками M_1 и M_2, то $d(M_1M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – расстояние между точками $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2$ в пространстве.

Для плоскости (R^2) расстояние между точками $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ определяется как $d(M_1M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Для прямой (R) расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ определяется по формуле $d(M_1M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$.

Замечание 4. Пусть α, β, γ – углы наклона вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{d}$ (теорема 14) к осям Ox, Oy и Oz. Тогда для координат x, y *и* z вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{d}$ имеем (из прямоугольного параллелепипеда)

$$x=|d|\cdot\cos\alpha,\ \ y=|d|\cdot\cos\beta,\ \ z=|d|\cdot\cos\gamma \tag{9}$$

и $|\vec{d}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Откуда имеем

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{10}$$

Числа $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – называются направляющими косинусами вектора $\vec{d}$, формулы (10) – выражение направляющих косинусов вектора $\vec{d}$ через координаты этого вектора.

Возводя в квадрат обе части равенств (10) и складывая, получим, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице. Итак, если $\vec{d}$ – произвольный вектор, то $\overrightarrow{e_{\vec{d}}}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$; $\left|\overrightarrow{e_{\vec{d}}}\right|=1.$

В силу того, что любой вектор $\vec{d}$ однозначно определяется заданием трех его координат, то из (9) имеем, что вектор $\vec{d}$ однозначно определяется заданием его длины и трех направляющих косинусов (или величин углов α, β и γ).

Если вектор $\vec{d}$ рассматриваем на плоскости (R^2) (рис. 13),

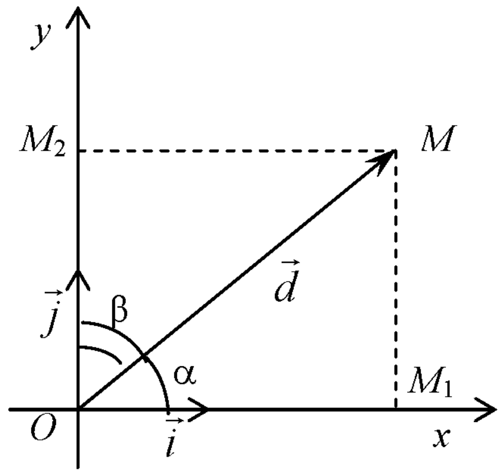

Рис. 13

то направляющие косинусы вектора $\vec{d}$: $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, или, учитывая, что $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, имеем $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, а $\cos\beta = \cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Отметим, что имеет место следующее равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1,$$

или $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ – основное тригонометрическое равенство. В силу того, что любой вектор $\vec{d}$ на плоскости однозначно определяется заданием двух его координат, то вектор $\vec{d}$ однозначно определяется заданием его длины и двух направляющих косинусов или заданием его длины и одного направляющего косинуса (так как $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$).

Итак, если $\vec{d}$ – произвольный вектор, то

$$\overrightarrow{e_{\vec{d}}} = \frac{\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|} = (\cos\alpha,\ \cos\beta) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha); \quad \left|\overrightarrow{e_{\vec{d}}}\right| = 1.$$

В случае, когда вектор $\vec{d}$ рассматриваем на прямой (R), то направляющий косинус любого вектора $\vec{d}$ равен 1, так как угол $\alpha = 0$. Таким образом, и для случая прямой (R) имеет место равенство $\cos^2\alpha = 1$, т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.

Теорема 16. *При сложении двух (либо конечного числа) векторов их проекции на произвольную ось складываются, а при умножении вектора на число его проекция на произвольную ось умножается на это число.*

7. Преобразования систем координат

Для решения ряда задач, связанных с исследованием геометрических образов, возникает необходимость замены базиса, то есть перехода от одной системы координат к другой. Такой переход дает значительное упрощение исследования – расчеты, удобная форма записи для анализа геометрического образа.

Поэтому возникает задача преобразования координат, суть которой состоит в следующем: зная координаты точки (вектора) в одной системе координат (ее называют старой), найти ее координаты в другой (новой) системе координат.

Из множества различных преобразований систем координат линейные преобразования представляют особый интерес, так как в этом случае декартова система координат переходит в декартову. Рассмотрим преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей координат и повороте осей координат.

Преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей. Пусть дана декартова система координат на плоскости с началом в точке O, а $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты осей x и y, а $O_1(a, b)$ – начало новой декартовой системы координат с осями x_1 и y_1, орты которых $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$. Если M – произвольная точка, координаты которой (x, y) в системе Oxy и (x_1, y_1) в системе $O_1x_1y_1$.

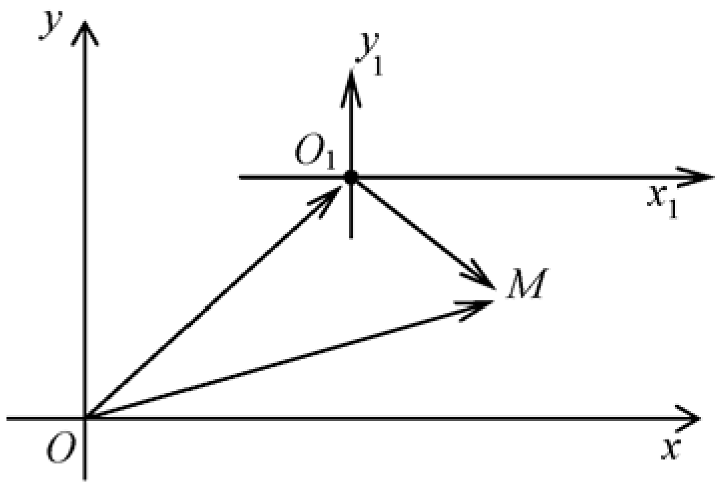

Рис. 14

Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ и $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, $y = y_1 + b$, $\overrightarrow{O_1M} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$, тогда в силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b. \end{cases} \qquad (11)$$

Формулы (11) – формулы преобразования координат при параллельном переносе координатных осей.

Аналогично получаем формулы, выражающие старые координаты точки через новые при параллельном переносе координатных осей в пространстве, которые имеют вид

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b, \\ z = z_1 + c. \end{cases}$$

Заметим, что координаты любого вектора $\vec{a} = (x, y)$ или $\vec{a} = (x, y, z)$ на плоскости или в пространстве, при параллельном переносе начала координат не изменяются, ибо при таком преобразовании система координат не меняет базис $\vec{i}, \vec{j}$ или $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ на плоскости или в пространстве.

Преобразование декартовых координат при повороте осей координат. Пусть две декартовы прямоугольные системы координат плоскости имеют одинаковое начало O и разные направления осей (рис. 15). Пусть угол между осями O_x и O_{x_1} равен α, а произвольная точка M имеет координаты (x, y) и (x_1, y_1) в старой и новой системе координат (соответственно).

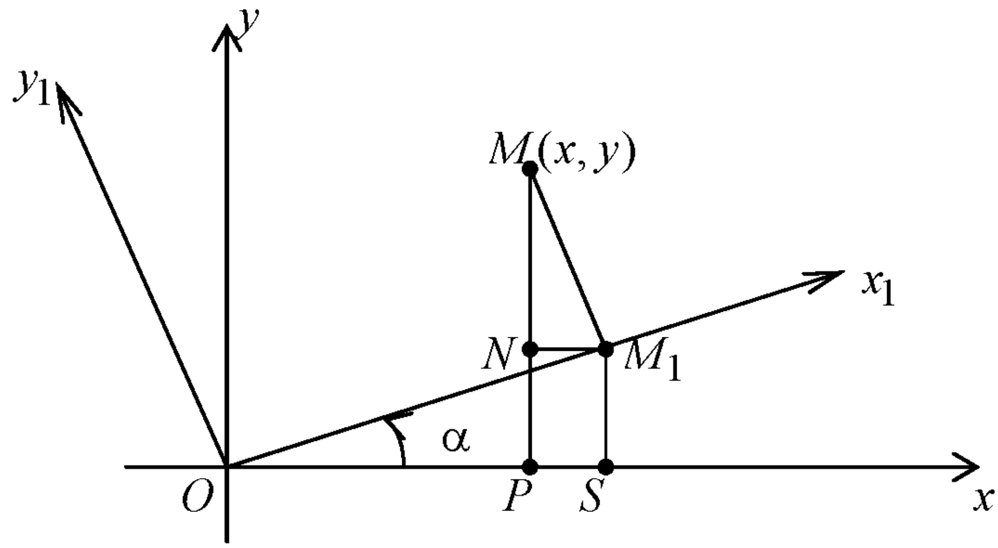

Рис. 15

Так как M имеет координаты (x, y) в старой системе координат, то с одной стороны имеем

$$x = OP = OS - PS. \tag{12}$$

С другой стороны из прямоугольного треугольника ΔOSM_1

$$OS = OM_1 \cdot \cos\alpha = x_1 \cdot \cos\alpha, \tag{13}$$

а из прямоугольного треугольника ΔMNM_1 имеем

$$PS = NM_1 = y_1 \cdot \sin\alpha. \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в формулу (12), получим

$$x = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha. \tag{15}$$

Аналогично, так как M имеет координаты $(x,\ y)$ в старой системе координат, то с одной стороны имеем:

$$y = PM = PN + NM. \tag{16}$$

С другой стороны из прямоугольных треугольников ΔOSM_1 и ΔMNM_1 имеем

$$PN = M_1S = x_1 \cdot \sin\alpha;\ M_1N = y_1 \cdot \cos\alpha. \tag{17}$$

Тогда, подставляя (17) в формулу (16), получим

$$y = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha. \tag{18}$$

Таким образом, формулы преобразования координат в случае поворота осей координат вокруг начала задаются формулами (15) и (18), то есть имеют вид

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha, \\ y = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha. \end{cases} \tag{19}$$

8. Скалярное произведение двух векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных ненулевых вектора пространства, приведенных к общему началу – точке O (рис. 16).

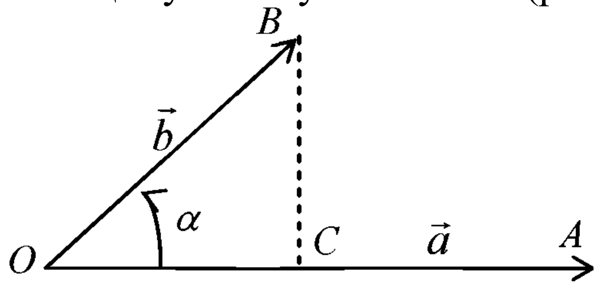

Рис. 16

Определение. За угол между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принимают наименьший угол AOB между этими векторами.

Из определения следует, что $0 \le \alpha \le \pi$. Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то считается, что угол α не определён.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают как $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ или $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = c$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha, \tag{20}$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отметим, что проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ есть $OC = OB \cdot \cos\alpha$, т.е. $\text{пр}_{a}\vec{b} = \overrightarrow{OC} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$, поэтому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left(\left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha\right) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{a}\vec{b}, \tag{21}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \left(|\vec{a}| \cdot \cos\alpha\right) = \left|\vec{b}\right| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) устанавливают связь между скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ (или вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$).

Свойства скалярного произведения векторов

1. Переместительное свойство скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Справедливость этого равенства следует из определения скалярного произведения.

2. Распределительное свойство скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

3. Сочетательное свойство скалярного произведения относительно скалярного множителя. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа λ справедливо равенство $\vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т.е. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

5. Если один из векторов скалярного произведения равен нулю, то скалярное произведение равно нулю. Доказательство следует из определения скалярного произведения векторов.

6. Если отличные от нуля векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

7. Если скалярное произведение двух отличных от нуля векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю, то они взаимно перпендикулярны.

Таким образом, получили, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не равны нулю, то равенство нулю их скалярного произведения является необходимым и достаточным условием перпендикулярности этих векторов.

8. Скалярное произведение ортов $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Так как орты $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ – единичные векторы и попарно перпендикулярны, то из определения скалярного произведения имеем:

$$\vec{i}^{\,2} = 1,\ \vec{j}^{\,2} = 1,\ \vec{k}^{\,2} = 1,\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Замечание 1. Доказанные свойства скалярного произведения имеют фундаментальное значение, суть которого состоит в следующем: установленные свойства позволяют при скалярном умножении векторных величин выполнять действия почленно, не заботясь при этом о порядке векторных множителей и сочетая числовые множители. Другими словами, скалярное умножение векторных величин аналогично действию над многочленами (умножение многочлена на многочлен, вынесение общего множителя, возведение в квадрат).

Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Теорема 17. *В любой декартовой системе координат в* R^3 *скалярное произведение векторов* $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, *заданных координатами, определяется по формуле*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2.$$

Замечание 1. Скалярное произведение векторов в координатной форме на плоскости (R^2) имеет вид $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$, а на числовой прямой (R) $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2$.

Замечание 2. Если в теореме 17 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и отличны от 0, то $\vec{b} = \lambda\cdot\vec{a}$ или $x_2 = \lambda\cdot x_1$, $y_2 = \lambda\cdot y_1$, $z_2 = \lambda\cdot z_1$, при этом если $\lambda > 0$, то $\angle\alpha = 0$, а если $\lambda < 0$, то $\alpha = \pi$.

Теорема 18. *Пусть* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *– ортонормированный базис в* R^3, *а векторы* a *и* b *заданы своими координатами* $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, *тогда* $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

9. Приложения скалярного произведения

1. *Угол между векторами.* Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве R^3 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ следует, что

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \text{ или } \cos\alpha = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (23)$$

Формула (23) определяет угол между векторами в R^3.

Отметим, что если векторы $\vec{a}(x_1, y_1)$ *и* $\vec{b}(x_2, y_2)$ заданы на плоскости R^2, то формула, определяющая угол между данными векторами имеет вид:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (24)$$

Следствие. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

2. *Направление вектора.* Полагая в формуле (23) последовательно:

1) $\vec{b} = \vec{i}$ (т.е. $|\vec{b}| = 1;\ \ x_2 = 1,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0$);

2) $\vec{b} = \vec{j}$ (т.е. $|\vec{b}| = 1;\ \ x_2 = 0,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0$);

3) $\vec{b} = \vec{k}$ (т.е. $|\vec{b}| = 1;\ \ x_2 = 1,\ y_2 = 0,\ z_2 = 1$),

получим

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (25)$$

α – угол вектора $\vec{a}$ с осью Ox;

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (26)$$

β – угол вектора $\vec{a}$ с осью Oy;

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (27)$$

γ – угол вектора $\vec{a}$ с осью Oz.

Формулы (25)–(27) задают направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ (направление вектора) по его координатам в R^3.

Заметим, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Аналогично для плоскости R^2, полагая в формуле (24) последовательно:

1) $\vec{b} = \vec{i}$ (т.е. $|\vec{b}| = 1;\ \ x_2 = 1,\ y_2 = 0$);

2) $\vec{b} = \vec{j}$ (т.е. $|\vec{b}| = 1;\ \ x_2 = 0,\ y_2 = 1$),

получим

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}. \qquad (28)$$

α – угол вектора $\vec{a}$ с осью Ox;

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}. \qquad (29)$$

β – угол вектора $\vec{a}$ с осью Oy.

Формулы (28) и (29) задают направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ (направление вектора) по его координатам на R^2.

Заметим, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

На плоскости для углов α и β справедливо равенство $\alpha+\beta=90°$ или $\beta = 90° - \alpha$ и, следовательно, из формулы (29) имеем, что $\cos\beta = \sin\alpha$. Тогда направляющие косинус и синус вектора $\vec{a}$ (направление вектора) на плоскости R^2 по его координатам определяются по формулам $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$ и $\sin\alpha = \dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$, т. е. направление вектора на плоскости R^2 однозначно определяется только одним углом.

3. *Проекция вектора на вектор (на ось).* Из формул (21) и (22) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{a}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ имеем

$$\text{пр}_{a}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \text{ или } \text{пр}_{a}\vec{b} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}, \qquad (30а)$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ или } \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}, \qquad (30б)$$

где $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.

Полагая в формуле (30а), последовательно, что:

1) $\vec{b} = \vec{i}$;

2) $\vec{b} = \vec{j}$;

3) $\vec{b} = \vec{k}$,

получим проекции вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ на координаты оси в пространстве (R^3), которые равны $\text{пр}_{\overline{Ox}}\vec{a} = \text{пр}_{\vec{i}}\vec{a} = x_1$, $\text{пр}_{\overline{Oy}}\vec{a} = \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a} = y_1$, $\text{пр}_{\overline{Oz}}\vec{a} = \text{пр}_{\vec{z}}\vec{a} = z_1$.

Аналогичные формулы справедливы для вектора $\vec{a}(x_1, y_1)$ на плоскости (R^2).

4. *Работа силы.* Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из точки O в точку A под действием силы $\vec{F}$. Тогда, если вектор $\vec{S}=\overrightarrow{OA}$ – перемещение материальной точки, а угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$ равен α, то работа A, которую совершает эта сила, находится по формуле

$$A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cdot\cos\alpha=\vec{F}\cdot\vec{S},$$

то есть работа A равна скалярному произведению силы на вектор перемещения.

Основные задачи на скалярное произведение векторов

1. *Определение модуля вектора.*

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2$ или $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

2. *Определение орта вектора.*

Поскольку $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\overrightarrow{a^{\circ}}$, то $\overrightarrow{a^{\circ}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$: орт вектора равен отношению этого вектора к его модулю.

3. *Определение угла между двумя направлениями (векторами) на плоскости и в пространстве.*

Пусть два направления определены векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, φ – угол между ними. Тогда по определению скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$. Откуда $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\overrightarrow{a^{\circ}}\cdot\overrightarrow{b^{\circ}}$. Итак, косинус между двумя направлениями равен скалярному произведению ортов этих направлений.

10. Векторное произведение двух векторов

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ с общим началом O (рис. 17) называется ***правой***, если при наблюдении из конца вектора $\vec{c}$ (третьего вектора) кратчайший поворот от $\vec{a}$ (первого) до $\vec{b}$ (второго) виден в положительном направлении (против хода часовой стрелки). В противоположном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***левой*** (рис. 18).

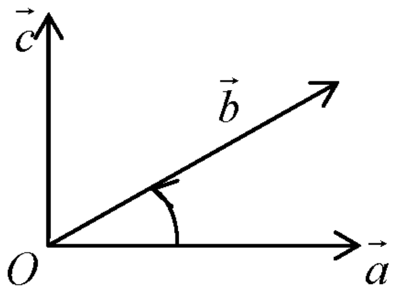

Рис. 17

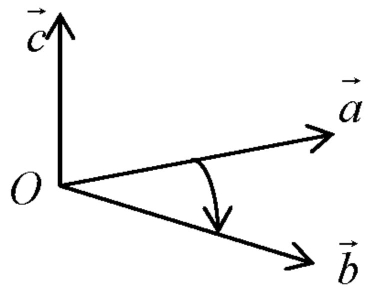

Рис. 18

Таким же образом, в соответствии с правой и левой тройками некомпланарных векторов определяются правая и левая системы координат. Если ортонормированный базис $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ – образует правую тройку, то декартова прямоугольная система координат называется правой. В противоположном случае декартова прямоугольная система координат называется левой.

Определение. Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (рис. 18), который:

1. Перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ (α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).
3. Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – образуют правую тройку.

Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ или $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \vec{c}$.

Итак, согласно определению имеем $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, если:

1. $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;
2. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$;
3. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – правая тройка.

Приведенное определение однозначно определяют векторное произведение, если сомножители (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$) – ненулевые. Если хотя бы один из векторов – нулевой вектор, то векторное произведение, по определению, есть нулевой вектор.

Из определения следует, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 19).

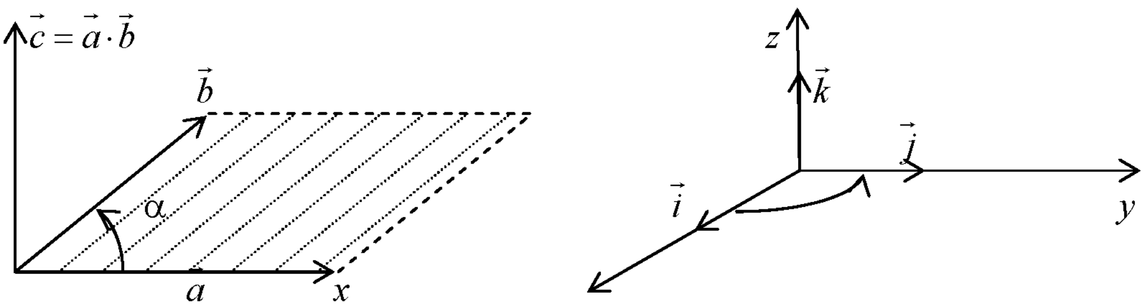

Рис. 19

Теорема 19. *Если $\vec{e}$ – орт векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$, а S – площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда справедливо равенство:*

$$\vec{a}\times\vec{b}=S\cdot\vec{e}.$$

Теорема 20. *Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.*

Теорема 21. *Пусть $\vec{b}$ – любой вектор, лежащий в плоскости P, $\vec{e}$ – единичный вектор, лежащий в плоскости P и перпендикулярный к вектору $\vec{b}$; $\vec{c}$ – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости P и направлен так, что тройка $\vec{e}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая, тогда для любого вектора $\vec{a}$, лежащего в плоскости P, справедливо равенство*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\text{пр}_{\vec{e}}\vec{a}\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\vec{c}.$$

Свойства векторного произведения

1. Векторное произведение антикоммутативно, т.е. всегда $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

2. Для любого $\lambda\in R$ и для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, справедливы равенства

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\lambda\vec{b},$$

то есть векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя. Другими словами, векторное произведение ассоциативно относительно скалярного множителя.

3. Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ не изменится, если один из сомножителей (например $\vec{a}$) заменить его проекцией $\vec{a}_1$ на прямую, лежащую в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярную вектору $\vec{b}$, то есть справедливо равенство

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{b}.$$

4. Для любых векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ справедливо равенство

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},$$

то есть векторное произведение обладает распределительным свойством относительно сложения.

Замечание. Данное свойство распределительности распространяется на произведение сумм любого конечного числа слагаемых.

5. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их векторного произведения.

Векторное произведение векторов, заданных координатами

Пусть в прямоугольной системе координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, то есть $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ *и* $\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Установленные свойства векторного произведения дают возможность выполнить умножение данных векторов по законам умножения многочленов с учетом свойств векторного умножения ортов $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. По свойству коллинеарности векторов имеем $\vec{i}\times\vec{i}=0,\quad \vec{j}\times\vec{j}=0,\quad \vec{k}\times\vec{k}=0$.

Рассмотрим векторные произведения $\vec{i}\times\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}$. Для векторного произведения $\vec{i}\times\vec{j}$ имеем, что параллелограмм, построенный на векторах $\vec{i},\ \vec{j}$ – квадрат *OACB* со стороной, равной единице, площадь которого равна единице (рис. 20). Тогда вектор $\vec{i}\times\vec{j}$ перпендикулярен векторам $\vec{i},\ \vec{j}$ и образует с ними правую тройку, а следовательно, векторное произведение $\vec{i}\times\vec{j}$ есть единичный вектор, направленный по оси Oz: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

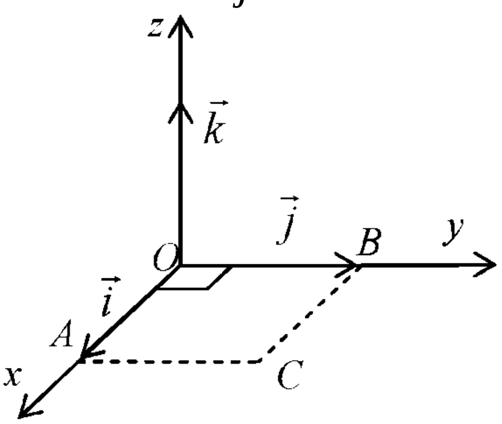

Рис. 20

Аналогичным образом находим, что $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

На основании **свойства 1** векторного произведения имеем, что $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$. Полученные равенства можно записать в таблицу, которая имеет следующий вид

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Замечание. Из установленных равенств для $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ можно использовать для практической работы следующее правило определения векторного произведения векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

1) Рассмотрим последовательность единичных векторов

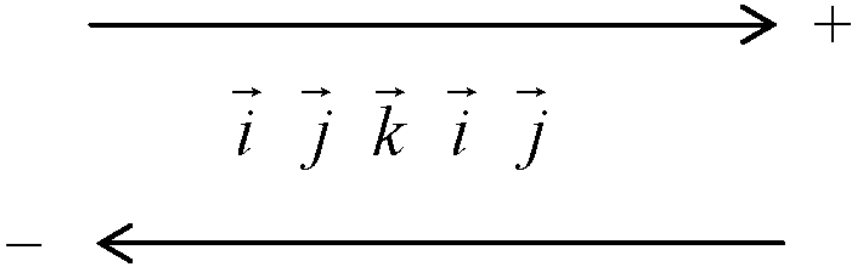

Рис. 21

2) Векторное произведение двух любых сложных векторов в последовательности (рис. 21) есть следующий вектор со знаком плюс в положительном направлении (слева направо), и со знаком минус в обратном направлении.

Замечание. Векторное произведение векторов i, j, k можно определить и по следующей схеме, изображенной на рис. 22.

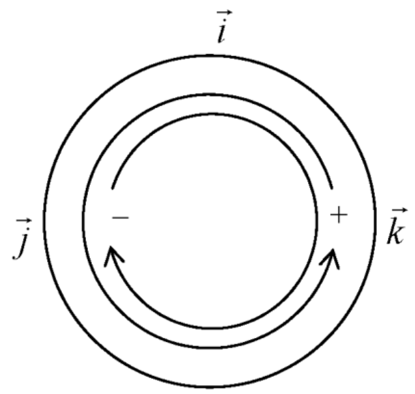

Рис. 22

Векторное произведение двух любых смежных векторов на окружности есть следующий вектор со знаком «+», если направление движения совпадает с положительным направлением (против хода часовой стрелки), и «-», если движение совпадает с отрицательным направлением (по ходу часовой стрелки).

Определим теперь векторное произведение векторов, заданных координатами. Пусть $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ *и* $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, тогда векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

11. Приложения векторного произведения

1. *Площадь параллелограмма и треугольника.* Из определения векторного произведения векторов ***a*** и ***b*** следует, что

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi, \text{ т.е. } S_{\square} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|,\ S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Из формул площадей параллелограмма и треугольника определяются элементы параллелограмма и треугольника - стороны, высоты, углы.

2. *Условие коллинеарности векторов*. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\left(\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\right)$.

3. *Момент силы.* Пусть сила $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ приложена в точке A, а O – некоторая точка. Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор $\overrightarrow{M}$ (рис. 23), который:

- проходит через точку O;
- перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
- $\left|\overrightarrow{M}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ON}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \sin\alpha$;
- тройка векторов $\overrightarrow{OA}$, $\vec{F}$ и $\overrightarrow{M}$ – правая.

Значит, $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ – момент силы, а величина момента силы равна величине силы, умноженной на расстояние ON точки O от прямой, вдоль которой действует сила.

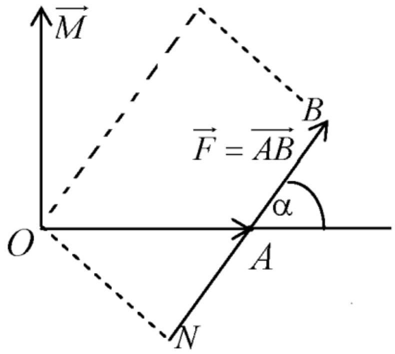

Рис. 23

4. *Линейная скорость вращения.* Пусть M – точка твердого тела – вращается с угловой скоростью v вокруг неподвижной оси, тогда скорость $\vec{v}$ точки M определяется формулой $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, где $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, O – некоторая неподвижная точка оси l (рис. 24).

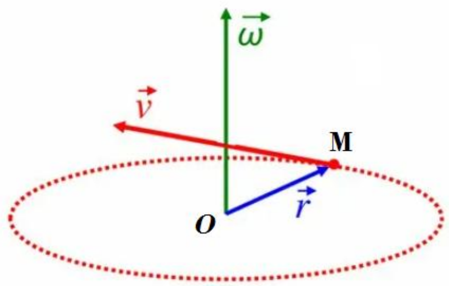

Рис. 24

Основные задачи на векторное произведение векторов

Преобразование выражений, содержащих векторное произведение векторов, доказательство тождеств и неравенств.

Задача 1. Дано: $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=15$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=96$. Вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Решение. Поскольку $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$, тогда из скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}=96=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ имеем, что $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=$ $=\dfrac{96}{8\cdot15}=\dfrac{4}{5}$, значит $\angle\alpha$ - острый. Тогда из основного тригонометрического тождества находим $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\dfrac{3}{5}$. Следовательно $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=8\cdot15\cdot\dfrac{3}{5}=72$.

Ответ: 72.

Задача 2. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$,аны: $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=15$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=96$**.** Вычислить $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$.

Решение. По определению модуля вектора имеем

$$\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|=\sqrt{\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(|\vec{a}|^2\cdot\sin 0-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\times\vec{b})+|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin(\vec{b}\times\vec{a})-|\vec{b}|^2\cdot\sin 0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\right)^2}=2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=24.$$

Ответ: 24.

Задача 3. Дано: $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=120^\circ$**.** Вычислить $\left(\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right)^2$..

Решение. Поскольку $\vec{c}^{\,2}=|\vec{c}|^2$, то в нашем случае имеем

$$\left(\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right)^2=\left(\left|\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right|\right)^2=$$

$$=\left(3|\vec{a}|^2\cdot\sin 0-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\times\vec{b})+9\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin(\vec{b}\times\vec{a})-3|\vec{b}|^2\cdot\sin 0\right)^2=$$

$$=\left(10\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\times\vec{b})\right)^2=300\text{; т.к. }\sin(\vec{a}\times\vec{b})=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: 300.

Задача 4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$**,** чтобы векторы $3\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ были коллинеарны.

Решение. Чтобы ненулевые векторы $3\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо, чтобы модуль их векторного произведения был равен нулю, т.е. $\left|\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right|=0$ или

$3|\vec{a}|^2\cdot\sin 0-9\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\times\vec{b})+|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin(\vec{b}\times\vec{a})-9|\vec{b}|^2\cdot\sin 0=0$,

$-10\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\times\vec{b})=0$. Так как $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$, то необходимо, чтобы $\sin(\vec{a}\times\vec{b})=0$, $\vec{a}\times\vec{b}=0$ или $\vec{a}\hat{\ }\vec{b}=\pi$. Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Ответ: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть коллинеарны.

12. Смешанное произведение трех векторов

Определение. Смешанным (скалярно-векторным) произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторов $(\vec{a}\times\vec{b})$ и $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения

Пусть $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$, $\overline{OC}=\vec{c}$ три неколлинеарных вектора, которые составляют правую тройку (рис. 25). Тогда вектор $(\vec{a}\times\vec{b})$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{c}$ по отношению к плоскости $OADB$ (плоскости, построенной на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

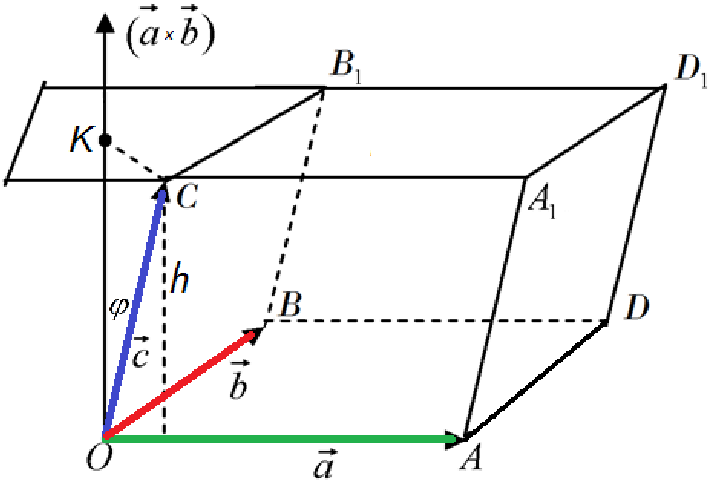

Рис. 25

Выясним геометрический смысл выражения $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ (рис. 25).

Имеем: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot \text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}$, $\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=h$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=-h$ для левой, где h – высота параллелепипеда. Получаем $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=S\cdot(\pm h)$, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V$, где V – объем параллелепипеда $OADBCA_1D_1B_1$, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «-», если они образуют левую тройку.

Замечание. Из полученных выше результатов следует, что если смешанное произведение положительно, то тройка векторов правая, отрицательное – тройка векторов левая.

Свойства смешанного произведения векторов

1. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

2. При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, т. е. $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=-[\vec{b}\times\vec{a}]\cdot\vec{c}$.

3. Операции скалярного и векторного умножений в смешанном произведении можно менять местами, т. е. для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}]$.

4. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения не меняет его величину (циклическое свойство): $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=[\vec{b}\times\vec{c}]\cdot\vec{a}=[\vec{c}\times\vec{a}]\cdot\vec{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

5. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в ортогональном базисе заданы своими координатами, т. е. $\vec{a}=\{x_1,\,y_1,\,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,\,y_2,\,z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3,\,y_3,\,z_3\}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (31)$$

Приложения смешанного произведения

1. *Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.*

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – правая (левая), если

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}>0 \; (\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}<0).$$

2. *Доказательство компланарности векторов.*

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, или

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; \text{векторы } \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

3. Вычисление объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды. Из геометрического смысла смешанного произведения имеем,

что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равен абсолютной величине смешанного произведения данных векторов:

$$V_{\square} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

$$V_{\triangle} = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Индивидуальная работа 1

Даны точки A, B, C, D.

Вариант	Координаты точек			
	A	B	C	D
1	$(1;\ -2;\ -1)$	$(0;\ -5;\ 4)$	$(3;\ -1;\ 3)$	$(-1;\ 0;\ 3)$
2	$(4;\ 5;\ 1)$	$(1;\ 0;\ -3)$	$(-2;\ 1;\ 5)$	$(0;\ 1;\ -4)$
3	$(1;\ 2;\ 0)$	$(3;\ 1;\ 4)$	$(0;\ 2;\ -1)$	$(-1;\ 3;\ -1)$
4	$(4;\ -5;\ 1)$	$(3;\ -1;\ 0)$	$(1;\ 0;\ 1)$	$(-2;\ 0;\ 1)$
5	$(3;\ -1;\ 0)$	$(4;\ 1;\ -2)$	$(2;\ 0;\ 3)$	$(-1;\ 0;\ 1)$
6	$(0;\ 3;\ 1)$	$(2;\ 1;\ 4)$	$(3;\ 1;\ 0)$	$(3;\ 2;\ 1)$
7	$(2;\ 0;\ -1)$	$(-1;\ 0;\ 3)$	$(1;\ 1;\ 1)$	$(-1;\ 2;\ -1)$
8	$(3;\ 4;\ 0)$	$(3;\ 2;\ 1)$	$(0;\ -1;\ 0)$	$(1;\ 2;\ -2)$
9	$(1;\ 1;\ 1)$	$(-1;\ 0;\ 3)$	$(-2;\ -1;\ 0)$	$(3;\ -3;\ 4)$
10	$(3;\ -5;\ 4)$	$(-3;\ -4;\ 0)$	$(-7;\ 0;\ 4)$	$(5;\ -6;\ 1)$
11	$(-1;\ 4;\ -1)$	$(3;\ 0;\ 4)$	$(1;\ 1;\ 2)$	$(-1;\ 3;\ -1)$
12	$(4;\ -3;\ -3)$	$(1;\ 4;\ 2)$	$(-3;\ 2;\ 1)$	$(0;\ 4;\ 0)$
13	$(0;\ 0;\ 1)$	$(3;\ 4;\ -1)$	$(2;\ -2;\ 3)$	$(1;\ -4;\ 1)$
14	$(2;\ 1;\ 3)$	$(-2;\ 4;\ -1)$	$(0;\ 0;\ 3)$	$(2;\ -1;\ 3)$
15	$(0;\ 3;\ 0)$	$(1;\ 1;\ 2)$	$(4;\ -2;\ 1)$	$(-1;\ 3;\ -1)$
16	$(0;\ 3;\ 1)$	$(4;\ 1;\ -2)$	$(1;\ 0;\ 1)$	$(-2;\ 0;\ 1)$
17	$(2;\ 0;\ -1)$	$(2;\ 1;\ 4)$	$(2;\ 0;\ 3)$	$(-1;\ 0;\ 1)$
18	$(3;\ 4;\ 0)$	$(-1;\ 0;\ 3)$	$(3;\ 1;\ 0)$	$(3;\ 2;\ 1)$
19	$(1;\ 1;\ 1)$	$(3;\ 2;\ 1)$	$(1;\ 1;\ 1)$	$(-1;\ 2;\ -1)$
20	$(3;\ -5;\ 4)$	$(-1;\ 0;\ 3)$	$(0;\ -1;\ 0)$	$(1;\ 2;\ -2)$
21	$(-1;\ 4;\ -1)$	$(-3;\ -4;\ 0)$	$(-2;\ -1;\ 0)$	$(3;\ -3;\ 4)$
22	$(4;\ -3;\ -3)$	$(3;\ 0;\ 4)$	$(-7;\ 0;\ 4)$	$(5;\ -6;\ 1)$
23	$(0;\ 0;\ 1)$	$(1;\ 4;\ 2)$	$(1;\ 1;\ 2)$	$(-1;\ 3;\ -1)$
24	$(2;\ 1;\ 3)$	$(3;\ 4;\ -1)$	$(-3;\ 2;\ 1)$	$(0;\ 4;\ 0)$
25	$(0;\ 3;\ 0)$	$(-2;\ 4;\ -1)$	$(2;\ -2;\ 3)$	$(-1;\ 3;\ -1)$

Задание 1. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Задание 2. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AC}$.

Задание 3. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BC}$.

Задание 4. Найти координаты вектора $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CB}$.

Задание 5. Найти координаты вектора $3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$.

Задание 6. Вычислить площадь треугольника ABC и внутренний угол B.

Задание 7. Вычислить площадь треугольника ACD и длину ее высоты, опущенной из вершины D.

Задание 8. Вычислить площадь треугольника ABD и длину ее высоты, опущенной из вершины D.

Задание 9. Вычислить площадь треугольника BCD и длину ее высоты, опущенной из вершины D.

Задание 10. Вычислить объем пирамиды $ABCD$ и длину её высоты, опущенной из вершины D.

Содержание

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания

Иванов Владимир Иванович

Электронное издание

Редактор И.Н. Крицына

Подписано в свет 23.09.2024. Регистрационный номер 57
Редакционно-издательский центр Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru