Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

В.И. Иванов

РЯДЫ
Часть 2. Приближенные вычисления

Методические указания

Электронное издание

Красноярск 2025

Рецензент

И.Ю. Сакаш, кандидат технических наук,
доцент кафедры физики и математики ФГБОУ ВО «Красноярский государственный аграрный университет»

Иванов, В.И.

Ряды. Часть 2. Приближенные вычисления [Электронный ресурс]: методические указания / *В.И. Иванов*; Красноярский государственный аграрный университет. – Красноярск, 2025. – 23 с.

Подготовлено в соответствии с рабочими программами учебной дисциплины «Математика». Содержит краткое изложение основных вопросов теории, примеры применения теории для выполнения практических заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 35.03.06 «Агроинженерия», 20.03.01 «Техносферная безопасность», специалитету 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» очной и заочной форм обучения.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Красноярского государственного аграрного университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Если функция $y=f(x)$ имеет производные в окрестности точки $x=x_o$ до $(n+1)$-го порядка включительно, то существует точка

$$c=x_o+\theta(x-x_o) \quad (0<\theta<1),$$

такая, что

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n+R_n(x), \qquad (1.1)$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1}$.

Формула (1.1) называется *формулой Тейлора* функции $y=f(x)$ для точки x_o, $R_n(x)$ – *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*.

Многочлен $P_n(x)=f(x_o)+\dfrac{f'(x_o)}{1!}\cdot(x-x_o)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\cdot(x-x_o)^n$ называется *многочленом Тейлора* функции $y=f(x)$.

При $x_o=0$ приходим к частному случаю формулы (1.1):

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \qquad (1.2)$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^n$, $c=\theta x$ $(0<\theta<1)$.

Формула (1.2) называется *формулой Маклорена* функции $y=f(x)$.

Пример 1.1. Разложить по степеням разности $(x-1)$ функцию $y=x^4-3x^2+2x+2$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться формулой Тейлора при $x_o=1$, найдем:

$$y(1)=2, \quad y'(1)=\left(4x^3-6x^2+2\right)\Big|_{x=1}=0,$$

$$y''(1)=\left(12x^2-12x\right)\Big|_{x=1}=0, \quad y'''(1)=(24x-12)\big|_{x=1}=12,$$

$y^{IV}(1)=24, \quad y^{V}(x)=0$ и т. д.

Следовательно, $x^4-3x^2+2x+2=2+2(x-1)^3+(x-1)^4$.

Пример 1.2. Записать многочлен Тейлора для функции $y=\dfrac{1}{x}$ в точке $x_o=1$.

Решение. Находим производные данной функции и их значения в точке: $x_o=1$

$$y(x)\big|_{x=1}=1, \qquad y'(1)=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=-1,$$

$$y''(1)=\frac{2}{x^3}\Big|_{x=1}=2, \quad y'''(1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\Big|_{x=1}=-6,$$

$$y^{IV}(1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}\Big|_{x=1}=24, \ \ldots, \ y^{(n)}(1)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\Big|_{x=1}=(-1)^n n!.$$

Следовательно,

$$P_n(x)=1-\frac{(x-1)}{1!}+\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{6}{3!}(x-1)^3+\ldots+(-1)^n\frac{n!}{n!}(x-1)^n=$$
$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n.$$

Остаточный член формулы Тейлора для данной функции имеет вид

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{[1+\theta(x-1)]^{n+2}}, \quad (0<\theta<1)..$$

Сформулируем *условие разложимости функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_o любое число раз и в некоторой окрестности этой точки $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ или*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(x_o+\theta(x-x_o))}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1}=0, \qquad (1.3)$$

то

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+...+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n+... \qquad (1.4)$$

В частности, при $x_o=0$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (1.5)$$

Ряд вида (1.4) называется *рядом Тейлора*, а ряд вида (1.5) – *рядом Маклорена*.

Условие (1.3) является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд, построенный по схеме (1.4) или (1.5), сходился к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x=x_o$. В каждом конкретном случае необходимо находить область сходимости ряда к данной функции.

Пример 1.3. Разложить в ряд Маклорена функцию chx и найти область, в которой ряд сходится к данной функции.

Решение. Находим производные функции $f(x)=chx$ $f'(x)=shx,$ $f''(x)=chx,$ $f'''(x)=shx,...$ Таким образом, $f^{(n)}(x)=chx,$ если n – четное, и $f^{(n)}(x)=shx,$ если n – нечетное. Полагая $x_O=0$, получаем $f(0)=1,$ $f'(0)=0,$ $f''(0)=1,$ $f'''(0)=0,$ ..., $f^{(n)}(0)=1$ при n четном и $f^{(n)}(0)=0$ при n нечетном. Подставим найденные производные в схему (1.5). Имеем $chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$

Воспользовавшись условием (1.3), определим интервал, в котором ряд $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$ сходится к данной функции.

Если n – нечетное, то $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}ch\theta x,$ если же n – четное, то $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}sh\theta x.$ Так как $0<\theta<1$, то $|ch\theta x|=\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{2}\le e^{|x|}$ и $|sh\theta x|\le e^{|x|}$. Значит, $|R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$. Но, как легко установить,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ при любом x. Следовательно, при любом x $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ и ряд $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$ сходится к функции chx.

Аналогично можно получить разложение в степенные ряды многих других функций:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...(-\infty<x<\infty), \tag{1.6}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...(-\infty<x<\infty), \tag{1.7}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...(-\infty<x<\infty), \tag{1.8}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...(-1<x\le 1), \tag{1.9}$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+..., \quad (-1<x<1). \tag{1.10}$$

Для каждого случая в скобках указана область, в которой степенной ряд сходится к соответствующей функции. Последний ряд, называемый *биномиальным*, на концах интервала сходимости ведет себя по-разному в зависимости от $m\in R$: при $m\ge 0$ абсолютно сходится в точках $x=\pm 1$; при $-1<m<0$ расходится в точке $x=-1$ и условно сходится в точке $x=+1$; при $m\le 1$ расходится в точках $x=\pm 1$.

В общем случае разложение в степенные ряды основано на использовании рядов Тейлора или Маклорена. Но на практике степенные ряды многих функций можно найти формально, используя ряды (1.6 – 1.10) или формулу для суммы членов геометрической прогрессии. Иногда при разложении полезно воспользоваться почленным дифференцированием или интегрированием рядов. В интервале сходимости ряды сходятся к соответствующим функциям. Например, при разложении в степенной ряд функции $\cos\sqrt{x}$ в формулу (1.7) вместо x подставляем $\sqrt{x}$. Тогда $\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+...$

Полученный ряд сходится при любых $x\in R$, но следует помнить, что функция $\cos\sqrt{x}$ не определена при $x<0$. Поэтому найденный ряд сходится к функции $\cos\sqrt{x}$ только в полуинтервале $0\le x<\infty$.

Аналогично можно записать степенные ряды для следующих функций $f(x)=e^{-3x}$ и $f(x)=\frac{\sin x}{x}$:

$$e^{-3x}=1-\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}-\frac{27x^3}{3!}+...+(-1)\frac{3^n x^n}{n!}+...,$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+...$$

Пример 1.4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{4}{(1-x)(1+3x)}$.

Решение. Разложим данную функцию на сумму простейших рациональных дробей: $\dfrac{4}{(1-x)(1+3x)}=\dfrac{1}{1-x}+3\cdot\dfrac{1}{1+3x}$. Поскольку

$$\frac{1}{1+3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^n \quad \text{при} \quad |3x|<1,$$

то

$$\frac{4}{(1-x)(1+3x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 3^n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n\cdot 3^{n+1}]\cdot x^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ (1) сходится при $|x|<1$, а ряд (2) – при $|x|<0,5$.

Пример 1.5. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=arctgx.$.

Решение. Очевидно, что

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+...$$

Полученный ряд сходится внутри отрезка [–1;1], значит, его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0;x]\subset(-1;1)$. Следовательно,

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot t^{2(n-1)}dt,$$

$$arctgx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

т. е. получили ряд, сходящийся к данной функции при $|x|<1$.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

2.1. Вычисление значений функций

Пусть дан степенной ряд функции $y = f(x)$. Задача вычисления значения этой функции заключается в отыскании суммы ряда при заданном значении аргумента. Ограничиваясь определенным числом членов ряда, находим значение функции с точностью, которую можно устанавливать путем оценивания остатка числового ряда либо остаточного члена $R_n(x)$ формул Тейлора или Маклорена.

Пример 2.1. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\delta = 0{,}0001$.

Решение. Степенной ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

при $x = 1$ сходится условно (см. разложение (1.9)).

Для того чтобы вычислить $\ln 2$ с помощью ряда (1.9) с точностью $\delta = 0{,}0001$, необходимо взять не менее 10 000 его членов. Поэтому воспользуемся рядом, который получается в результате вычитания степенных рядов функций ln(1+x) и ln(1–x):

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\cdot\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right).$$

При $|x| < 1$ полученный ряд сходится абсолютно, так как его радиус сходимости $R = 1$: его легко установить с помощью признака д’Аламбера.

Поскольку $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ при x = 1/3, то подставив это значение x в ряд, получим $\ln 2 = 2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\cdot 3^3} + \dfrac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} + \ldots\right).$

Для вычисления ln2 с заданной точностью необходимо найти такое число n членов частичной суммы S_n, при котором сумма остатка $|r_n| < \delta$. В нашем случае $r_n = 2\left(\dfrac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} + \dfrac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}} + \ldots\right).$

Поскольку числа (2n+3), (2n+5), … больше, чем (2n+1), то, заменив их на (2n+1), мы увеличим каждую дробь в сумме остатка. Поэтому

$$r_n < \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+3}}+\ldots\right) = \frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\ldots\right) =$$
$$= \frac{2}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}.$$

Путем подбора значений n находим, что для $n = 3$ $r_n < 0{,}00015$, при этом $\ln 2 = 0{,}6931$.

Пример 2.2. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $\delta = 0{,}001$.

Решение. Воспользуемся разложением в степенной ряд функции e^x (см. 1.6), в котором примем $x = 1/2$, тогда получим

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n!\cdot 2^n} + \ldots$$

Остаток этого ряда

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!\cdot 2^{n+k}} < \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n},$$

так как $(n+1)! < (n+2)! < \ldots$ При $n = 4$ имеем $r_n < \frac{1}{5!\cdot 2^4} < 0{,}001.$

Следовательно,

$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} \approx 1{,}674.$$

Для определения числа членов ряда, обеспечивающих заданную точность вычисления, можно воспользоваться остаточным членом формулы Маклорена $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, где $0<\theta<1$; $x = 1/2$. Тогда при $n = 4$ имеем $\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{2(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001.$

Пример 2.3. Вычислить $\sin\frac{1}{2}$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Подставив в формулу (1.8) значение $x = 1/2$. Тогда

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \frac{1}{5!\cdot 2^5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-1}} + \ldots$$

Так как остаток знакопеременного ряда $|r_n| \le u_{n+1}$ (см. (1.6)) и следствие из признака Лейбница), то достаточно найти первый член u_{n+1}, для которого $u_{n+1} < \delta$. Тогда S_n даст значение функции с требуемой точностью. Очевидно, что уже третий член ряда $\frac{1}{5!\cdot 2^5} < 10^{-3}$, поэтому с точностью $\delta = 10^{-3}$ $\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \approx 0{,}479$.

Пример 2.4. Вычислить $\sqrt[5]{34}$ с точностью $\delta = 10^{-3}$

Решение. Очевидно, что $\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = 2(1+1/16)^{1/5}$. Воспользуемся биномиальным рядом (1.10) при $m = 1/5, x = 1/16$:

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/5} = 1+\frac{1}{5}\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2}\frac{1}{16^2}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\frac{1}{16^3}+\ldots=$$

$= 1+\frac{1}{80}-\frac{1}{3200}+\ldots = 1+0{,}0125-0{,}0003+\ldots \approx 1{,}012$, поскольку уже третий член можно отбросить в силу того, что он меньше $\delta = 10^{-3}$ (см. следствие из признака Лейбница). Следовательно,

$$\sqrt[5]{34} = 2(1+1/16)^{1/5} \approx 2{,}024.$$

2.2. Вычисление интегралов

Так, как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри их интервалов сходимости, то с помощью разложений функций в степенные ряды можно находить неопределенные интегралы в виде степенных рядов и приближенно вычислять соответствующие определенные интегралы.

Пример 2.5. Вычислить $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.8). Заменив в ней x на x^2, получим ряд $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$ Он сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно всюду почленно интегрировать. Следовательно,

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx = \int\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!}+\ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-1)(2n-1)!}+\ldots\approx$$

$$\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!} = 0{,}3333-0{,}0381 = 0{,}295\ ,$$

поскольку уже третий член полученного знакопеременного ряда меньше $\delta = 10^{-3}$.

Пример 2.6. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ в виде степенного ряда и указать область его сходимости.

Воспользовавшись формулой (3.9), получим ряд для подынтегральной функции $\frac{\sin x}{x}$:

$$\frac{1}{x} \cdot \sin x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + ...$$

Он сходится на всей числовой прямой, следовательно, его можно почленно интегрировать:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + ...$$

Так, как при интегрировании степенного ряда его интервал сходимости не изменяется, то полученный ряд сходится также на всей числовой прямой.

2.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение с помощью элементарных функций не удается, его решение удобно искать в виде степенного ряда, например ряда Тейлора или Маклорена.

При решении задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_o) = y_o, \end{cases} \tag{2.1}$$

используется ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n , \tag{2.2}$$

где $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = f(x_o, y_o)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2,3...)$ находятся путем последовательного дифференцирования уравнения (2.1) и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

3. РЯДЫ ФУРЬЕ

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{3.1}$$

где коэффициенты a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) определяются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \tag{3.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \tag{3.3}$$

называется *рядом Фурье функции* $f(x)$, при этом всегда $b_o = 0$.

Функция *f(x)* называется *кусочно-монотонной на отрезке* [a; b], если этот отрезок можно разбить на конечное число *n* интервалов (a; x_1), (x_1; x_2), … (x_{k-1}; b) таким образом, чтобы в каждом из них функция была монотонна.

Теорема 1. *Если функция f(x) периодическая (период ω = 2π), кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке [- π; π], то ее ряд Фурье сходится в любой точке x Є R и его сумма* $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Из теоремы 10 следует, что *S(x) = f(x)* в точках непрерывности функции f(x) и сумма S(x) равна среднему арифметическому пределов слева и справа функции f(x) в точках разрыва первого рода.

Пример 3.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (с периодом 2π): $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Так как данная функция кусочно-монотонная и ограниченная, то она разлагается в ряд Фурье.

Находим коэффициенты ряда:

$$a_o = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x, d\upsilon = \cos nx dx, \\ du = dx, \upsilon = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{\pi \cdot n}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (n \in N).$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (3.1), получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cdot \cos[(2n-1)x] + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin nx \right).$$

Этот ряд сходится к заданной периодической функции с периодом 2π при всех x ≠ (2n – 1) π. В точках x = (2n – 1)π сумма ряда равна (π + 0)/ 2 = π / 2 (рис. 3.1).

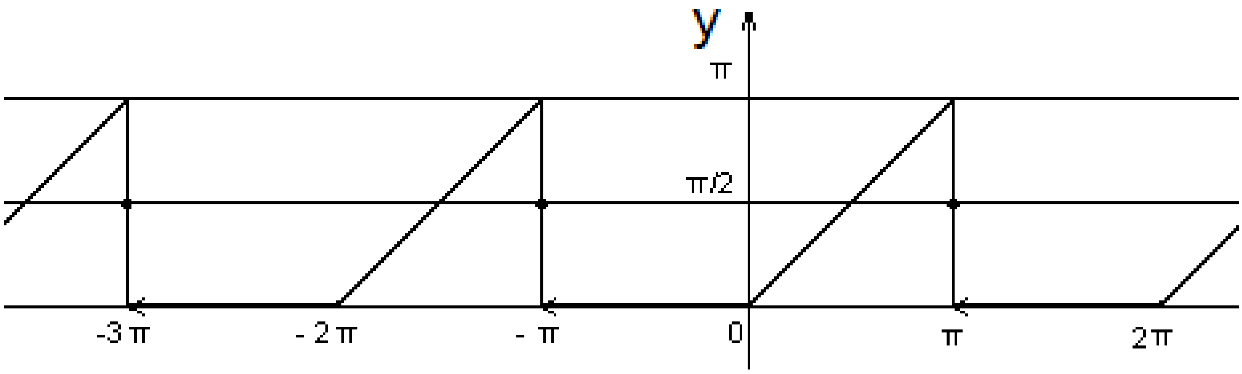

Рис. 3.1

Если функция y = f(x) имеет период 2l, то ее ряд Фурье записывается в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right), \qquad (3.4)$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$

Теорема 2. *Если периодическая функция с периодом 2l кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке [- l; l], то ее ряд Фурье* (3.4) *сходится для любого* $x \in R$ *к сумме* $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ (сравните с теоремой 1).

Пример 3.2. Найти разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом 4; $f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<0, \\ +2, & 0 \le x \le +2. \end{cases}$

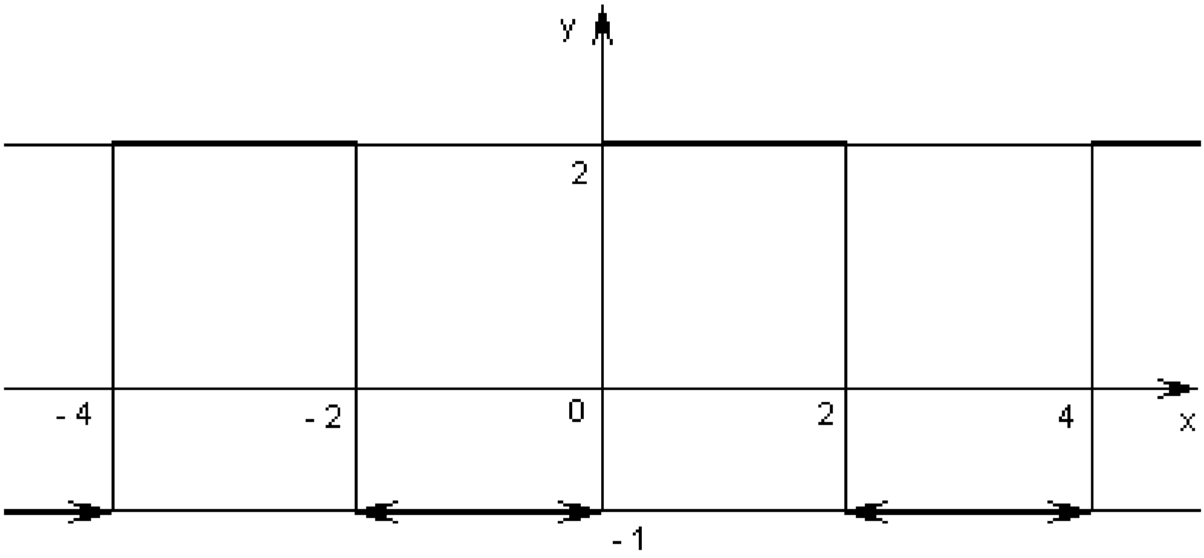

Рис.3.2

Находим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{2}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{2}2dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0}+2x\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}(-2+4)=1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx+\int_{0}^{2}2\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0}+\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{0}^{2}\right)=0,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2}2\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{4}{\pi n}(\cos\pi n - 1)\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi n}(\cos\pi n - 1) = \frac{3}{\pi n}((-1)^n - 1).$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (5.4), получим

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

Если периодическая функция *f(x)* четная, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, при этом

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Если же периодическая функция *f(x)* нечетная, то она разлагается в ряд Фурье только по синусам и

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Так как для всякой периодической функции *f(x)* периода $2l$ и любого $\lambda \in R$ справедливо равенство

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{\lambda-1}^{\lambda+1} f(x)dx,$$

то коэффициенты ряда Фурье можно вычислять по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l}\cdot\int_0^{2l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{l}\cdot\int_0^{2l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

где $n = 0, 1, \ldots$

Пусть функция $f(x)$ кусочно-монотонна и ограничена на отрезке $[a;\ b] \subset (-l;\ l)$. Чтобы разложить эту функцию в ряд Фурье, продолжим ее произвольным образом на интервал $(-l;\ l)$ так, чтобы она оставалась кусочно-монотонной и ограниченной в $(-l;\ \ l)$. Найденную функцию разложим в ряд Фурье, который сходится к заданной функции на отрезке $[a;\ \ b]$. Если заданную функцию продолжить на $(-l;\ \ l)$ четным образом, то получим ее разложение только по косинусам, если же продолжить ее нечетным образом, получим разложение только по синусам.

Так функция $f(x)$, определенная на $[a;\ \ b] \subset (-l;\ \ l)$ и продолженная в $(-l;\ \ l)$ в соответствии с равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < -b, \\ -f(x), & -b \le x <\le a, \\ 0, & -a < x < a, \\ f(x), & a \le x \le b, \\ 0, & b < x < l, \end{cases}$$

разлагается только по синусам.

Сумма S(x) ряда Фурье такой функции равна *f(x)* внутри [a; b], а $S(a) = \dfrac{f(a)}{2}, \quad S(b) = \dfrac{f(b)}{2}$ согласно теореме 2 (см. рис. 3.3).

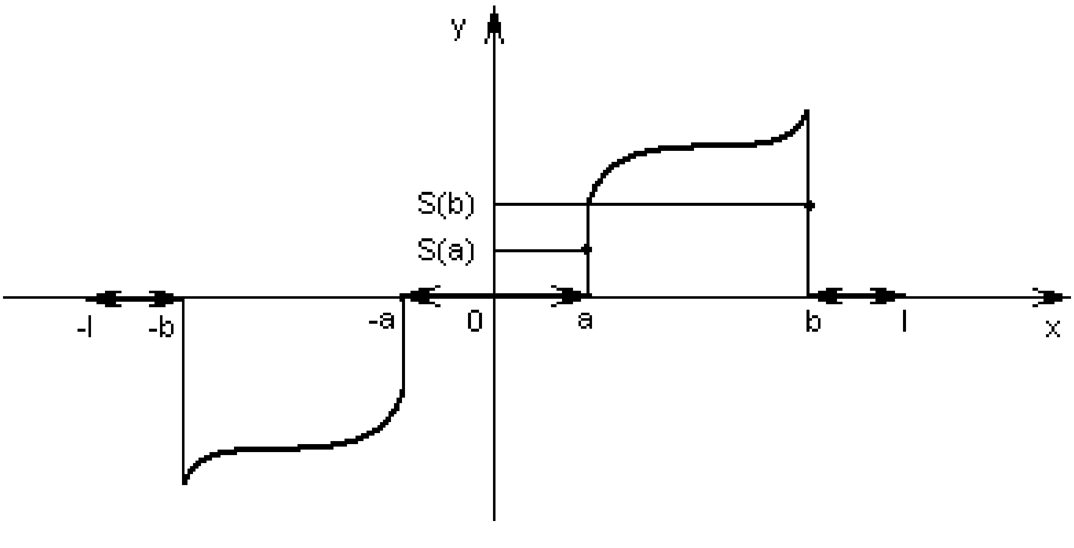

Рис. 3.3

Пример 3.3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|, \quad -2 \le x \le +2.$

Так как данная функция четная, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, т. е. $b_n = 0$. Далее находим:

$$a_o = \frac{2}{2} \cdot \int_0^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cos(\frac{\pi n}{l} x) dx = \int_0^2 x \cos\cos(\frac{\pi n}{2} x) dx =$$

$$= \left. \frac{2x}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2} x\right) \right|_0^2 + \left. \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2} x\right) \right|_0^2 = \frac{4}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1\right).$$

Отсюда следует, что $a_n = 0$ при n четном, а при n нечетном $a_n = \frac{-8}{\pi^2 n^2}$.

Искомый ряд Фурье данной функции

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right).$$

Его сумма равна заданной функции на отрезке [–2; 2], а на всей числовой прямой эта сумма определяет периодическую функцию с периодом ω = 4 (рис. 3.4).

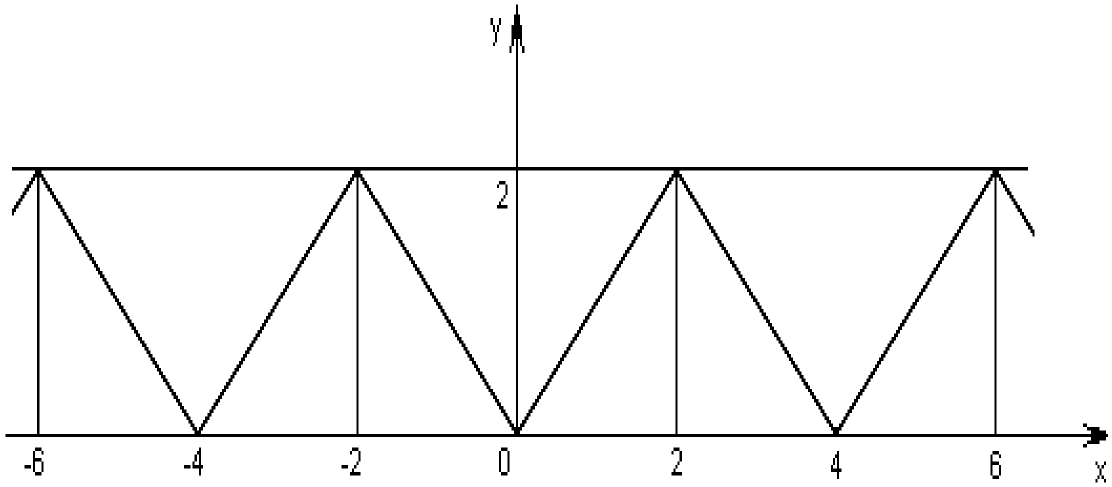

Рис. 3.4

Пример 3.4. Разложить в ряд по синусам функцию $f(x) = 2 - x$ на отрезке [0; 2].

Продолжим данную функцию на отрезок [–2; 0] нечетным образом (рис. 3.5), т. е. положим

$$f(x)=\begin{cases} -2-x, & -2\le x<0, \\ 2-x, & 0\le x\le 2. \end{cases}$$

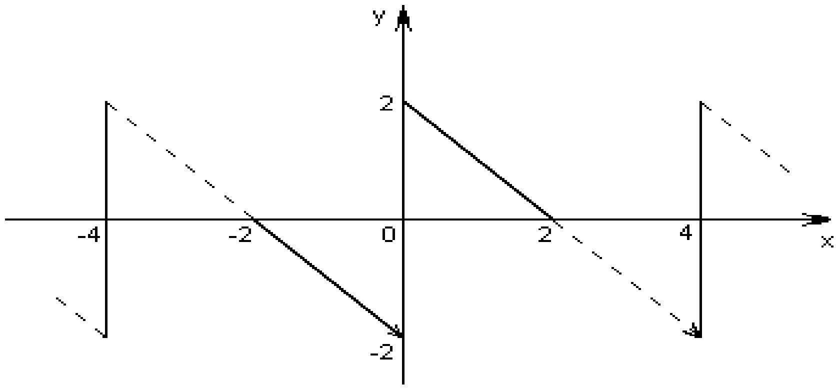

Рис. 3.5

Тогда $a_n=0$ при n = 0, 1, 2, …, а $b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=$

$$=\int\limits_0^2(2-x)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=2-x, du=-dx, \\ d\upsilon=\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx, \upsilon=-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2(2-x)}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2-\int\limits_0^2\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=$$

$$=\frac{4}{\pi n}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{\pi n}\ .$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд Фурье, получаем

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right).$$

Пример 3.5. Разложить в ряд Фурье функцию, график которой изображен на рис. 3.6 в виде сплошной линии.

Продолжим данную функцию на отрезок [–2; 0] четным образом и разложим функцию $f(x)=x,\quad x\in[0;\ 2]$, по косинусам, т. е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right), \qquad a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\frac{2x}{n\pi}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2-$$

$$-\frac{2}{\pi n}\cdot\int_0^2\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{\pi^2 n^2}[(-1)^n-1].$$

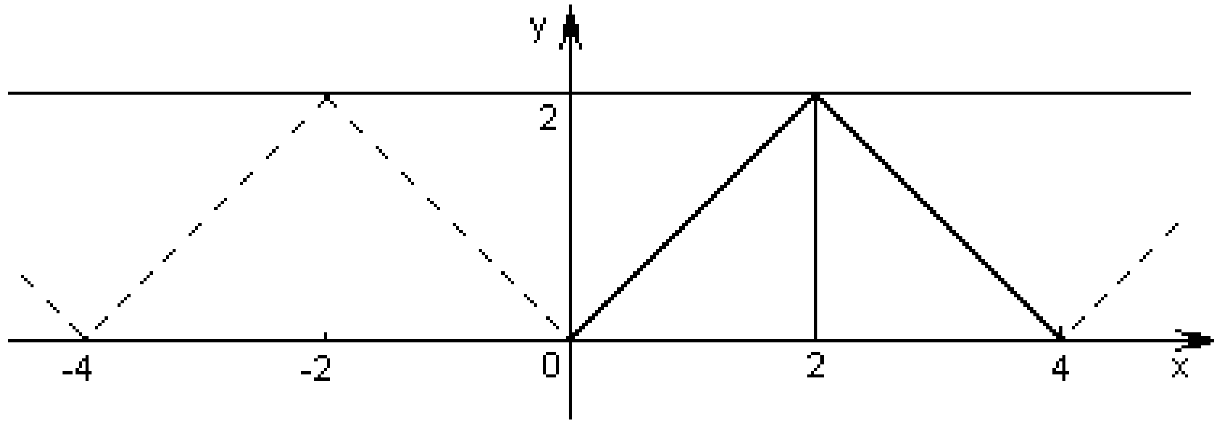

Рис. 3.6

Искомый ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

На отрезке [0; 2] он представляет собой заданную функцию, а на всей числовой оси – периодическую функцию с периодом ω = 4 (рис. 3.6, штриховая и сплошная линии).

Поскольку ряд Фурье сходится к значению соответствующей функции в точках, где функция непрерывна, то ряды Фурье часто используются для суммирования числовых рядов. Так, например, если в ряде Фурье функции, определенной в примере 3.5, положить $x=2$, то получим: $2=1-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\pi$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Пример 3.6. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $y = x^2$ на отрезке $[0;\ \pi]$ и с помощью полученного ряда вычислить суммы числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Разложим данную функцию в ряд по косинусам, продолжив ее на интервал $(-\pi;\ 0)$ четным образом и на всю числовую прямую периодически, с периодом 2π.

Тогда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} 2x\frac{1}{n}\sin nx dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) = -\frac{4}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Мы получили ряд Фурье

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n}.$$

Так как продолженная функция непрерывна, то ее ряд Фурье сходится к заданной функции при любом значении x. Поэтому для $x = 0$ имеем

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

При $x = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев, Н.Н. Теория рядов: учебное пособие для студентов вузов / Н.Н. Воробьев. – 4-е изд. испр. и доп. – Москва: Наука, 1979. – 408 с.
2. Шмелев, П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А. Шмелев. – Москва: Высшая школа, 1983. – 176 с.
3. Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – Москва: Издательство АСТ, 2001. – 656 с.
4. Тузик, А.И. Высшая математика. Ряды: учебное пособие / А.И. Тузик. – Брест: БрГТУ, 2003. – 123 с.
5. Исаева, Н.А. Теория рядов в примерах и задачах: учебно-методическое пособие. / Н.А. Исаева, Т.В. Касаткина. – Томск: Томский государственный университетт. – 2009. – 116 с.
6. Корсун, Л.Д. Ряды: учебное пособие / Л.Д. Корсун, С.П. Курович, В.Г. Тепляков. – Гомель: Гомельский государственный технический университет, 2010. – 40 с.
7. Виленкин, И.В. Высшая математика. Интегралы по мере. Дифференциальные уравнения. Ряды / И.В. Виленкин, В.М. Гробер, О.В. Гробер. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2011. – 300 с.
8. Ряды: учебное пособие / Н.В. Гредасова, Н.И. Желонкина, М.А. Корешникова [и др.]. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2016. – 116 с.
9. Мартынов, Г.П. Ряды в примерах и задачах: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2020. – 35 с.
10. Домрина, А.В. Числовые и функциональные ряды в математическом анализе: методическое пособие / А.В. Домрина. – Москва: МГУ. 2023. – 54 с.
11. Единова, Е.С. Ряды: учебное пособие / Е.С. Единова. – Санкт-Петербург: СПбПУ, 2023. – 190 с.

РЯДЫ
Часть 2. Приближенные вычисления

Методические указания

Иванов Владимир Иванович

Электронное издание

Редактор С.М. Макарова

Подписано в свет 25.02.2025. Регистрационный номер 97
Редакционно-издательская служба Красноярского государственного аграрного университета
660017, Красноярск, ул. Ленина, 117
e-mail: rio@kgau.ru