Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

В.И. Иванов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Электронное издание

Красноярск 2025

Рецензент:

С.К. Манасян, доктор технических наук, профессор кафедры физики и математики ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Иванов, В.И.

Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: методические указания / *В.И. Иванов*; Красноярский государственный аграрный университет. – Красноярск, 2025. – 35 с.

Подготовлено в соответствии с рабочими программами учебной дисциплины «Математика». Содержит краткое изложение основных вопросов теории, примеры применения теории для выполнения практических заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 20.03.01 «Техносферная безопасность», специалитету 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» очной и заочной форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Красноярского государственного аграрного университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называются дифференциальными. Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, проходящую через точку $O(0;\ 0)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной к любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ – уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x;\ f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f'(x)$, равняется $2x$. Таким образом, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$.

Следовательно, $y = \int 2x dx$, или

$$y = x^2 + C, \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная. Из формулы (2) следует, что дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, т. е. уравнению (1) удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых – парабол (рис. 1).

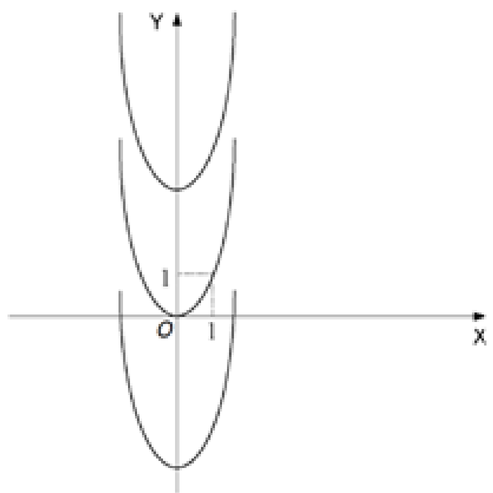

Рис. 1

Чтобы из этого множества кривых выбрать нужную нам кривую, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку $O(0;\ 0)$. Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2). Поэтому $0=0+C$, т. е. $C=0$. Значит, искомая кривая будете $y=x^2$.

Задача 2. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t=0$ и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается формулой $v=g\cdot t$.

Решение. Скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени. Поэтому $v=\dfrac{ds}{dt}=gt$.

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно, $s=\int gt\ dt$, или

$$s=\frac{gt^2}{2}+C. \qquad (3)$$

Для определения произвольной постоянной C используем то условие, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т. е. при $t=0$ $s=0$. Подставляя эти значения в равенство (3), находим: $0=0+C$, т. е. $C=0$, и, следовательно, окончательно получаем: $s=\dfrac{gt^2}{2}$.

В рассмотренных двух задачах мы приходим к дифференциальному уравнению вида $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и технические процессы описываются более общими и сложными дифференциальными уравнениями.

2. Определение дифференциального уравнения, его порядок и решение

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные. Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Займемся только обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком данного уравнения. Следовательно, общий вид дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)}), \tag{4}$$

причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже, чем n. Например, уравнения

$$y - \frac{x}{y} = x, \qquad y'' + y' = 1,$$

имеют соответственно первый и второй порядок.

Всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (4), обращает его в тождество, называется решением этого уравнения.

Пример 1. Функция $y = e^{\frac{x^3}{3}}$ является решением уравнения $y' - x^2 y = 0$, так как она обращает это уравнение в тождество.

3. Дифференциальное уравнение первого порядка, геометрическое истолкование, общее решение и начальные условия

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид

$$F(x,\ y,\ y') = 0, \tag{5}$$

или (если это уравнение можно разрешить относительно y' вид

$$y' = f(x,\ y).$$

Будем рассматривать в уравнении (5) переменные x и y как прямоугольные координаты точки на плоскости xOy. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1), тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, называется интегральной кривой дифференциального уравнения (1). Рассмотрим касательную к интегральной кривой в произвольной точке $M(x,\ y)$. Согласно геометрическому смыслу производной в этой точке имеем:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha,$$

где α – угол наклона этой касательной к оси Ox. Из последнего равенства и из (5) получаем:

$$tg\alpha = f(x,\ y),$$

где $(x,\ y)$ – координаты точки *M*, а угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части уравнения (5). Итак, уравнение (5) определяет в каждой точке интегральной кривой направление касательной к этой кривой.

Каждой точке $M(x,\ y)$ той области, где определена функция $f(x,\ y)$(правая часть уравнения (5)), сопоставим отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x,\ y)$, где $(x,\ y)$ – координаты точки *M*. Мы получаем совокупность направлений, или, как говорят, поле направлений данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнению (5) соответствует его поле направлений. В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (5). Проведя указанные выше отрезки для достаточно большого числа точек области, получим наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке интегральной кривой имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу решения (интегрирования) уравнения (5) геометрически можно истолковать следующим образом: найти такую кривую, чтобы ее касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Приведенные рассуждения хорошо иллюстрировать на известном школьном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют поле направлений, а интегральной кривой служит одна из магнитных силовых линий.

Решение уравнения (5), содержащее произвольную постоянную C, т. е. имеющее вид

$$y=\varphi(x,\ C), \tag{6}$$

называется общим решением этого уравнения. Иногда, впрочем, это решение получается в неявной форме $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ или $\Psi(x,\ y)=C$. Соотношение $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ или $\Psi(x,\ y)=C$ называется общим интегралом уравнения (5).

Решить, или проинтегрировать, данное дифференциальное уравнение – значит найти его общее решение в той или иной форме. Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называется частным решением. Для уравнения (5) справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (5).

Теорема 1. Если в уравнении (5) функция $f(x,\ y)$ и ее частная производная $f'_x(x,\ y)$ непрерывны в некоторой области D на плоскости xOy, содержащей некоторую точку $(x_0,\ y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее условию: $y=y_0$ при $x=x_0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует, и притом единственная, функция $y=\varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0,\ y_0)$.

Условие, что при $x=x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется начальным условием. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения (6) частное решение.

4. Уравнения с разделяющимися переменными

Запишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{или} \quad dy = f(x,y)dx.$$

Такому уравнению можно придать следующую форму:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (7)$$

Форма (7) удобна тем, что здесь переменные x *и* y равноправны, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Предположим, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ можно представить произведениями

$$M(x,y) = M_1(x)\cdot M_2(y), \;\; N(x,y) = N_1(x)\cdot N_2(y),$$

в которых сомножители зависят только от одной переменной. Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (8)$$

откуда, деля почленно на произведение $M_2(y)\cdot N_1(x)$ (предполагаем, что оно не равно нулю), имеем:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0. \qquad (9)$$

Заметим, что в уравнении (9) множитель $\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}$ перед dx – функция только одной переменной x, а множитель $\dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}$ перед dy – функция только одной переменной y.

Уравнение (9) называется уравнением с разделенными переменными, а уравнение (8) – уравнением с разделяющимися переменными. Итак, уравнение с разделяющимися переменными (8) сводится к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих частей уравнения (8) на произведение $M_2(y)\cdot N_1(x)$. Эта операция называется разделением переменных. Покажем, что соотношение

$$F(x,\ y)=C, \tag{10}$$

где

$$F(x,\ y)=\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy,$$

есть общий интеграл уравнения (9) и уравнения (8). Действительно, пусть $y=\varphi(x,\ C)$ (или кратко: $y=\varphi$) – функция, определяемая уравнением (10). Тогда имеем тождество

$$F(x,\ \varphi)\equiv C.$$

Дифференцируя это тождество по x, получим тождество

$$F'_x(x,\ \varphi)+F'_y(x,\ \varphi)\cdot\varphi'\equiv 0,\ \text{или}\ \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\equiv 0.$$

Следовательно, функция $y=\varphi(x,\ C)$ является общим (поскольку зависит от C) решением уравнения (9), а следовательно и уравнения (8). Значит, соотношение (10) или соотношение $\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C$ – есть общий интеграл уравнения (9) и уравнения (8).

Примечание. В общем случае, деля на произведение $M_2(y)\cdot N_1(x)$, мы рискуем потерять те решения уравнения (4), которые обращают это произведение в нуль. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $y=b$, где b – корень уравнения $M_2(y)=0$, есть решение уравнения (4). Аналогично функция $x=a$, где a – корень уравнения $N_1(x)=0$, также является решением уравнения (4).

Пример 2. Решить уравнение $xdx+ydy=0$.

Интегрируя, находим $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1$. Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$, через C^2, будем иметь $x^2+y^2=C^2$. Это уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 2) с центром в начале координат и радиусом C.

Пример 3. Решить уравнение $xdy - ydx = 0$.

Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя это уравнение, будем иметь

$$\ln y = \ln x + \ln C. \tag{11}$$

Строго говоря, мы должны писать $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, где $C > 0$. Однако допущенная в (11) вольность не отразится на окончательном результате, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Это следует иметь в виду и для дальнейшего.

В равенстве (11) произвольная постоянная взята в логарифмической форме, что законно, так как всякое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа: $C_1 = \ln C$, где $C = e^{C_1}$.

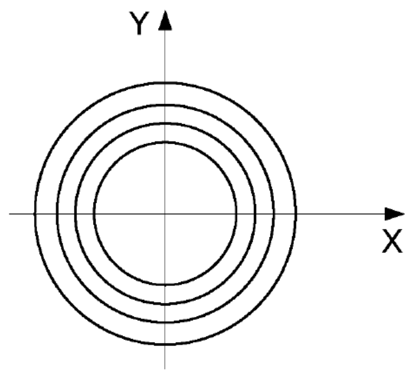

Рис. 2

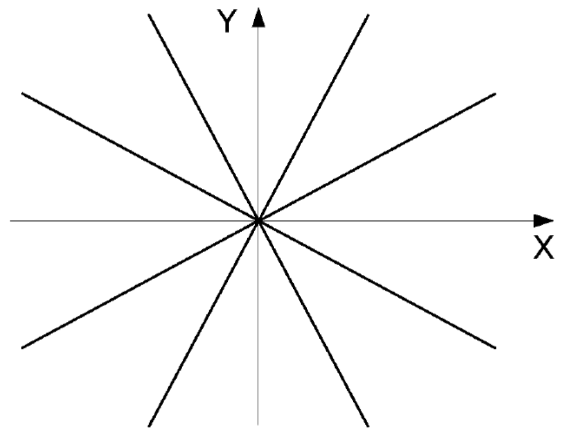

Рис. 3

Потенцируя равенство (11), получим общее решение данного дифференциального уравнения: $y = Cx$. Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 3).

5. Однородные уравнения

Функция $f(x,\ y)$ называется *однородной* измерения m, если имеет место тождество

$$f(tx,\ ty)=t^m\cdot f(x,\ y).$$

Пример 4. Функция $f(x,\ y)=x^2+2y^2-xy$ является однородной функцией измерения 2, так как $(tx)^2+2(ty)^2-(tx)(ty)=$ $=t^2(x^2+2y^2-xy)$.

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения. Уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \qquad (12)$$

называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка,* если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения. Можно показать, что с помощью подстановки $y=u\cdot x$, где u – новая искомая функция от x, однородное уравнение (12) легко приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Заметим, что $dy=udx+xdu$. Иногда целесообразно вместо подстановки $y=u\cdot x$ использовать подстановку $x=u\cdot y$.

Пример 5. Решить уравнение $(y^2-3x^2)dx+2xydy=0$, если $y=0$ при $x=0$.

Применяя подстановку $y=u\cdot x$, имеем: $(u^2x^2-3x^2)dx+2ux^2(udx+xdu)=0$, откуда $3(u^2-1)dx+2uxdu=0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем: $\dfrac{3}{x}dx+\dfrac{2udu}{u^2-1}=0$, $3\ln x+\ln(u^2-1)=\ln C$, что после потенцирования дает равенство $x^3(u^2-1)=C$. Так как $u=\dfrac{y}{x}$, то $x^3\left(\dfrac{y^2}{x^2}-1\right)=C$ и общий интеграл имеет вид $x\left(y^2-x^2\right)=C$. Используя начальное условие, имеем $C=0$. Поэтому искомыми частными решениями являются $y=\pm x$.

6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{13}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные в интервале $(a;\ b)$ функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Для решения уравнения (13) применим подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, причем функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ мы выбираем произвольно. Тогда $u'v + uv' + puv = q$, или $v\dfrac{du}{dx} + \left(\dfrac{dv}{dx} + pv\right)u = q$. Используя произвольный выбор функции v, подчиним ее условию $\dfrac{dv}{dx} + pv = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем: $\dfrac{dv}{v} = -pdx$, $\ln v = -\int pdx$, откуда $v = e^{-\int pdx}$. Поэтому имеем уравнение $e^{-\int pdx} \cdot \dfrac{du}{dx} = q$. Решая его, получаем $u = C + \int qe^{\int pdx}dx$.

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение уравнения (13):

$$y = e^{-\int pdx}(C + \int qe^{\int pdx}dx). \tag{14}$$

Примечание. Если в уравнении (9) $q(x) \equiv 0$, то оно называется линейным однородным уравнением первого порядка, в противном случае – линейным неоднородным уравнением первого порядка. Следовательно, линейное однородное уравнение первого порядка имеет вид:

$$y' + py = 0. \tag{15}$$

Из формулы (14) следует формула общего решения уравнения (15) $y = Ce^{-\int pdx}$.

Пример. Решить уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = x$.

Согласно формуле (14) имеем:

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C + \int xe^{-\int \frac{dx}{x}}dx\right) = e^{\ln x}\left(C + \int xe^{-\ln x}dx\right) = x\left(C + \int dx\right) = Cx + x^2 \cdot$$

7. Задачи из физики, техники и экологии

7.1. Задача о законе движения. Скорость v, путь s и время t прямолинейного движения связаны уравнением $v\cdot\cos t+s\cdot\sin t=1$. Найти закон движения, если $s=2$ при $t=0$.

Решение. Так как $v=\dfrac{ds}{dt}$, то, подставляя это значение v в данное уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения $\dfrac{ds}{dt}\cdot\cos t+s\cdot\sin t=1$ или $\dfrac{ds}{dt}+s\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{1}{\cos t}$.

Теперь согласно формуле (14) имеем

$$\mathrm{s}=e^{\int\frac{\sin t}{\cos t}}\left(C+\int\frac{1}{\cos t}e^{-\int\frac{d\cos t}{\cos t}dt}dt\right)=e^{-\int\frac{d\cos t}{\cos t}}\left(C+\int\frac{1}{\cos t}e^{-\int\frac{d\cos t}{\cos t}dt}dt\right)=$$

$$=e^{\ln\cos t}\left(C+\int\frac{1}{\cos t}e^{-\ln\cos t}dt\right)=\cos t\left(C+\int\frac{dt}{\cos^2 t}\right)=$$

$$=\cos t(C+tgt)=C\cos t+\sin t.$$

По условию $s=2$ при $t=0$ и потому $C=2$. Таким образом, искомый закон движения $s=\sin t+2\cos t$.

7.2. Задача о заряде конденсатора. Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. Сила I электрического тока представляет производную от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t: $I=\dfrac{dq}{dt}$.

В момент t заряд конденсатора q и сила тока описываются как $I=\dfrac{dq}{dt}$; в цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\dfrac{q}{Q}$, т. е. $E=U-\dfrac{q}{Q}$. Согласно закону Ома $I=\dfrac{E}{R}$. Поэтому $\dfrac{dq}{dt}=\dfrac{U-\frac{q}{Q}}{R}$. Отсюда $\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{QR}=\dfrac{U}{R}$. Теперь согласно формуле (14) имеем:

$$q = e^{-\int \frac{dt}{QR}}\left(C + \int \frac{U}{R} e^{\int \frac{dt}{QR}} dt\right) = e^{\frac{t}{QR}}\left(C + \frac{U}{R}\int e^{\frac{t}{QR}} dt\right) =$$

$$= e^{\frac{t}{QR}}\left(C + \frac{UQR}{R} e^{\frac{t}{QR}}\right) = Ce^{\frac{t}{QR}} + UQ.$$

По условию при $t = 0$ $q = 0$ и потому $0 = C + UQ$ и $C = -UQ$. Значит в *момент времени* t заряд конденсатора составляет $q = UQ\left(1 - e^{-\frac{t}{QR}}\right)$.

7.3. Задача о радиоактивном распаде. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t = 0$ имелось m_0 грамм радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Пусть в момент времени $t = 0$ масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна: $\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}$.

По условию задачи

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \qquad (16)$$

где k – коэффициент пропорциональности. Разделяя в уравнении (16) переменные и интегрируя, получаем: $\frac{dx}{x} = kdt$, $\ln x = -kt + \ln C$, что после потенцирования дает: $x = Ce^{-kt}$.

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = m_0$. Имеем $C = m_0$, и значит, $x = m_0 e^{-kx}$.

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x = \frac{m_0}{2}$ при $t = 1590$. Имеем: $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k}$ или $e^{1590k} = 2$, следовательно, $e^k = 2^{\frac{1}{1590}}$. Поэтому искомая функция (закон распада радия) $x = m_0 \cdot 2^{\frac{t}{1590}}$.

7.4. Задача об охлаждении тела. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20 °C. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60 °С. Определить закон изменения температуры Θ тела в зависимости от времени t.

Решение. Согласно условию задачи имеем: $\dfrac{d\Theta}{dt}=k(\Theta-20)$, где k – коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{d\Theta}{\Theta-20}=kdt,\ \ln(\Theta-20)=kt+\ln C,$$

что после потенцирования дает: $\Theta-20=Ce^{kt}$ и, следовательно, $\Theta=20+Ce^{kt}$.

Для определения C используем начальное условие: $\Theta=100$ при $t=0$. Отсюда $C=80$. Поэтому $\Theta=20+80e^{kt}$.

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $\Theta=60$ при $t=20$. Отсюда $60=20+80e^{20kt}$ или $e^{20kt}=\dfrac{1}{2}$, следовательно, $e^{k}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$. Итак, искомая функция $\Theta=20+80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

7.5. Задача о концентрации раствора. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси. Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Решение. Пусть x – количество соли в резервуаре в момент времени t, $-dx$ – количество соли, выходящее из резервуара за время dt (знак «минус» обусловлен тем, что x – убывающая функция времени). Объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен: $\mathrm{v}=100+30t-20t=100+10t$, поэтому концентрация соли (т. е. количество соли, содержащейся в одном литре смеси) в момент времени t будет равна $\dfrac{x}{100+10t}$.

Следовательно, за короткий промежуток времени dt количество соли уменьшится на $\dfrac{x}{100+10t}\cdot 20\cdot dt$.

7.6. Задача о законе «естественного роста». Закон «естественного роста» – это закон, при котором скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдем формулу для определения изменения количества вещества x в зависимости от времени t, считая, что в начальный момент при $t=0$ количество вещества было x_0.

Решение. Используя физический смысл производной, можно записать закон «естественного роста» следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=kx, \tag{17}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Уравнение (17) (оно отличается от уравнения (16) лишь знаком левой части) описывает многие процессы «размножения».

Решение уравнения (17), удовлетворяющее начальному условию $x=x_0$ при $t=0$, имеет вид

$$x=x_0e^{kt}. \tag{18}$$

Формула (18) является формулой, выражающей закон «естественного роста». По этому закону, например, происходит «размножение» числа нейтронов в ядерных реакциях, размножение числа бактерий, рост кристаллов, населения и т.п.

7.7. Задача о скорости размножения бактерий. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t=0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x – количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию дифференциальное уравнение задачи: $\dfrac{dx}{dt}=kx$, где k– коэффициент пропорциональности. Как и при решении уравнения (12), находим: $x=Ce^{kt}$.

Для определения C используем начальное условие: $x=100$ при $t=0$. Имеем: $C=100$, значит $x=100\cdot e^{kt}$.

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x=200$ при $t=3$. Имеем: $200=100\cdot e^{3k}$, $2=e^{3k}$ и, следовательно, $e^k=2^{\frac{1}{3}}$. Поэтому искомая функция $x=100\cdot 2^{\frac{t}{3}}$, откуда при $t=9$ $x=800$. Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в 8 раз.

8. Уравнения высших порядков

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка есть

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}). \tag{19}$$

Здесь $F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})$ может не зависеть от некоторых из величин $x,\ y,\ y',\ \ldots$. Однако если (19) есть уравнение именно n-го порядка, то от $y^{(n)}$ функция F обязательно зависит. Наиболее простым дифференциальное уравнение (1) оказывается тогда, когда оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{20}$$

где $f(x)$ – заданная функция.

Примером такого простейшего уравнения служит хотя бы дифференциальное уравнение

$$y'' = -\frac{1}{x^2}. \tag{21}$$

Из этого уравнения сразу видно, что

$$y' = \int \frac{dx}{x^2} + C_1 = \frac{1}{x} + C_1, \tag{22}$$

где C_1 – произвольная постоянная. В свою очередь из уравнения (22) следует, что

$$y = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx + C_2 = \ln|x| + C_1 x + C_2,$$

где C_2 – произвольная постоянная, никак не связанная с постоянной C_1.

Найденное решение зависит от двух произвольных постоянных, при этом исходное дифференциальное уравнение (21) было уравнением второго порядка. Такое решение называется общим решением этого уравнения. Аналогично посредством n последовательных интегрирований решается любое уравнение вида (20).

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (19) называется функция

$$y = (x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),$$

существенно зависящая от n произвольных постоянных и обращающая уравнение (19) в тождество при любых значениях этих постоянных. Решения, получаемые из общего при закреплении постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, называются частными.

Замечание. В данном определении употреблено выражение «существенно зависящая». Это означает, что число постоянных нельзя снизить за счет введения новых обозначений. Например, функция $y = (C_1^2 + 2C_2 + C_3)x + C_4 + 6C_5$ существенно зависит лишь от двух постоянных $C_1^* = C_1^2 + 2C_2 + C_3$ и $C_2^* = C_4 + 6C_5$ и может быть записана в виде $y = C_1^* x + C_2^*$.

В прикладных вопросах часто приходится искать такое решение дифференциального уравнения n-го порядка, которое удовлетворяет n условиям: при заданном значении $x = x_0$ сама функция y и ее первые $(n-1)$ производных $y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$ должны принимать заданные значения

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (23)$$

Условия (23), называемые *начальными,* выделяют из общего решения:

$$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)$$

единственное частное решение.

9. Случаи понижения порядка

Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида (20). Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований, при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

2. Уравнение

$$y^{(n)} = f(x,\ y^k,\ y^{k+1},\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \quad (k \le n-1), \tag{24}$$

не содержащее явно y и младших производных до порядка $(k-1)$ включительно, допускает понижение порядка на k единиц. Для этого введем новую искомую функцию $z = y^{(k)}$. Тогда $y^{(k+1)} = z',\ \ldots,\ y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и уравнение относительно z будет порядка $(n-k)$: $z^{(n-k)} = f(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-k-1)})$.

Если $z = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k})$ – общее решение этого уравнения, то для y имеем уравнение $y^{(k)} = \varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-k})$.

Интегрируя его, найдем общее решение уравнения (6).

3. Уравнение

$$y^{(n)} = f(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}), \tag{25}$$

не содержащее явно независимой переменной. Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем замены обеих переменных. В качестве новой искомой функции выбираем $y' = p$, а за новую независимую переменную принимаем y.

Задача. Материальная точка массой m движется по прямой линии к центру O (рис. 4), притягивающему ее с силой $\dfrac{km}{r^3}$, где r – расстояние от этой точки до центра. Движение начинается с состояния покоя при $r = a$. Найти время, за которое материальная точка достигнет центра O.

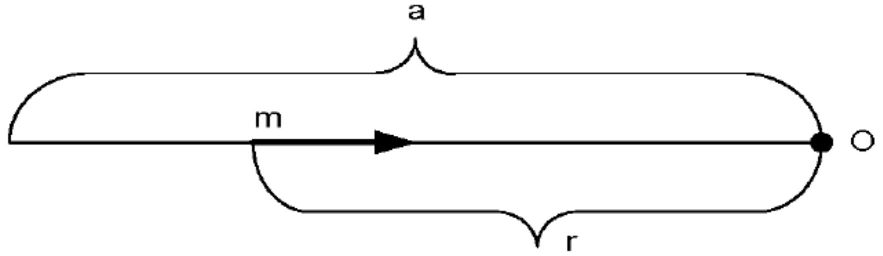

Рис. 4

Решение. По условию задачи в любой момент времени t на материальную точку действует сила $F = \frac{km}{r^3}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{km}{r^3}, \tag{26}$$

или

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}.$$

Обозначим $\frac{dr}{dt} = p$, тогда $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = p\frac{dp}{dr}$ и уравнение (26) перепишется в виде $\frac{pdp}{dr} = -\frac{k}{r^3}$. Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь: $pdp = -\frac{k}{r^3}dr$, $p^2 = -\frac{k}{r^2} + C_1$, откуда $p = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{r^2} + C_1}$ (перед радикалом ставится знак «минус», так как по смыслу задачи функция r убывает и $\frac{dr}{dt} < 0$), или $\frac{dr}{dt} = -\frac{\sqrt{k + C_1 r^2}}{r}$. Разделяя переменные в последнем уравнении и затем, интегрируя, получаем:

$$-\frac{rdr}{\sqrt{k + C_1 r^2}} = dt, \quad -\frac{\sqrt{k + C_1 r^2}}{C_1} = t + C_2.$$

Используя начальные условия (при $t = 0$ $r = a$, $\frac{dr}{dt} = 0$), получаем: $C_2 = -\frac{\sqrt{k + C_1 a^2}}{C_1}$, $0 = -\frac{\sqrt{k + C_1 a^2}}{r}$, откуда $C_1 = -\frac{k}{a^2}$, $C_2 = 0$. Поэтому $t = \frac{a\cdot\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{k}}$. Когда точка достигнет центра O, будем иметь $r = 0$ и $t = \frac{a^2}{\sqrt{k}}$.

10. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка

Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \qquad 29)$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции в интервале $(a;\ b)$, называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка, функции p и q – его коэффициентами.

Если $f(x) = 0$ в данном интервале $(a;\ b)$, то уравнение (29) принимает вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \qquad (30)$$

и называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Если уравнение (30) имеет те же коэффициенты, как (29), то оно называется однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (29).

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, определенные и непрерывные в интервале $(a;\ b)$, называются линейно зависимыми в этом интервале, если существуют постоянные числа a_1 и a_2 (причем, по крайней мере, одно из них не равно нулю), такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождество

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0. \qquad (31)$$

Функции y_1 и y_2 называются линейно независимыми в интервале $(a;\ b)$ если тождество (31) может иметь место только при $a_1 = a_2 = 0$.

Теорема 2. Если y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения второго порядка (30), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (32)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 решения уравнения (30), то имеем тождества $y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1 = 0$, $y_2'' + p \cdot y_2' + q \cdot y_2 = 0$. Используя их, получаем тождество

$$\left(C_1y_1+C_2y_2\right)''+p\left(C_1y_1+C_2y_2\right)'+q\left(C_1y_1+C_2y_2\right)=$$
$$=C_1\left(y_1''+p\cdot y_1'+q\cdot y_1\right)+C_2\left(y_2''+p\cdot y_2'+q\cdot y_2\right)=0.$$

Следовательно, выражение (32) является решением уравнения (30), и поскольку это решение содержит две произвольные постоянные, то оно является общим решением однородного уравнения (30). Теорема доказана.

Пусть y_1 и y_2 - два линейно зависимых решения уравнения (30). Тогда выполняется тождество (31), где либо $a_1 \neq 0$, либо $a_2 \neq 0$. Предположим для определенности, что $a_2 \neq 0$. Тогда из тождества (31) имеем $y_2=-\dfrac{a_1}{a_2}$, или $y_2=ay_1$ $\left(a=-\dfrac{a_1}{a_2}\right)$. Подставляя это выражение в уравнение (32), получаем: $y=C_1y_1+C_2ay_1=(C_1+aC_2)y_1=Cy_1$, где $C=C_1+aC_2)$. Отсюда видно, что если y_1 и y_2 - линейно зависимые решения однородного уравнения (30), то решение (32) содержит только одну произвольную постоянную C и, следовательно, не является общим.

Примечание. Отметим, что определитель $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ называют определителем Вронского или вронскианом (Юзеф Вронский) для функций y_1 и y_2, не равен нулю ни при одном значении x из $(a;\ b)$. Для общего решения неоднородного уравнения (29) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Общее решение неоднородного уравнения (29) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (30) и любого частного решения данного неоднородного уравнения.

Доказательство. Пусть $Y=C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение уравнения (30), соответствующего уравнению (29), и z – любое частное решение уравнения (29).

Имеем тождества $Y''+p\cdot Y'+q\cdot Y=0$, $z''+pz'+qz=f(x)$. Складывая почленно эти два тождества, получим тождество $(Y+z)''+p\cdot(Y+z)'+q\cdot(Y+z)=f(x)$. Следовательно, функция $y=Y+z=C_1y_1+C_2y_2+z$ – решение уравнения (29) и при этом общее, так как в эту функцию входят две произвольные постоянные C_1 и C_2.

11. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть в линейном уравнении

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \tag{33}$$

p и q – постоянные действительные числа. Частное решение уравнения (33) будем искать в виде функции

$$y = e^{kx}, \tag{34}$$

где k – действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя $y = e^{kx}$ по x, получим:

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}. \tag{35}$$

Подставляя выражения (34) и (35) в уравнение (33), будем иметь $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Отсюда, учитывая что $e^{kx} \neq 0$, имеем:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{36}$$

Алгебраическое уравнение(36) называется характеристическим уравнением однородного уравнения(33). Характеристическое уравнение и дает возможность найти k. Уравнение (36) есть уравнение второй степени и потому имеет два корня.

Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны три случая.

1. Корни k_1 и k_2 действительные и разные $(k_1 \neq k_2)$. В этом случае по формуле (34) получим два частных решения уравнения (33) $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$, которые являются линейно независимыми. Действительно, если бы эти решения были линейно зависимы, то в интервале $(a;\ b)$ должно было бы выполняться тождество $a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} = 0$, где a_1 и a_2 одновременно не нули, или тождество $a_1 e^{k_1 x} = -a_2 e^{k_2 x}$. Отсюда $a_1 e^{(k_1 - k_2)x} = -a_2$, что невозможно, так как справа в последнем тождестве постоянное число, а слева – функция от x. По теореме 1 следует, что общее решение уравнения (33) будет

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{37}$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Его характеристическое уравнение $k^2-3k+2=0$ имеет два различных действительных корня $k_1=1$ и $k_2=2$. Поэтому общее решение есть $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2. Корни k_1 и k_2 действительные и равные $(k_1=k_2)$. В этом случае одно частное решение уравнения (33) выразится функцией $y_1=C_1e^{k_1x}$. Частным решением уравнения (33) в этом случае будет также и функция $y_2=xe^{k_1x}$. Действительно,

$$y_2''+p\cdot y_2'+q\cdot y_2=(2+k_1x)k_1e^{k_1x}+p(1+k_1x)e^{k_1x}+qxe^{k_1x}=$$
$$=e^{k_1x}\left\{\left(k_1^2+pk_1+q\right)x+2k_1+p\right\}=e^{k_1x}(-p+p)=0.$$

Заметим, что решения e^{k_1x} и xe^{k_1x} линейно независимы, так как если бы функции e^{k_1x} и xe^{k_1x} были линейно зависимы, то в интервале $(a;\ b)$ выполнялось бы тождество $a_1e^{k_1x}+a_2xe^{k_1x}=0$ (a_1 и a_2 одновременно не нули) и, значит, тождество $a_1+a_2x=0$, что невозможно. Следовательно, общее решение уравнения (33) в данном случае имеет вид:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}=e^{k_1x}(C_1+C_2x). \tag{38}$$

Пример 2. Решить уравнение $y''-6y'+9y=0$.

Его характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$ имеет два одинаковых действительных корня $k_1=k_2=3$. Поэтому общее решение будет $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$.

3. Корни $k_1=\alpha+\beta i$ и $k_2=\alpha-\beta i$ комплексные. Можно показать, что общее решение уравнения (33) в этом случае есть

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}=e^{\alpha x}(C_1\cdot\cos\beta x+C_2\cdot\sin\beta x). \tag{39}$$

Пример 3. Решить уравнение $y''-2y'+2y=0$.

Его характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0$ имеет два комплексных корня $k_1=1+i$ и $k_2=1-i$. Следовательно, общим решением будет функция $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

12. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь решение некоторых типов линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p\cdot y' + q\cdot y = f(x), \qquad (40)$$

где p, q – постоянные действительные числа и $f(x)$ – известная непрерывная в интервале $(a;\ b)$ функция. Для нахождения общего решения уравнения (40) надо знать общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$ и частное решение $z=z(x)$ уравнения (40): $y=Y+z$. Вид частного решения уравнения (40) зависит от вида правой части этого уравнения.

Рассмотрим некоторые случаи.

1) $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0 \quad (a\neq 0)$. Если $q\neq 0$, то частное решение уравнения (9) ищем также в форме квадратного трехчлена: $z=A_2x^2+A_1x+A_0$, где A_2, A_1 и A_0 – неопределенные коэффициенты. Отсюда $z'=2A_2x^2+A_1$, $z''=2A_2$. Подставляя эти выражения в уравнение (40), в котором $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, получим тождество

$$A_2qx^2+(2A_2p+A_1q)x+2A_2+A_1p+A_0q=a_2x^2+a_1x+a_0,$$

откуда

$$A_2q=a_2,\ 2A_2p+A_1q=a_1,\ 2A_2+A_1p+A_0q=a_0. \qquad (41)$$

Так как $q\neq 0$, то из равенств (41) для коэффициентов A_2, A_1 и A_0 получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение $z(x)$ будет вполне определено.

Если $q=0$, то частное решение $z(x)$ уравнения (40) ищем в виде $z=x\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)$, когда характеристическое уравнение имеет однократный корень, и в виде $z=x^2\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)$ – при двукратном корне характеристического уравнения (36). Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ является многочленом $P(x)$ произвольной степени.

Пример. Решить уравнение $y''+y'=2x+1$.

Имеем:

$$k^2+k=0, \quad k_1=0, \quad k_2=-1, \quad Y=C_1+C_2e^{-x}.$$

Так как имеем однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z=x\left(A_1x+A_0\right)\equiv A_1x^2+A_0x$. Далее имеем:

$$z'=2A_1x+A_0, \quad z''=2A_1, \quad 2A_1+2A_1x+A_0=2x+1, \quad A_1=1, \quad A_0=-1,$$

$$z(x)=x^2-x, \qquad y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-x.$$

2) $f(x)=ae^{bx}$ $(a\neq 0)$. Тогда частное решение ищем в виде $z(x)=Ae^{bx}$, где A – неопределенный коэффициент. Отсюда $z'=Abe^{bx}$, $z''=Ab^2e^{bx}$. Подставляя эти выражения в уравнение (40), в котором $f(x)=Ae^{bx}$, после сокращения на e^{bx} будем иметь $A\left(b^2+pb+q\right)=a$. Отсюда видно, что если b не является корнем характеристического уравнения, то $z(x)=\dfrac{ae^{bx}}{b^2+pb+q}$.

Если b – корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (40) ищем в виде $z(x)=Axe^{bx}$, когда b – однократный корень, и в виде $z(x)=Ax^2e^{bx}$, когда b – двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x)=P(x)e^{bx}$.

Пример. Решить уравнение $y''-2y'+y=2e^x$.

Имеем:

$$k^2-2k+1=0, \quad k_1=k_2=1, \quad Y=(C_1+C_2x)e^x.$$

Так как в данном уравнении $b=1$ – корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z(x)=Ax^2e^x$. Далее имеем:

$$z'=Ax(x+2)e^x, \qquad z''=A(x^2+4x+2)e^x,$$

$$Ae^x(x^2+4x+2)-2Axe^x(x+2)+Ax^2e^x=2e^x,$$

$$Ax^2+4Ax+2A-2Ax^2-4Ax+Ax^2=2, \qquad 2A=2,$$

$$A=1, \qquad z(x)=x^2e^x, \qquad y=(C_1+C_2x)e^x+x^2e^x.$$

3) $f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ (a и b не нули одновременно). В этом случае частное решение $z(x)$ ищем также в форме тригонометрического двучлена $z(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Отсюда $z'=-A\omega\sin\omega x+B\omega\cos\omega x$, $z''=-A\omega^2\cos\omega x+$ $+B\omega^2\sin\omega x$.

Подставляя эти выражения в уравнение (40), в котором $f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$, получим $(-A\omega^2+Bp\omega+Aq)\cos\omega x+(-B\omega^2-$ $Ap\omega+Bq)\sin\omega x=a\cos\omega x+b\sin\omega x$. Так как последнее равенство представляет собой тождество, то коэффициенты при $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ в левой и правой частях этого равенства должны быть соответственно равны друг другу. Поэтому

$$A(q-\omega^2)+Bp\omega=a, \qquad -Ap\omega+B(q-\omega^2)=b.$$

Эти уравнения определяют коэффициенты A и B, кроме случая, когда $p=0$, $q=\omega^2$ (или когда $\pm\omega i$ – корни характеристического уравнения). В последнем случае частное решение уравнения (40) ищем в виде $z(x)=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$.

Пример. Решить уравнение $y''+y'=\cos x$.

Имеем: $k^2+1=0$, $k_1=i$, $k_2=-i$, $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Так как $\pm i$ – корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z(x)=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$. Далее имеем:

$$z'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x),$$
$$z''=-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x),$$
$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x,\quad A=0,\quad B=0{,}5\,,\quad z=0{,}5\cdot\sin x,$$
$$y=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x+0{,}5\cdot\sin x.$$

13. Гармонический осциллятор. Резонанс

Пусть на идеально гладком столе лежит шарик массы m, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $\lambda > 0$ (рис. 5). Направим ось Ox вдоль пружины, а за начало координат примем ту точку, в которой шарик находится в положении равновесия (пружина не растянута). Отведем теперь шарик от положения равновесия на расстояние x_0 и отпустим его. Тогда со стороны пружины на шарик будет действовать сила F, стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Из физики известно, что эта сила равна (для малых x)

$$F(x) = -\lambda x \tag{42}$$

(знак «минус» поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещению x).

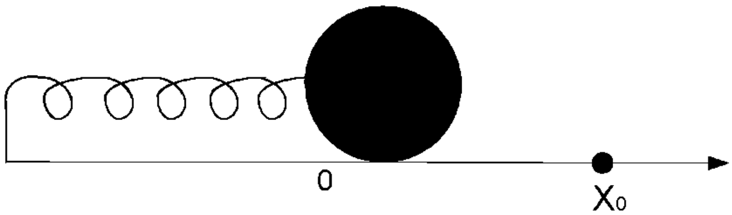

Рис. 5

Запишем второй закон Ньютона для шарика

$$F = ma, \tag{43}$$

где ускорение $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Сравнив (41) и (42), получаем: $ma = -\lambda x$, $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{\lambda}{m}x$. Обозначим $\sqrt{\dfrac{\lambda}{m}} = \omega$, тогда получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0. \tag{44}$$

Для уравнения (44) запишем его характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$. Его корнями будут: $k_1 = \omega i,\ \ k_2 = -\omega i$. Поэтому общее решение уравнения (44) имеет вид:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \tag{45}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Выясним теперь, каковы начальные условия. В момент времени $t=0$ $x=x_0$, а скорость равна нулю; значит

$$\begin{cases} x(0)=x_0, \\ x'(0)=0. \end{cases} \tag{46}$$

Но из (45) следует, что

$$\frac{dx}{dt}=-C_1\omega\cdot\sin\omega t+C_2\omega\cdot\cos\omega t\,.$$

Поэтому (46) перепишется в виде: $\begin{cases} C_1+0=x_0, \\ 0+C_2\omega=0. \end{cases}$ Отсюда $C_1=x_0$, $C_2=0$ и

$$x=x_0\cos\omega t\,. \tag{47}$$

Другими словами, шарик будет совершать гармонические колебания с амплитудой $|x_0|$ и периодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\lambda}}$ (ω называется частотой колебаний; период T находим из формулы $\omega(t+T)=\omega t+2\pi$).

Как говорят в физике, мы имеем здесь гармонический осциллятор. В действительности мы знаем, что шарик не может колебаться бесконечно долго, и амплитуда колебаний стремится к нулю. Это происходит потому, что в любом реальном опыте присутствует сила трения, которой мы пренебрегли при выводе уравнения (44). Однако если сила трения очень мала, а промежуток времени не слишком большой, то (44) и (47) описывают процесс с хорошим приближением.

Пусть теперь на шарик действует еще одна сила F_1, направленная вдоль оси Ox и изменяющаяся по закону

$$F_1=F_0\cdot\sin pt$$

(F_0 и p – положительные постоянные). Тогда второй закон Ньютона примет вид: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\lambda x+F_0\sin pt$, или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=a_0\cdot\sin pt\,, \tag{48}$$

где $a_0=\dfrac{F_0}{m}$.

Уравнение (48) называется уравнением вынужденных колебаний, а уравнение (44) – уравнением свободных колебаний.

Найдем частное решение неоднородного уравнения (48).

1) Пусть $p \neq \omega$, т.е. частота внешней силы не совпадает с частотой свободных колебаний. Частное решение ищем в виде:

$$z = A\cos pt + B\sin pt,$$
$$z' = -pA\cdot\sin pt + pB\cdot\cos pt, \quad z'' = -p^2A\cdot\cos pt - p^2B\cdot\sin pt.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (48), получим

$$-p^2(A\cdot\cos pt + B\cdot\sin pt) + \omega^2(A\cdot\cos pt + B\cdot\sin pt) = a_0\sin pt,$$
$$A(\omega^2 - p^2)\cos pt + B(\omega^2 - p^2)\cdot\sin pt = a_0\sin pt.$$

Отсюда $A(\omega^2 - p^2) = 0,\quad B(\omega^2 - p^2) = a_0$ и, следовательно, $A = 0$, $B = \dfrac{a_0}{(\omega^2 - p^2)}$. Поэтому $z = \dfrac{a_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt$.

И общее решение уравнения (48) для случая $p \neq \omega$ будет

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{a_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt. \tag{49}$$

Это решение представляет собой наложение двух гармонических колебаний с частотами ω и p, причем колебания ограничены.

2) Пусть $p = \omega$, т.е. частота внешней силы совпадает с частотой свободных колебаний. В этом случае частное решение уравнения (48) ищем в виде:

$$z = t(A\cos pt + B\sin pt) \equiv t(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

откуда

$$z' = A\cos\omega t + B\sin\omega t + t(-A\cdot\sin\omega t + B\cdot\cos\omega t),$$
$$z'' = 2(-A\omega\cdot\sin\omega t + B\omega\cdot\cos\omega t) - t\omega^2(A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (48), получим

$$2(-A\omega\cdot\sin\omega t + B\omega\cdot\cos\omega t) = a_0\sin\omega t,$$

откуда $-2A\omega = a_0$, $2B\omega = 0$. Поэтому $z = \dfrac{a_0 t}{2\omega}\cos\omega t$ и общее решение уравнения (48) в случае $p = \omega$ будет:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{a_0 t}{2\omega} \cos \omega t . \qquad (50)$$

Последняя формула (50) показывает, что размах колебаний x неограниченно растет вместе со временем t (рис. 6).

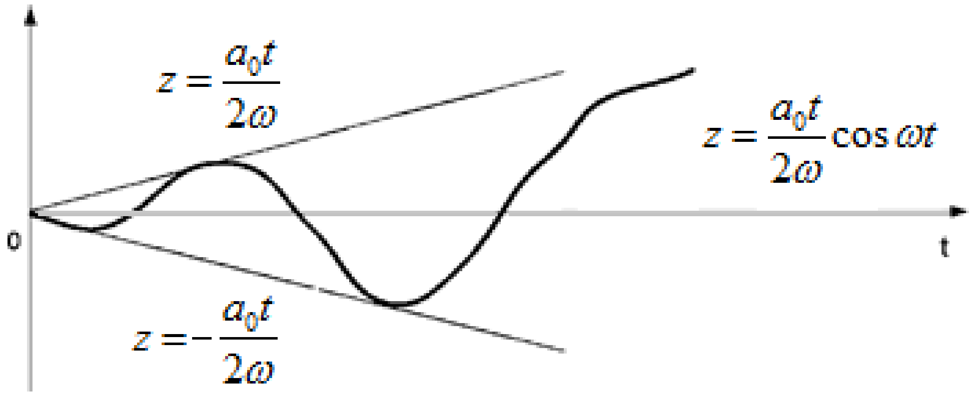

Рис. 6

Это явление носит название резонанса. При работе многих механизмов резонанс крайне нежелателен, так как он приводит к нарушению их правильной работы и даже к разрушению.

Индивидуальная работа

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

1	$x^2 \cdot y' - y^2 = 0$
2	$y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$
3	$\left(x^2 + 2xy + 1\right)y' - (x+1)y = 0$
4	$y' = x^2 + 2x - 2y$
5	$\left(x^2 - xy + 4y^2\right)y' + 4x^2 - xy + y^2 = 0$
6	$\left(3x^2 - y^2\right)y' = 2xy$
7	$x \cdot y' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$
8	$2x \cdot y' = 3x^2 + y$
9	$y' - 2xy = 2x \cdot e^{x^2}$
10	$y' - y\cos x = \sin 2x$
11	$\sqrt{4 - x^2} \cdot (y' + y) = e^{-x}$
12	$\left(x^3 + y^3\right)\left(xy' - y\right) = x^4$
13	$(x-5) \cdot y' + y = \sin 5x$
14	$x \cdot y' - 3y = x^4 \cdot e^x$
15	$x \cdot y' + x \cdot e^{\frac{y}{x}} - y = 0$
16	$y' + y = e^{-x}$
17	$x \cdot y' - 2y + x^2 = 0$
18	$x \cdot \cos\dfrac{y}{x} \cdot y' + 4x = y \cdot \cos\dfrac{y}{x}$
19	$ctgx \cdot y' - y = 2 \cdot \cos^2 x \cdot ctgx$
20	$x \cdot y' = y \cdot \left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$
21	$y' - y \cdot ctgx = \sin x$
22	$y' + x^2 - 2y = 0$
23	$x \cdot y' - x - 2y = 0$
24	$y' \cdot \cos x + y \cdot \sin x = 1$
25	$x \cdot y' - y = x^2$

Задание 2. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1	$y'' + y' - 2y = 6x^3$
2	$y'' - 4y = 8x^3$
3	$y'' + 2y' + y = 8e^x$
4	$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}$
5	$y'' + 6y' + 8y = 10\sin x$
6	$y'' - 9y = \cos 3x$
7	$y'' + 3y' + 2y = e^x$
8	$y'' - 5y' + 6y = 13\sin x$
9	$y'' + 2y' - 2x = 1$
10	$y'' + y = 2x^3 - x + 2$
11	$y'' + 4y' + 4y = 2e^x$
12	$y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$
13	$y'' + 2y' - 5y = 4e^{-x}$
14	$y'' + 2y' - 8y = 3\sin x$
15	$y'' - 6y' + 8y = \cos 2x$
16	$y'' + 2y' - 8y = 2\cos x$
17	$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$
18	$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$
19	$y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2$
20	$y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$
21	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$
22	$y'' + 9y = 36 \cdot e^{3x}$
23	$y'' + 4y = 1 + \sin 2x$
24	$y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$
25	$y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Иванов Владимир Иванович

Электронное издание

Редактор С.М. Макарова

Подписано в свет 25.02.2025. Регистрационный номер 58
Редакционно-издательская служба Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru